

# Ядрени модели

- капков модел;

*отклонение – ядрени ЕМ моменти*

- слоест модел;
- колективни състояния.

# Капков модел

# Ядрена маса и енергия на свързване

$$m(N, Z) c^2 = m_{\text{атом}} c^2 - Z m_e c^2 + \sum_{i=1}^Z B_i^e \quad B_i^e \approx 10 - 100 \text{ keV} \quad 10^{-6}$$

$$m(N, Z) = A \cdot 1000 \text{ MeV}$$

$$B(N, Z) = \{ Z m_p + N m_n - [m_{\text{атом}} - Z m_e] \} c^2$$

$$B(N, Z) = \{ Z (m_p + m_e) + N m_n - m_A \} c^2$$

$$B(N, Z) = \{ Z m(^1\text{H}) + N m_n - m_A \} c^2$$

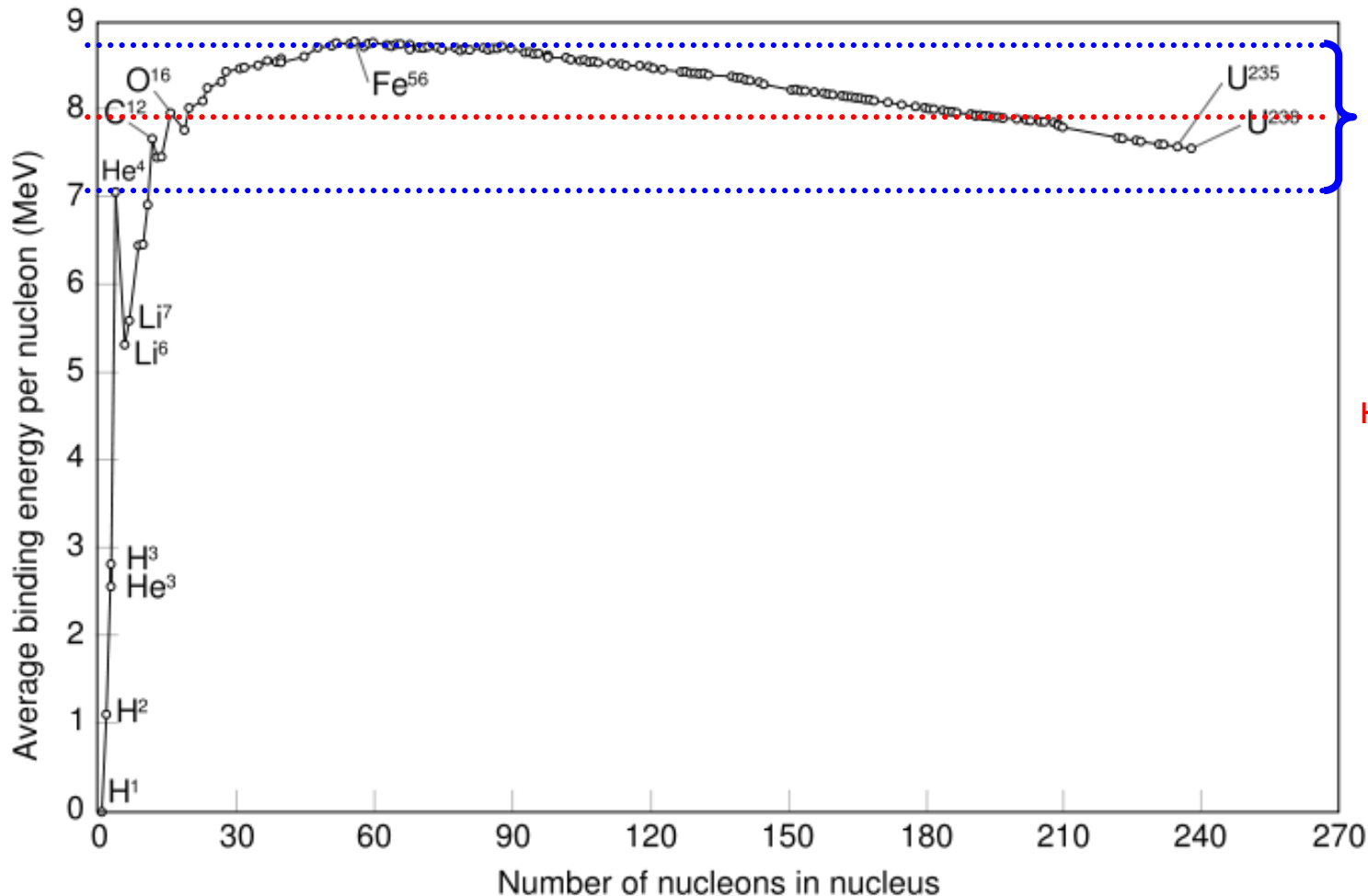
$$m({}_Z^A\text{X}_N) = \left[ Z m(^1\text{H}) + N m_n - \frac{1}{c^2} B(N, Z) \right]$$

$$\Delta = (Z m(^1\text{H}) + N m_n - m({}_Z^A\text{X}_N)) c^2$$

Енергетичният остатък/излишък от образуването на ядрена свързана система

# Енергия на свързване

$B/A$  като функция на  $A$



$B/A \sim \text{const} = 8.0(8) \text{ MeV}$

~~$B \sim A(A-1)$~~

$B \sim A$

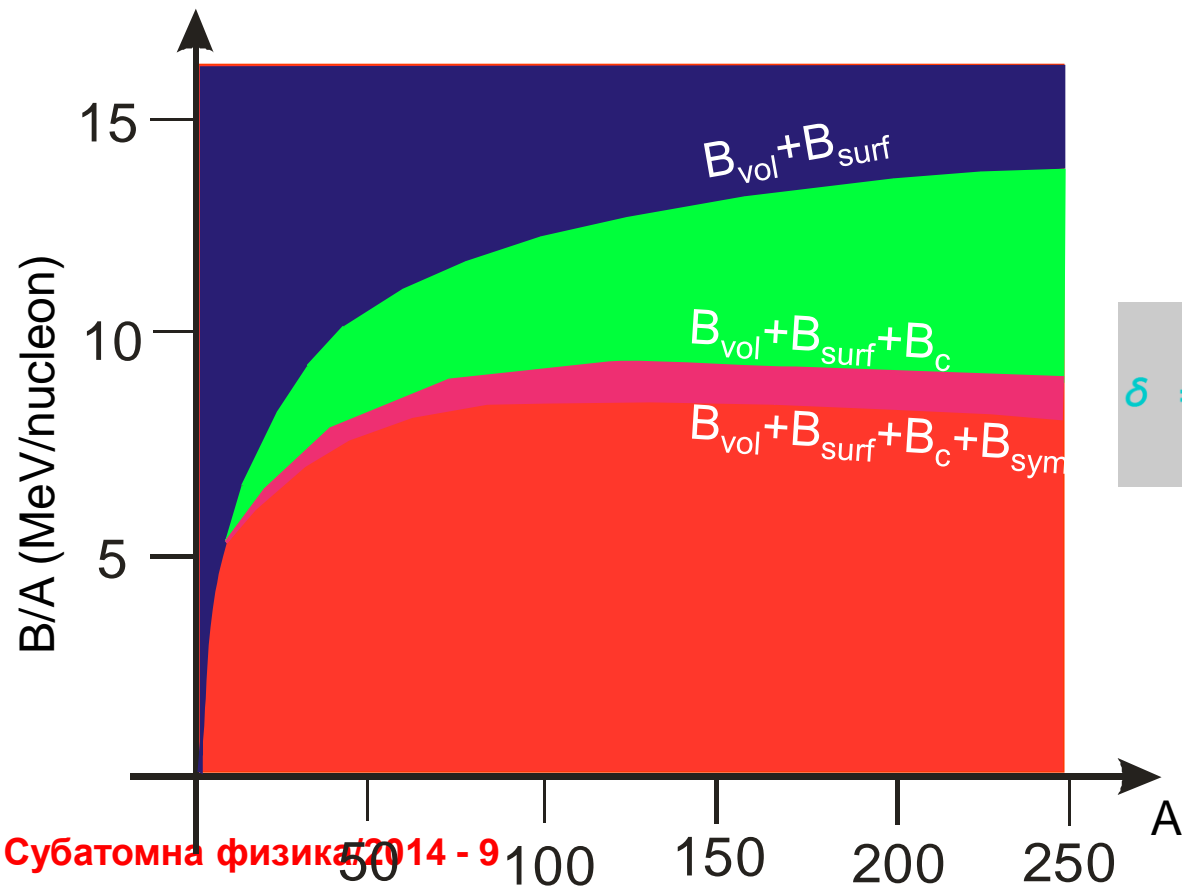
най-близки съседи

# Полу-емпирична масова формула

1930 Von Weizsäcker → течно-капков модел

$$B(N, Z) = \boxed{a_{\text{vol}} A} - \boxed{a_{\text{surf}} A^{2/3}} - \boxed{\frac{a_c}{5} \frac{Z(Z-1)}{4\pi\epsilon_0 R_0} \frac{A^{-1/3}}{A^{1/3}}} - \boxed{a_{\text{sym}} \frac{(A-2Z)^2}{A}} + \delta$$

$a_{\text{vol}} = 15.5 \text{ MeV}$   
 $a_{\text{surf}} = 16.8 \text{ MeV}$   
 $a_c = 0.72 \text{ MeV}$   
 $a_{\text{sym}} = 23 \text{ MeV}$

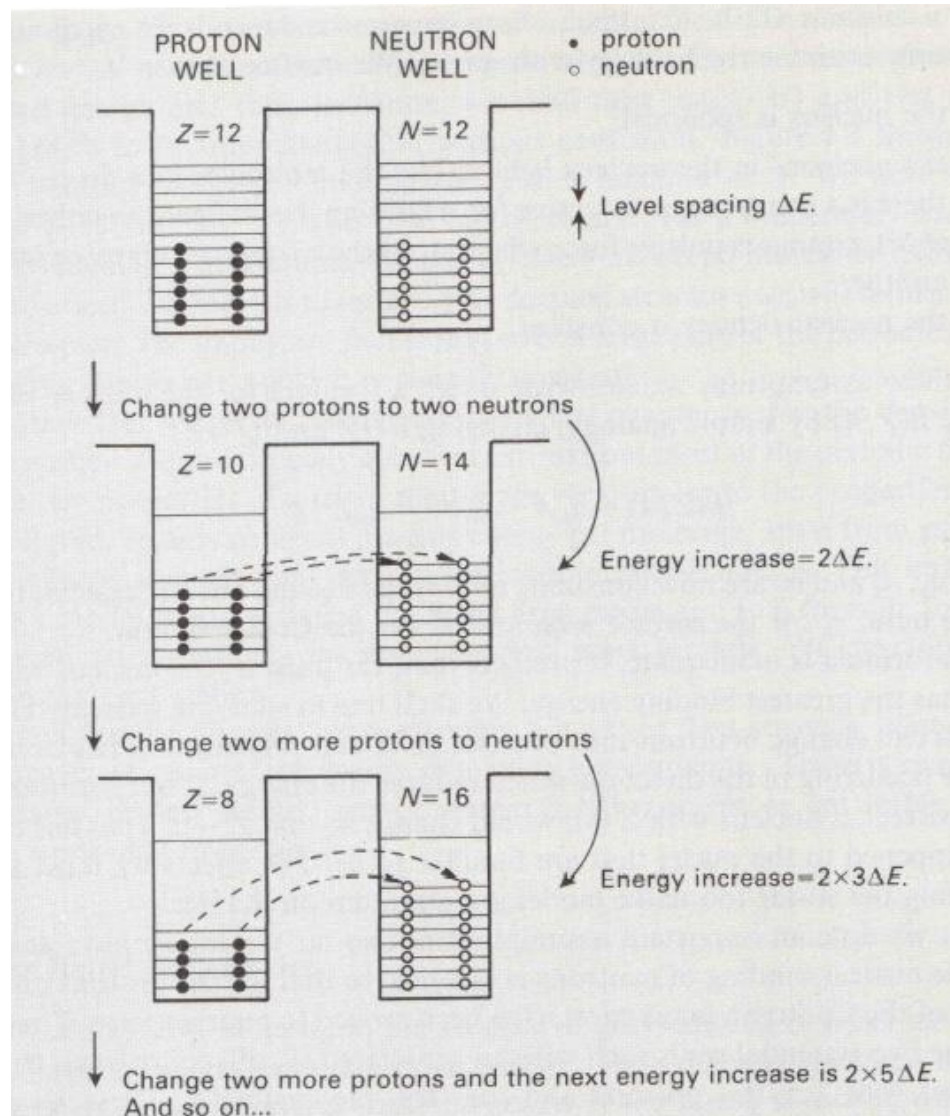


Само 4 стабилни  
нечетно-нечетни ядра:  
 ${}^2\text{H}$ ,  ${}^6\text{Li}$ ,  ${}^{10}\text{B}$ ,  ${}^{14}\text{N}$

$$\delta = \begin{cases} + a_p A^{-3/4} & \text{за четни } N \text{ и } Z \\ 0 & \text{за } N \text{ или } Z \text{ нечетно} \\ - a_p A^{-3/4} & \text{за нечетни } N \text{ и } Z \end{cases}$$

$$a_p = 34 \text{ MeV}$$

# “Асиметричен” член



Брой стъпки  $\Delta E$  за да  
се прехвърли  $p \rightarrow n$ :

1, 1, 3, 3, 5, 5, 7...

Изменение на енергията в единици  $\Delta E$ :

1, 2, 5, 8, 13, 18, 25, 32...

$N-Z=2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$  ( $A=\text{const}$ )

т.е.  $\Delta E_{\text{sym}} \sim [(N-Z)^2 / 8] * \Delta E$ ;

$$\Delta E \sim A^{-1} \rightarrow -a_{\text{sym}} \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

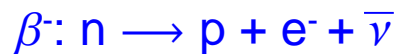
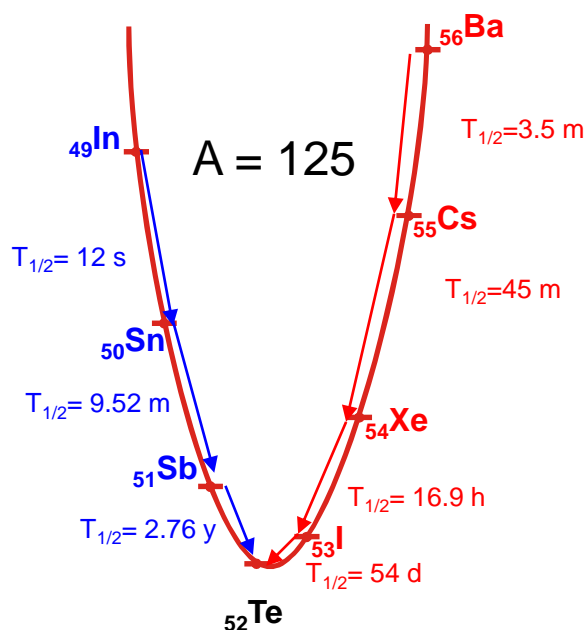
# Линия на стабилност

$$M(Z, A) = Zm_p + Nm_n - B(Z, A) / c^2$$

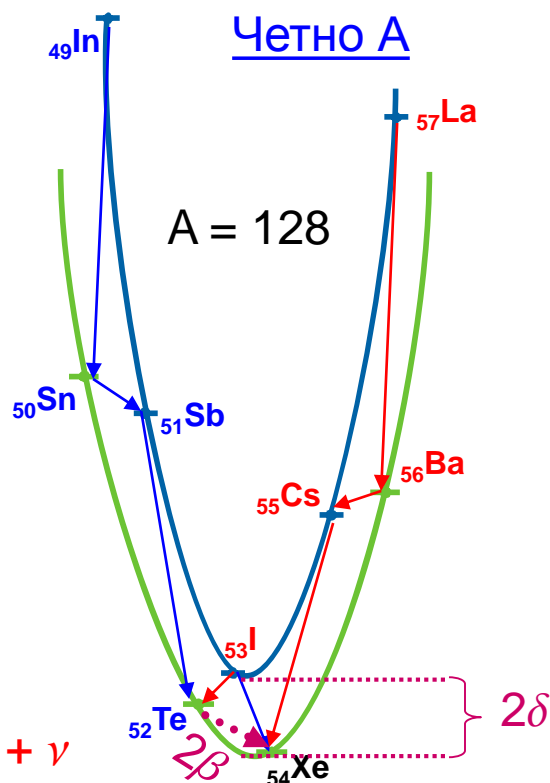
$$\left( \frac{\partial M(Z, A)}{\partial Z} \right)_{A=\text{const}} = 0 \quad Z_{\min} = \frac{[m_n - m_p] + a_c A^{-1/3} + 4 a_{\text{sym}}}{2 a_c A^{-1/3} + 8 a_{\text{sym}} A^{-1}} \approx \frac{A}{2} \frac{1}{1 + \frac{1}{4} A^{2/3} a_c / a_{\text{sym}}}$$

$$Z_{\min} \xrightarrow{A < 40} \frac{A}{2} \quad Z_{\min} \xrightarrow{A > 40} < \frac{A}{2}$$

Нечетно A



Четно A



# Граници на ядреното съществуване

Делене (за ядра с  $A > 230$ )

$$S_p = B \left( {}^A_Z X_N \right) - B \left( {}^{A-1}_{Z-1} X_N \right) = \left( \frac{\partial B}{\partial Z} \right)_{N=\text{const}}$$

$$Z^2/A \approx 41$$

$$S_p = 0$$

$$N=Z$$

126

$$S_n = 0$$

$$S_n = B \left( {}^A_Z X_N \right) - B \left( {}^{A-1}_Z X_{N-1} \right) = \left( \frac{\partial B}{\partial N} \right)_{Z=\text{const}}$$

82

82

50

28

20

8

20

28

50

2

8

N

Z



Ядрен спин и четност.  
Електромагнитни ядрени моменти  
и методи за измерването им

# Ядрен ъглов момент и четност

Централен потенциал

$$\vec{j} = \vec{I} + \vec{s}$$

$$\langle j^2 \rangle = \hbar^2 j(j+1)$$

$$\langle j_z \rangle = \langle l_z + s_z \rangle = \hbar m_j \quad m_j = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

$$m_j = m_l + m_s = m_l \pm 1/2 \quad m_j = \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \dots \quad j = 1 + 1/2 \text{ или } 1 - 1/2$$

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^A \vec{j}_i \quad I^2 = \hbar^2 I(I+1) \quad I_z = m\hbar = \hbar \sum m_j \quad m = -I, -I+1, \dots, I-1, I \quad (2I+1)$$

$j$  е полуцяло число  $\rightarrow$  ако  $A$  е четно  $\rightarrow I_z$  е цяло  $\rightarrow I$  е цяло  
ако  $A$  е нечетно  $\rightarrow I_z$  е полуцяло  $\rightarrow I$  е полуцяло

$$\Pi \psi(\vec{r}) = \pi \psi(-\vec{r}) \quad \pi = \pm$$

$$\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3 \cdot \dots \cdot \pi_A$$

Ядреният спин  $I$  и ядрената четност  $\pi$  са глобални характеристики на ядрото като **цяло**, т.е. трябва да се разглеждат (определят експериментално) като характеристики на една частица.

# Електромагнитни моменти

$\vec{r}', r'$

$|\vec{r} - \vec{r}'|$

$\vec{r}, r$

Какви са статичните ЕМ полета създавани от ядрото в точка  $\vec{r}$  далече от ядрото? Как реагира ядрото, ако му въздействаме с външно ЕМ поле?

$\rho(\vec{r}')$  - зарядова плътност

$\vec{j}(\vec{r}')$  - плътност на ядрените токове

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{\lambda, m} \frac{4\pi}{2\lambda + 1} \frac{r_{<}^{\lambda}}{r_{>}^{\lambda+1}} Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) Y_{\lambda m}^{*}(\theta', \varphi')$$

$r > r' \quad \begin{matrix} r_{<} = r' \\ r_{>} = r \end{matrix}$

Класическо разглеждане:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \sum_{\lambda, m} \left\{ \frac{4\pi}{2\lambda + 1} \frac{r'^{\lambda}}{r^{\lambda+1}} Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) Y_{\lambda m}^{*}(\theta', \varphi') \right\} \vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

$\vec{M}_{\lambda m}$  магнитен  $\lambda$ -полен момент

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\lambda, m} \frac{4\pi}{2\lambda + 1} \frac{1}{r^{\lambda+1}} Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) \left[ \int r'^{\lambda} Y_{\lambda m}^{*}(\theta', \varphi') \vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}' \right]$$

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' =$$

Електричен  $\lambda$ -полен момент

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\lambda, m} \frac{4\pi}{2\lambda + 1} \frac{1}{r^{\lambda+1}} Y_{\lambda m}(\theta, \varphi) \left[ \int r'^{\lambda} Y_{\lambda m}^{*}(\theta', \varphi') \rho(\vec{r}') d\vec{r}' \right]$$

Ако запазим само  
първите 3 члена в  
развитието по  
малкия  
параметър  $r'/r$ , то:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos\theta}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos\theta}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos\theta \right) + \frac{3}{8} \left( \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos\theta \right)^2 \right]$$

## Електрични моменти

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' =$$

Електричен квадруполен момент

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \underbrace{\frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') d\vec{r}'}_{\lambda=0} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \int \rho(\vec{r}') r' \cos\theta d\vec{r}'}_{\lambda=1} + \frac{1}{r^3} \underbrace{\int \rho(\vec{r}') r'^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) d\vec{r}'}_{\lambda=2} + \dots \right]$$

**eZ**

Преход към квантови обекти

$$\rho(\vec{r}') = \mathbf{eZ} \psi^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}')$$

$$\int \psi^*(\vec{r}') r' \cos\theta \psi(\vec{r}') d\vec{r}' = \int \psi^*(\vec{r}') z' \psi(\vec{r}') d\vec{r}' = \int \psi^*(-\vec{r}') (-z') \psi(-\vec{r}') d\vec{r}' = - \int \psi^*(\vec{r}') z' \psi(\vec{r}') d\vec{r}' = 0$$

$\vec{r} \cdot \vec{r}' = r r' \cos\theta$   
 $\vec{r} \equiv \vec{z}$

# Електричен квадруполен момент

$$eQ = e \int \psi^* (\vec{r}') (3z'^2 - r'^2) \psi (\vec{r}') d\vec{r}'$$

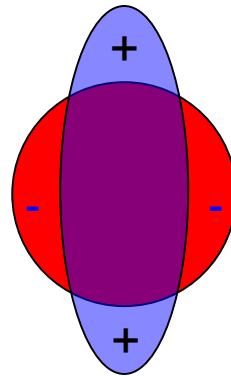
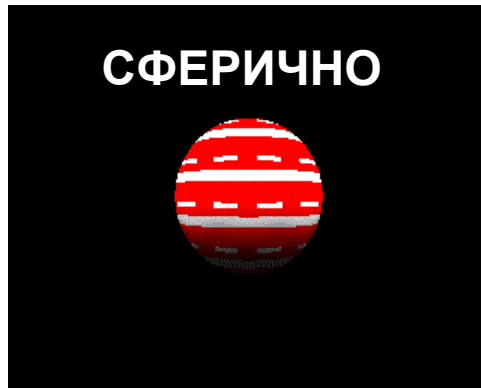
$$[Q] = [S] = b$$

$$[eQ] = e[S] = eb$$

Вътрешен – дефиниран спрямо оста на ядрена симетрия (z')

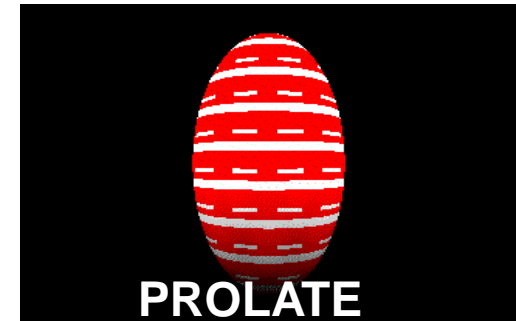


$Q=0$

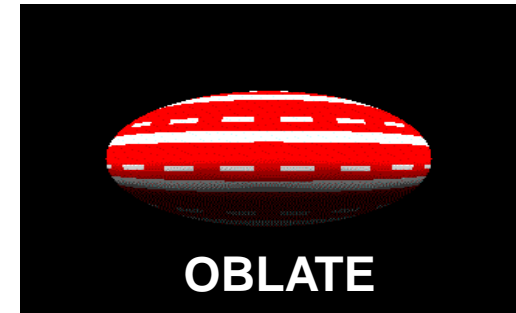


$Q \neq 0$

$Q > 0$



$Q < 0$



Външно поле

$$E = \int \rho (\vec{r}') V_{\text{ext}} (\vec{r}') d\vec{r}' \approx eZV_{\text{ext}}(0) + \int \rho (\vec{r}') z' \left( \frac{\partial V_{\text{ext}} (\vec{r}')}{\partial z'} \right)_{z'=0} d\vec{r}' + \int \rho (\vec{r}') z'^2 \left( \frac{\partial^2 V_{\text{ext}} (\vec{r}')}{\partial z'^2} \right)_{z'=0} d\vec{r}'$$

цилиндрична симетрия  $\vec{Z} \equiv \vec{E}_{\text{ext}}$

$$E_Q = \frac{1}{4} (eQ) \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 V_{\text{ext}}}{\partial z'^2} \right)_{z'=0}$$

Спектроскопичен – дефиниран спрямо външна ос

$$\cos \theta = \frac{I_z}{|I|} = \frac{m_I}{\sqrt{I(I+1)}}$$

$$E_Q = \frac{1}{4} (eQ) \frac{3m_I^2 - I(I+1)}{2I(I+1)} \left( \frac{\partial^2 V_{\text{ext}}}{\partial z'^2} \right)_{z'=0}$$

Съществена част от ядрения спин

# Магнитни моменти

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \int \vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}' + \frac{1}{r^2} \int \vec{j}(\vec{r}') r' \cos\theta d\vec{r}' + \dots \right]$$

= 0, кръгови стационарни токове, няма магнитни заряди

Виж, напр. гл. Мултиполни моменти в  
Електродинамика (Хр. Попов), Унив. изд., 1995 г.

$$\int \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r}' \cdot \vec{r}_0) d\vec{r}' = \left[ \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}' \right] \times \vec{r}_0 + \int \vec{r}' (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{r}_0) d\vec{r}' = \vec{\mu} \times \vec{r}_0$$

$$- \int \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r}' \cdot \vec{r}_0) d\vec{r}'$$

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}' \quad \text{магнитен диполен момент}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3} + \dots$$

# Магнитен диполен момент

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}' = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' \times \vec{v}' d\vec{r}' = \frac{1}{2m} \int \rho(\vec{r}') \vec{l}' d\vec{r}'$$

## Преход към квантови обекти

$$\vec{l} \rightarrow \hat{l} \quad \rho(\vec{r}') = e \psi^*(\vec{r}') \psi(\vec{r}') \quad \vec{\mu} = \frac{e}{2m} \int \psi^*(\vec{r}') \hat{l} \psi(\vec{r}') d\vec{r}'$$

$$\psi(\vec{r}') = | \dots l_z \dots \rangle \quad \mu_z = \frac{e}{2m} \int \psi^*(\vec{r}') \hat{l}_z \psi(\vec{r}') d\vec{r}' = \frac{e\hbar}{2m} m_l \quad \hat{l}_z \psi(\vec{r}') = m_l \hbar \psi(\vec{r}')$$

$$\mu = \left( \frac{e\hbar}{2m} m_l \right)_{m_l=1} = \frac{e\hbar}{2m} l = g_l l \mu_N / \hbar$$

$$g_l = \begin{cases} 1 & \text{за протони} \\ 0 & \text{за неутрони} \end{cases}$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.7884 \times 10^{-5} \text{ eV/T} \quad \mu_N = \frac{e\hbar}{2m} = 3.1525 \times 10^{-8} \text{ eV/T}$$

## Вътрешен ъглов момент

$$\mu = g_s s \mu_N \quad s = 1/2 (e^-, p, n) \quad g_s(e^-) = 2.0023 \quad g_s(p) = 5.5856912 (22)$$

$$g_s = 2 \quad g_s(n) = -3.8260837 (18)$$

$\mu < 6 \mu_N \Rightarrow$  само не сдвоените нуклони допринасят в магнитния момент на ядрото

$$\mu = (g_l l + g_s s) \mu_N / \hbar$$

ако разглеждаме само няколко нуклона  
над "ядка" със спин  $I_c$ :

формално (но невъзможно за реализация):

$$\mu = \sum_{i=1}^A [g_{l,i} l_i + g_{s,i} s_i] \mu_N / \hbar$$

$$\mu = [g_R I_c + \sum_{i=1}^{\text{няколко}} (g_{l,i} l_i + g_{s,i} s_i)] \mu_N / \hbar$$

$$g_R = Z / A$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left( -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'.$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

$$\mu = \frac{e}{2m} \int \psi^* (\vec{r}') (-i\hbar \vec{r}' \times \nabla)_z \psi (\vec{r}') d\vec{r}'$$

Магнитните  $\lambda$ -полни моменти са ненулеви само за нечетни мултиполности.

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{4\pi}{1} \frac{1}{r} Y_{00}(\theta, \varphi) Y_{00}^*(\theta', \varphi') \int \vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}' + \frac{4\pi}{3} \frac{1}{r^2} \int \vec{r}' \left\{ \sum_{m=-1}^1 Y_{1m}(\theta, \varphi) Y_{1m}^*(\theta', \varphi') \right\} \vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}' + \dots \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{r}' + \dots \end{aligned}$$

$$\sum_{m=-1}^1 Y_{1m}(\theta, \varphi) Y_{1m}^*(\theta', \varphi') = \frac{3}{4\pi} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r r'}$$



# Слоест модел

# Ефективни ядрени сили

Ядрен многочастичен проблем: да се опишат свойствата на ядрената система като **квантовомеханична** система, изградена от **голям, но краен брой силно взаимодействащи** частици – трудна работа...

$$\begin{aligned}\hat{H} \Psi(1, 2, \dots, A) &= E \Psi(1, 2, \dots, A) \\ \{i\} &= \{\vec{r}_i, \vec{p}_i, \vec{s}_i, \vec{t}_i\} \\ \hat{H} = T + V(1, 2, \dots, A) &= \sum_{i=1}^A -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + V(1, 2, \dots, A) \\ V(1, 2, \dots, A) &\approx \sum_{i < k} V(i, k)\end{aligned}$$

Вътре в ядрото **чистите нуклеон-нуклеонни** сили се **изменят** поради факта, че взаимодействието протича в **среда на ядрена материя**, а не във вакуум

- **да се опишат** нуклеон-нуклеонните сили вътре в ядрото – метод на Brückner (G-матрица) – пренормира чистото N-N взаимодействие, отчитайки средата и конфигурационното пространство;
- **да се постулира** (феноменологичен подход) или **да се намери** (Хартри-Фок методи) сила/потенциал, която включва основните характеристики на чистото нуклеон-нуклеонно взаимодействие, определящи поведението на системата при определени условия;

# Средно поле (модел на независими частици)

В ядрото отделните нуклеони се държат като невзаимодействащи частици, движещи се в потенциал, генериран от всички тях...

$$\sum_{i < k=1}^A V(i, k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A \left\{ \sum_{k \neq i}^A V(i, k) \right\} \approx \sum_{i=1}^A V(i)$$

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^A \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + \sum_{i < k} V(i, k) \right) = \sum_{i=1}^A \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + V(i) \right) + \underbrace{\sum_{i < k} V(i, k) - \sum_{i=1}^A V(i)}_{\hat{H}_{\text{res}}}$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \cancel{\hat{H}_{\text{res}}} \quad \hat{H}_0 = \sum_{i=1}^A \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + V(i) \right) = \sum_{i=1}^A h_i$$

$$h_i \varphi_i = \epsilon_i \varphi_i \quad E = \sum_{i=1}^A \epsilon_i \quad \Psi(1, 2, \dots, A) = \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_A = \prod_{i=1}^A \varphi_i$$

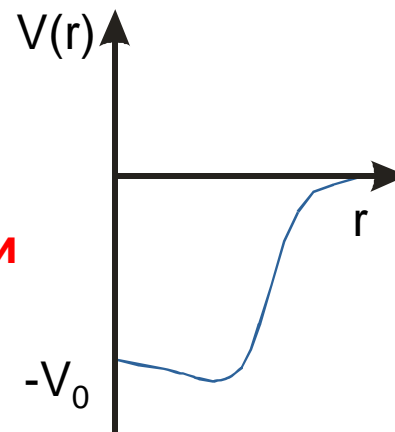
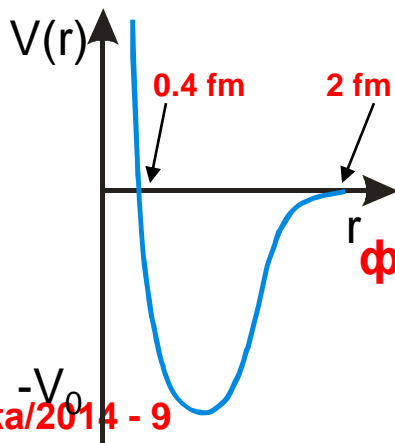
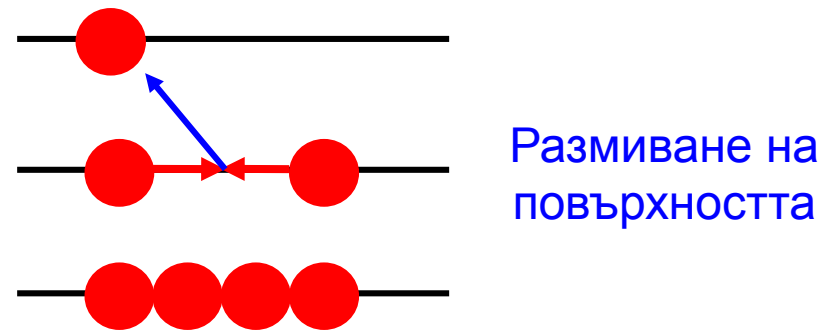
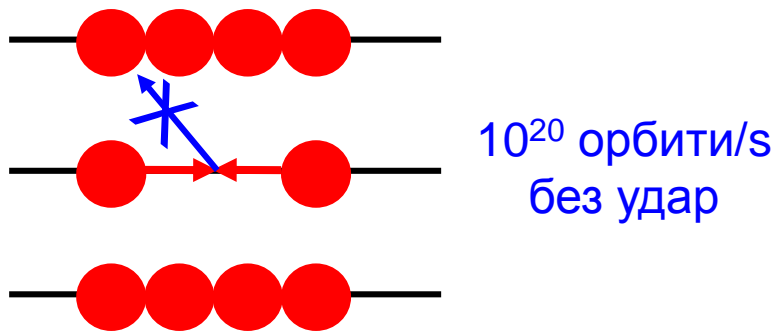
Антисиметричност:  $\Psi(1, 2, \dots, A) = \begin{vmatrix} \varphi_1(1) & \dots & \varphi_1(A) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_A(1) & \dots & \varphi_A(A) \end{vmatrix}$

Нуклеоните последователно запълват енергетични нива в средното поле.  
Субатомна физика/2014 - 9

# Избор на средното поле

## Обосновка на приближението на средно поле

- **СИЛНОТО** ядрено взаимодействие в ядрото е относително “**слабо**” ( $\sim 2.2 \text{ MeV } ^2\text{H}$ )
- от  $R=1.2A^{1/3}\text{fm}$  и  $R_N=1 \text{ fm} \Rightarrow (A \cdot V_N)/V_{\text{ядро}} \cong 60\% \Rightarrow 40\%$  от ядреният обем е свободен, т.е. съприкосновенията м/у нуклеоните са само повърхностни;
- Принцип на Паули:



**Hartry-Fok**  
**феноменологични**

# Избор на средното поле

- сферично-симетричен потенциал;
- нуклеоните във вътрешността “усещат” ядрените сили **равномерно** от всички страни:  

$$(\partial V(r) / \partial r)_{r=0} = 0$$
- ядрените сили **нарастват** от повърхността ( $r=R_0$ ) към вътрешността на ядрото:  

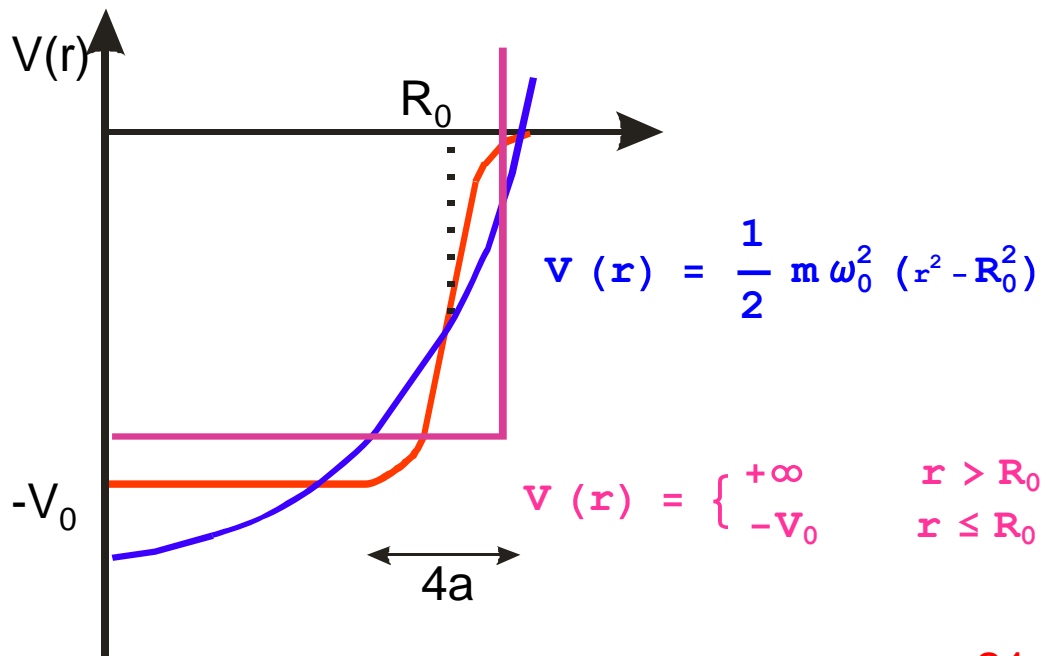
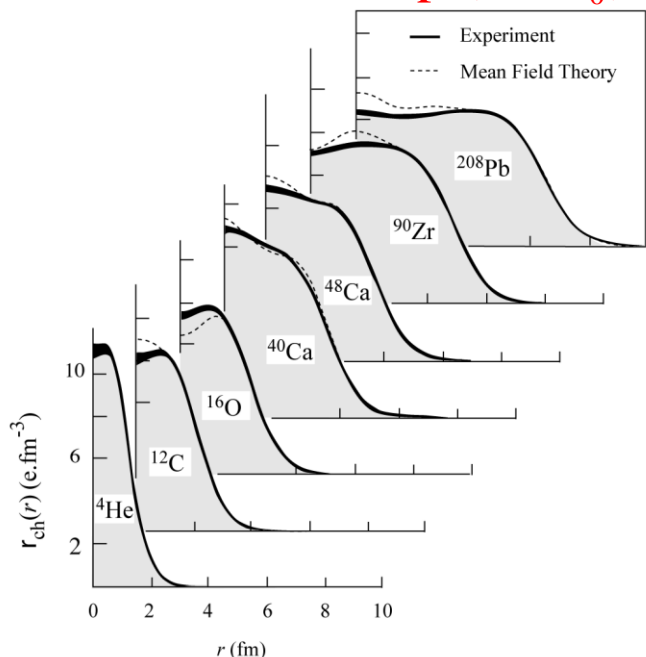
$$(\partial V(r) / \partial r)_{r < R_0} > 0$$
- поради **късодействието** на ядрените сили:

$$V(r) \approx 0 \quad r > R_0$$

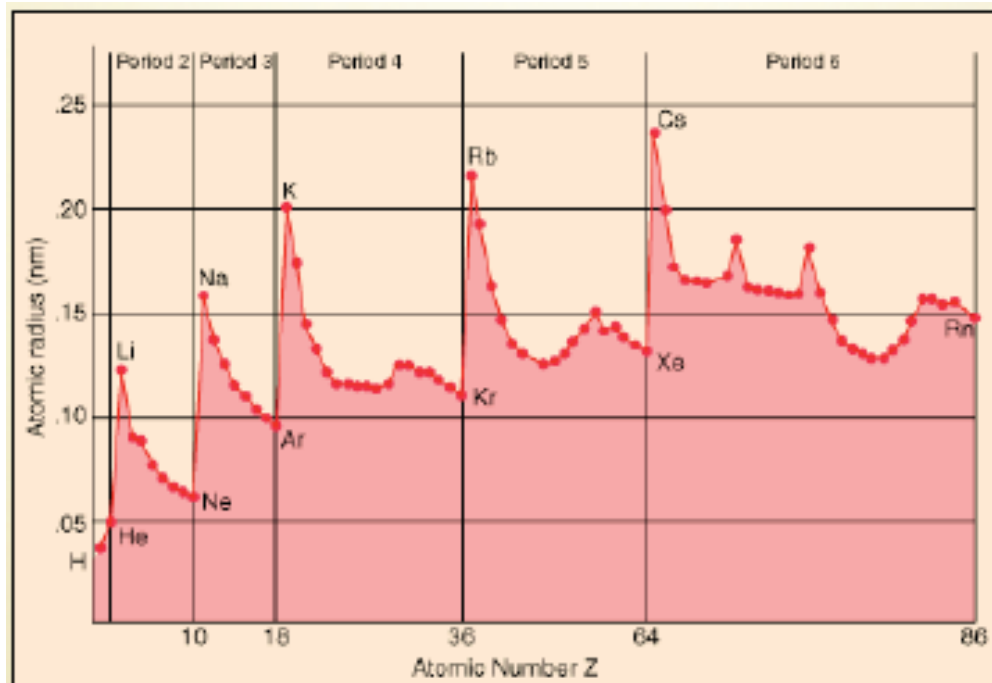
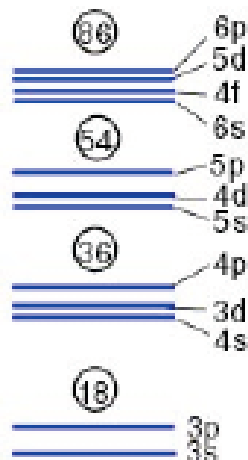
**Ядрените потенциали приблизително следват поведението на ядрената плътност**

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + \exp[(r - R_0)/a]}$$

$$V_0 \cong -50 \text{ MeV}, R_0 = 1.2A^{1/3}, a \cong 0.5 \text{ fm}$$



# Аналогия със структурата на атомната обвивка



- **запълнените** атомни слоеве формират **инертна сърцевина**;
- химичните **свойства** на елементите се определят от електроните в незапълнените слоеве – **валентни електрони**;
- **свойствата** на атомите се **изменят плавно** със запълване на даден слой, но **търпят рязък скок** при преминаване от **един слой към друг**.
- **числата на запълване**, при които се наблюдават такива скокове, се наричат **магически**;

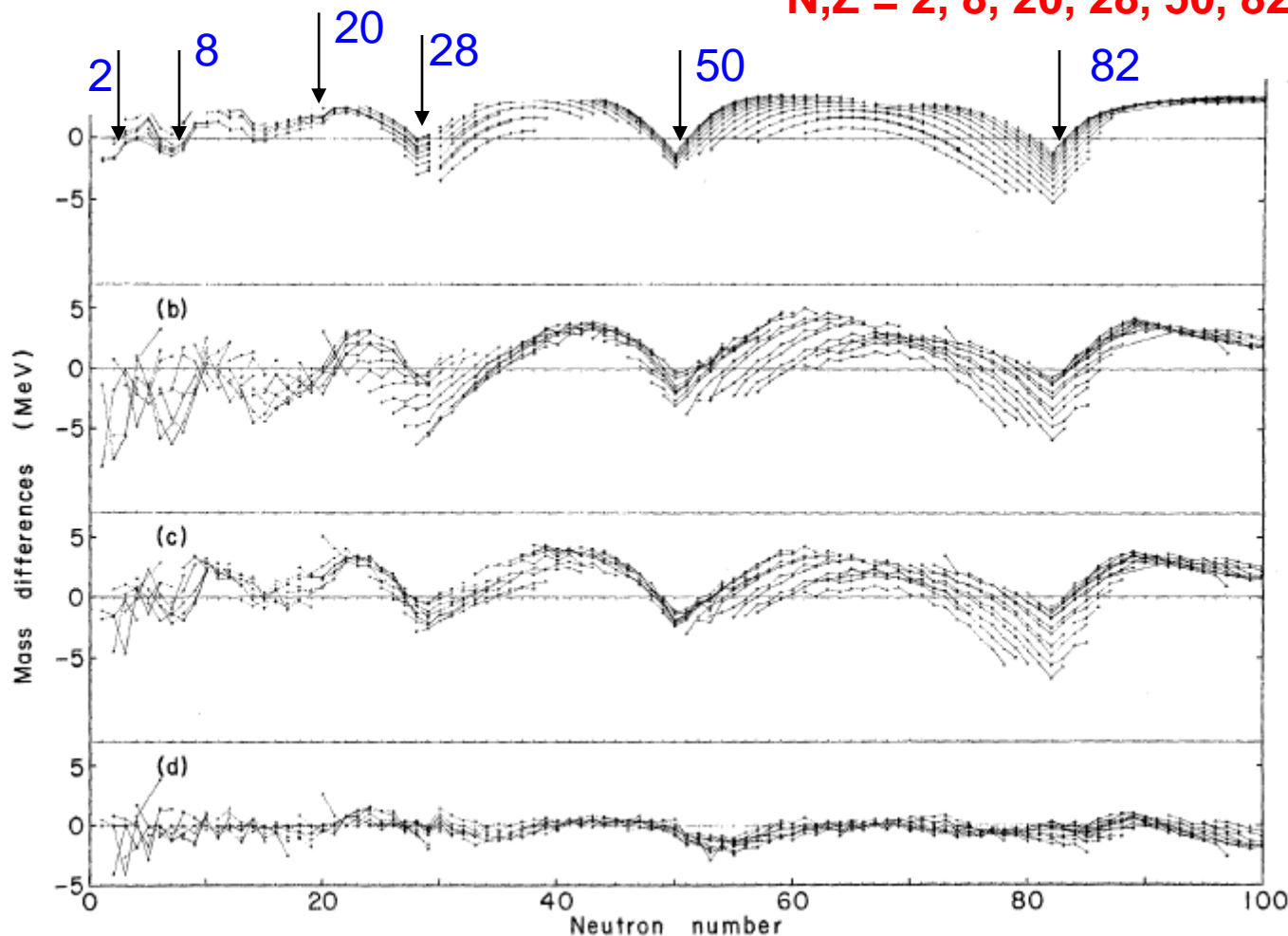
**В атома слоестата структура се формира от външно поле (Кулоновото поле на ядрото) докато за самото ядро външно поле не съществува.**

# Експериментални доказателства за съществуване на слоестата структура в атомните ядра

## Съществуват ли магически числа за ядрото?

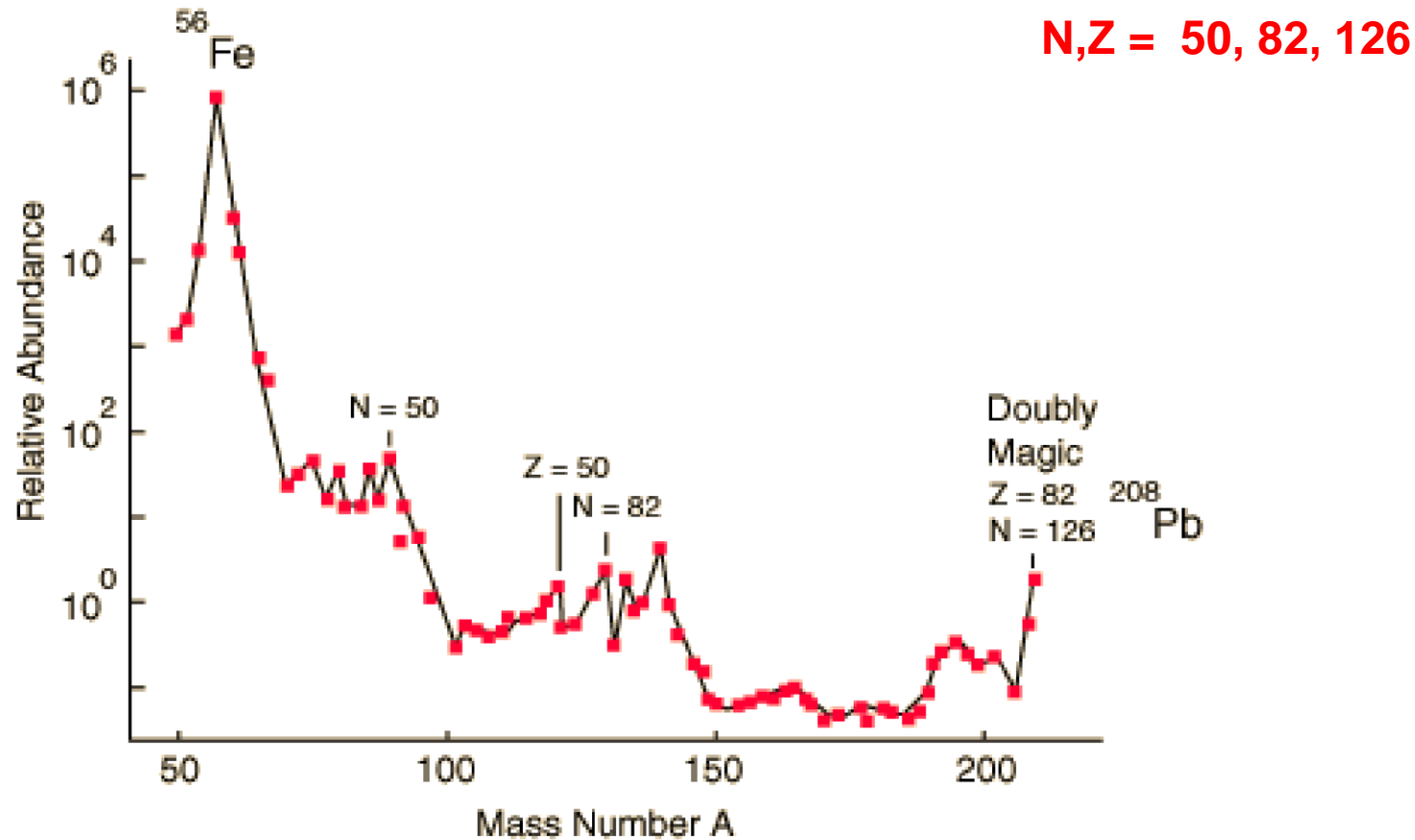
1) Течно-капковият модел не може да възпроизведе малки изменения в енергията на свързване

**$N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$**



# Експериментални доказателства за съществуване на слоестата структура в атомните ядра

## 2) Относителното разпространение на изотопите

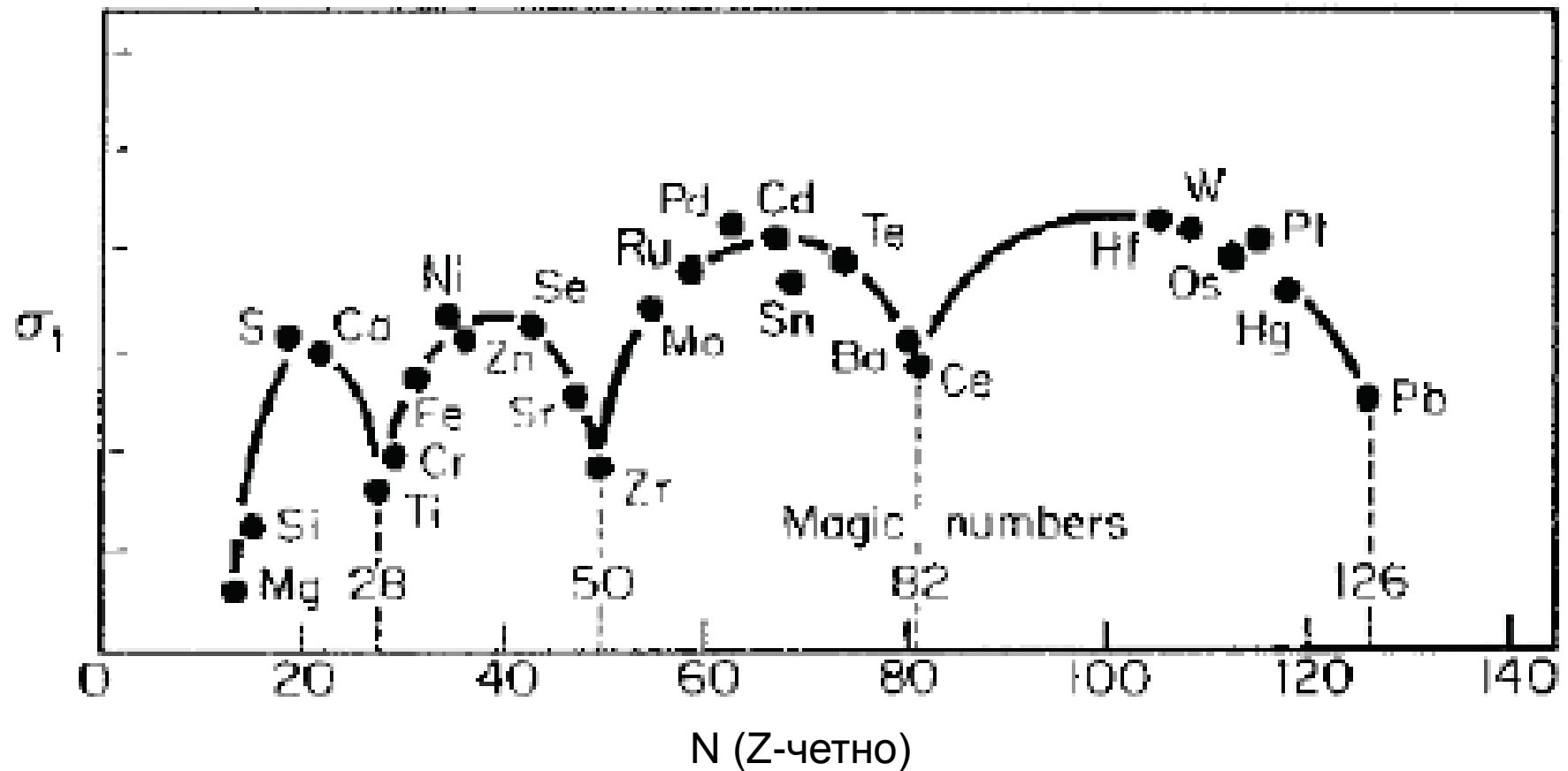




# Експериментални доказателства за съществуване на слоестата структура в атомните ядра

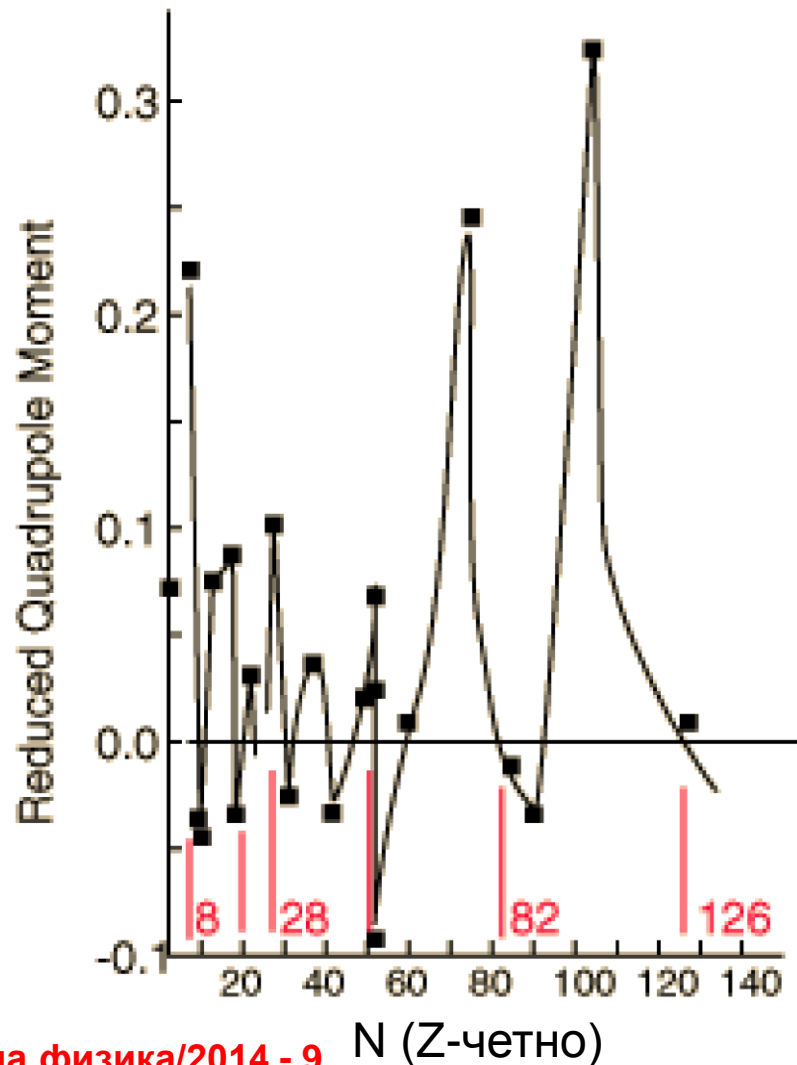
## 3) Сечение за захващане на неутрони

$$N, Z = 28, 50, 82, 126$$



# Експериментални доказателства за съществуване на слоестата структура в атомните ядра

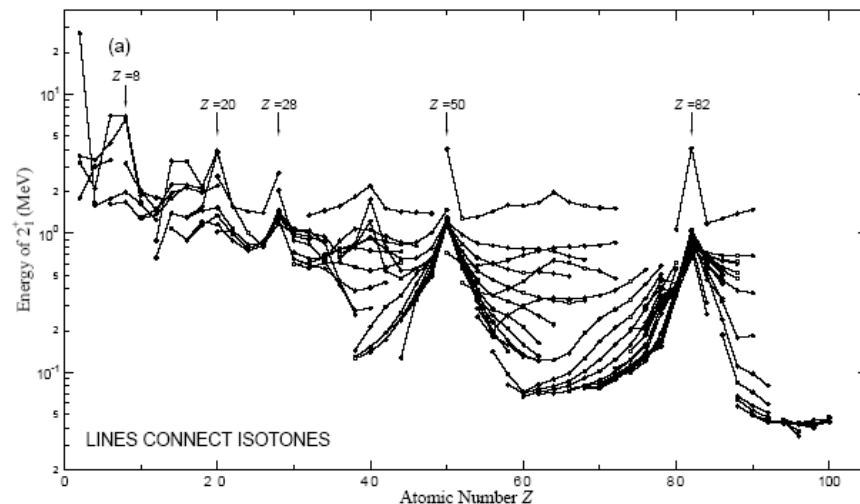
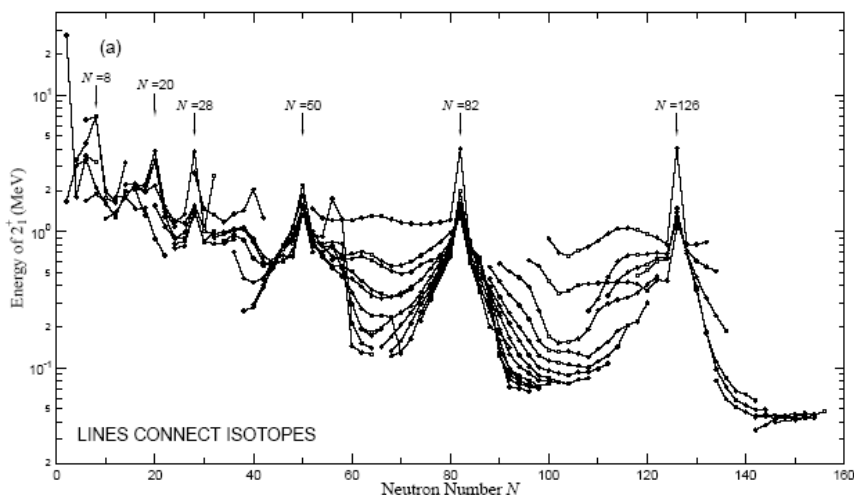
## 4) Квадруполни моменти



**N,Z = 8,20,28, 50, 82, 126**

# Експериментални доказателства за съществуване на слоестата структура в атомните ядра

## 5) Енергиите на първите възбудени $2^+$ състояния в четно-четни ядра



S. Raman et al., Atomic Data and Nuclear Data Tables **78**, (2001)1

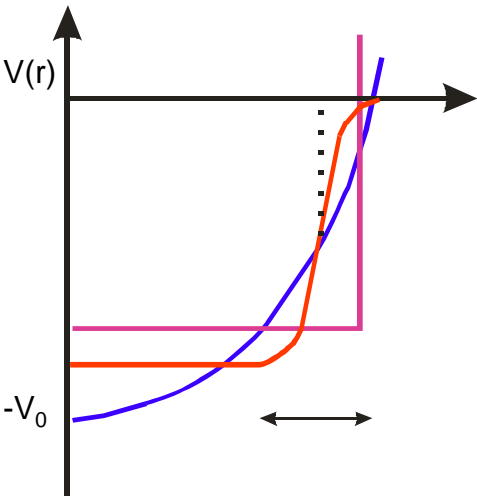
**$N, Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$**

Извод: в ядрото **съществува** слоеста структура, която се асоциира със следните магически числа **2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 (Z?)**. Разгледаните до тук експериментални факти могат да се използват и за **критерии** за слоестата структура. Всеки ядрен модел **трябва да възпроизвежда магическите числа**.

# Слоест модел (приближение на средно поле)

Потенциал на Woods-Saxon

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + \exp[(r - R_0)/a]}$$



Централен потенциал:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \right] \psi = E\psi$$

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y(\theta, \phi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \left[ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] R = ER$$

$$\left\{ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} Y = \lambda Y$$

$$l^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots (s, p, d, \dots)$$

$$l_z Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar m Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$m = -l, -l+1, \dots, l$$

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y(\theta, \phi) \chi(s)$$

$$l_z Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar m Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$m = -l, -l+1, \dots, l$$

$$\langle s^2 \rangle = \hbar^2 s(s+1)$$

$$\langle s_z \rangle = \hbar m_s \quad m_s = \pm 1/2$$

Означения:  $n l_j$

$$1s_{1/2}, 1p_{3/2}, 1p_{1/2}, 1d_{5/2}, 1d_{3/2}, 2s_{1/2}, 1f_{7/2},$$

$$1f_{5/2}, 2p_{3/2}, 2p_{1/2}, 1g_{9/2}, 2d_{5/2}$$

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

$$\langle j^2 \rangle = \hbar^2 j(j+1)$$

$$j = l + 1/2 \text{ или } l - 1/2$$

$$\langle j_z \rangle = \langle l_z + s_z \rangle = \hbar m_j$$

$$m_j = -j, -j+1, \dots, j$$

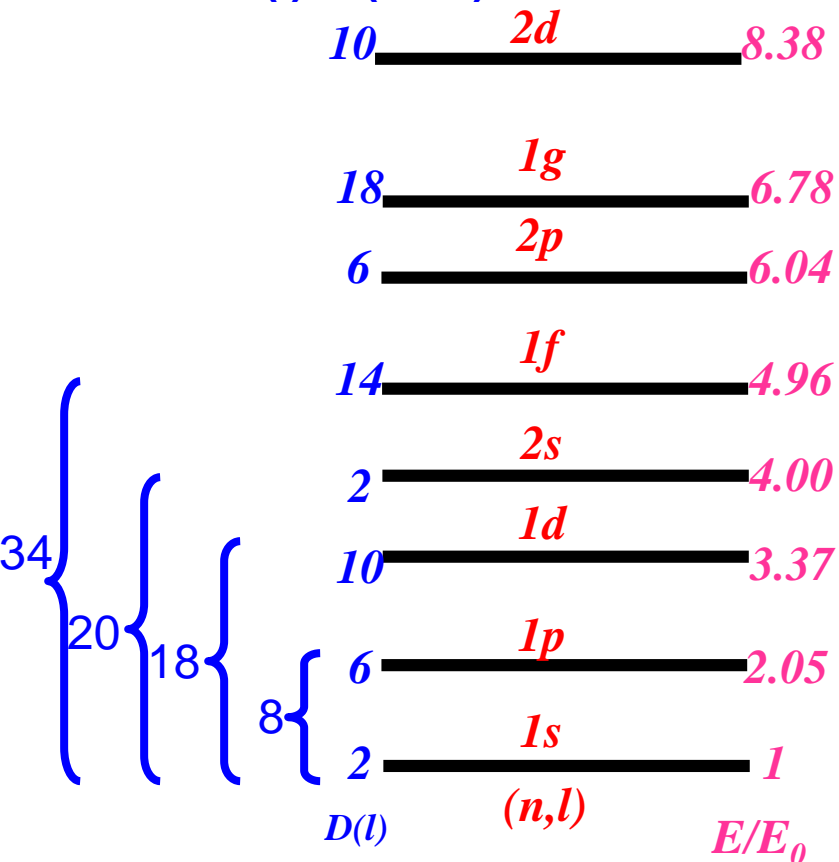
# Безкрайна потенциална яма и хармоничен сферичен осцилатор

## Яма

$$R_1 = N_1 j_1(kr)$$

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \left( \zeta_n^1 \right)^2$$

$$D(l) = 2(2l+1)$$



## Осцилатор

$$R \propto F \left( -n, 1 + \frac{3}{2}; \frac{m \omega_0}{\hbar^2} r^2 \right)$$

$$E_{nl} = \hbar \omega_0 \left( 2n + 1 + \frac{3}{2} \right) = \hbar \omega_0 \left( N + \frac{3}{2} \right)$$

$$D(N) = 2 \sum_{l=0,1}^N (2l+1) = (N+1)(N+2)$$

$$4, 11/2 \quad 3s, 2d, 1g \quad 30$$

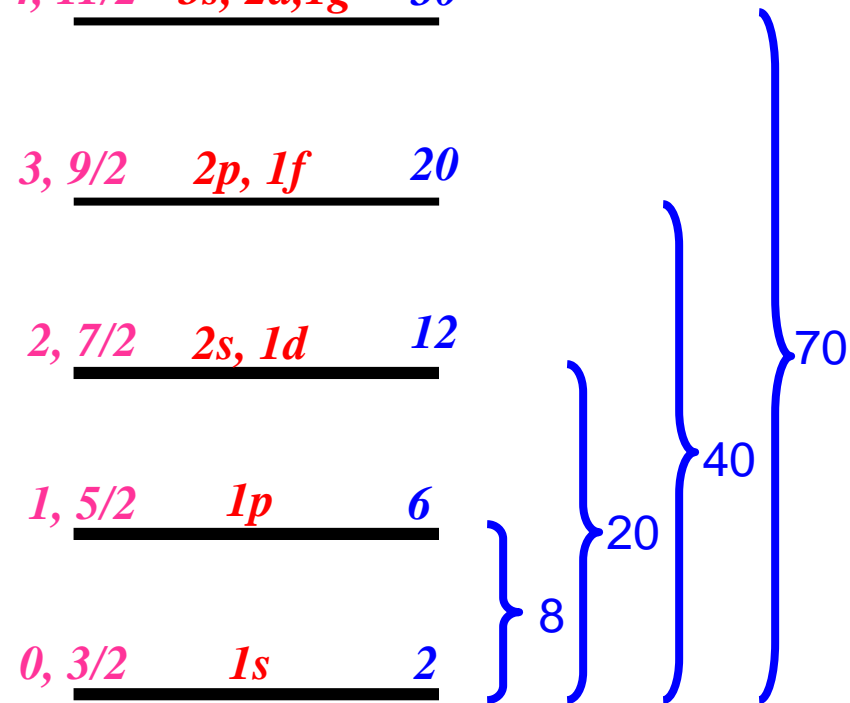
$$3, 9/2 \quad 2p, 1f \quad 20$$

$$2, 7/2 \quad 2s, 1d \quad 12$$

$$1, 5/2 \quad 1p \quad 6$$

$$0, 3/2 \quad 1s \quad 2$$

$$N, E/\hbar\omega_0 \quad (n+1, l) \quad D(N)$$



# Междинна форма – $l^2$

Цел – по-реалистична форма + известна  $l^2$  зависимост на NN взаимодействие.

Резултат – сваля допълнителното израждане по различни стойности на  $l$

$$D(l)=2(2l+1)$$

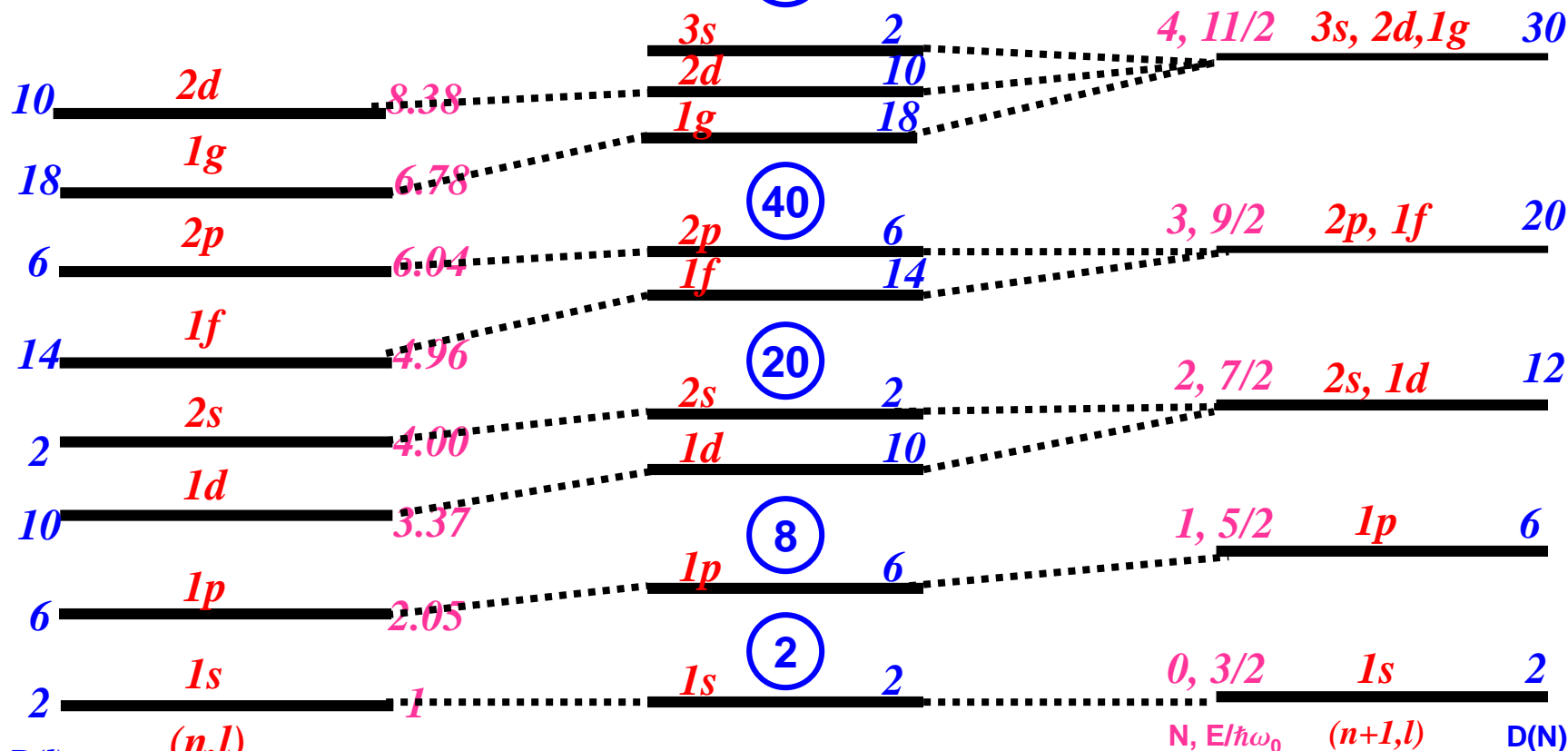
(70)

(40)

(20)

(8)

(2)



# Спин-орбитално взаимодействие



1949 - Maria Goeppert Mayer  
Haxel, Jensen, Suess  
1963 – Нобелова награда

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 - \frac{2\alpha}{\hbar^2} \vec{l} \cdot \vec{s}$$

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} [(\vec{l} + \vec{s})^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2] = \frac{1}{2} [\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2]$$

$$j = l \pm 1/2 \quad j_z = -j, -j+1, \dots, j$$

$n, l, j, j_z$  (но не и  $l_z, s_z$ )

$$|jj_z\rangle = R_{nl}(r) \sum_{l_z, s_z} \left(1 \frac{1}{2} j \mid j_z l_z s_z\right) Y_{11_z}(\theta, \phi) \chi_{\frac{1}{2} s_z}$$

$$\vec{l} \cdot \vec{s} |jj_z\rangle = \frac{1}{2} [\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2] |jj_z\rangle = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] |jj_z\rangle$$

$$j = l + s$$

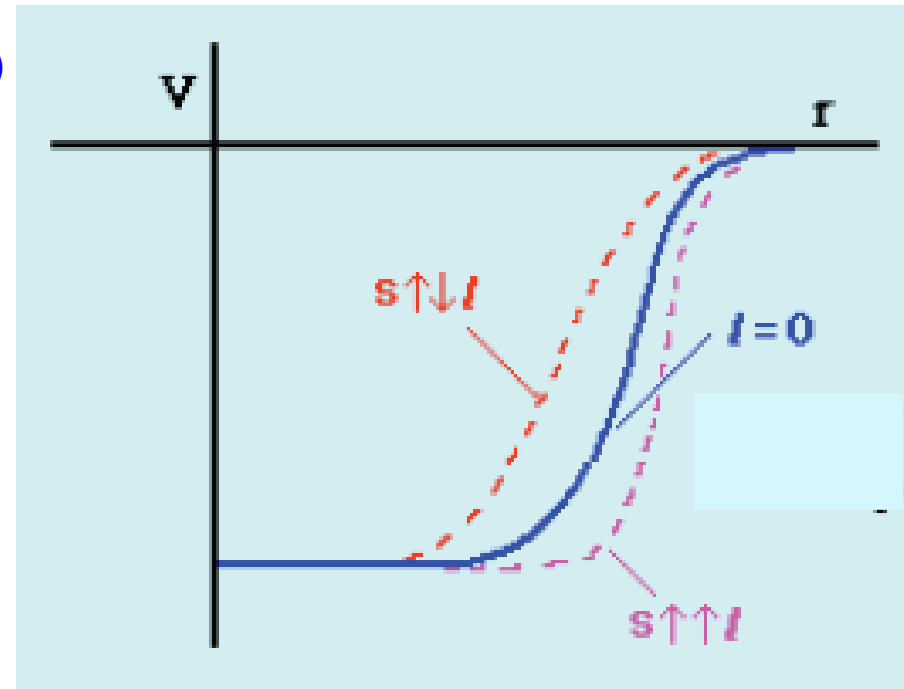
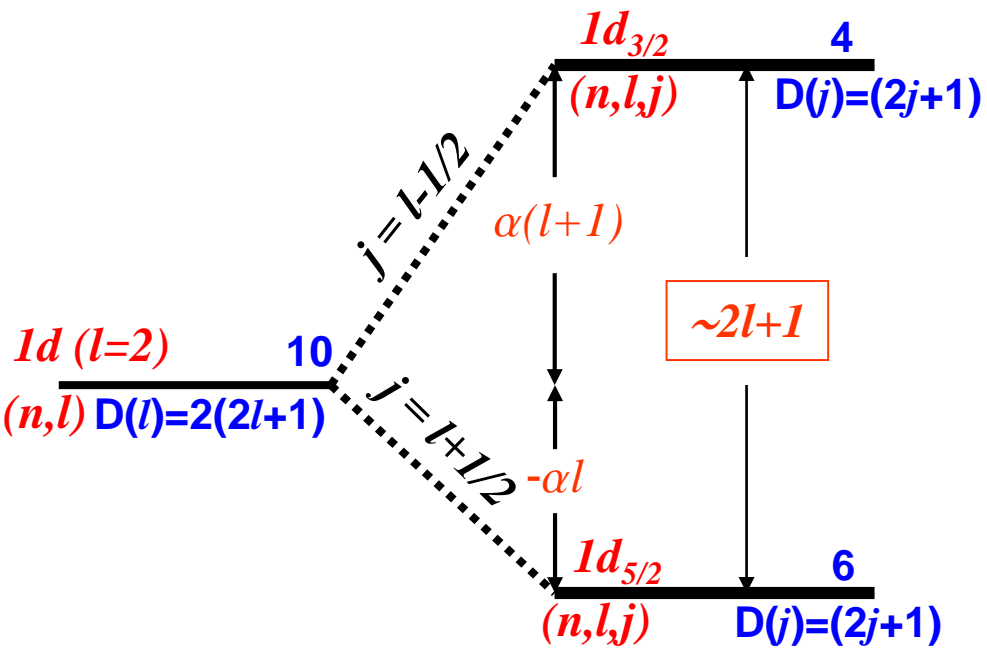
$$\vec{l} \cdot \vec{s} |jj_z\rangle = \frac{\hbar^2}{2} \left[ \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{3}{2}\right) - 1(1+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right) \right] |jj_z\rangle = \frac{\hbar^2}{2} |jj_z\rangle$$

$$j = l - s$$

$$\vec{l} \cdot \vec{s} |jj_z\rangle = \frac{\hbar^2}{2} \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) - 1(1+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right) \right] |jj_z\rangle = -\frac{\hbar^2 (1+1)}{2} |jj_z\rangle$$

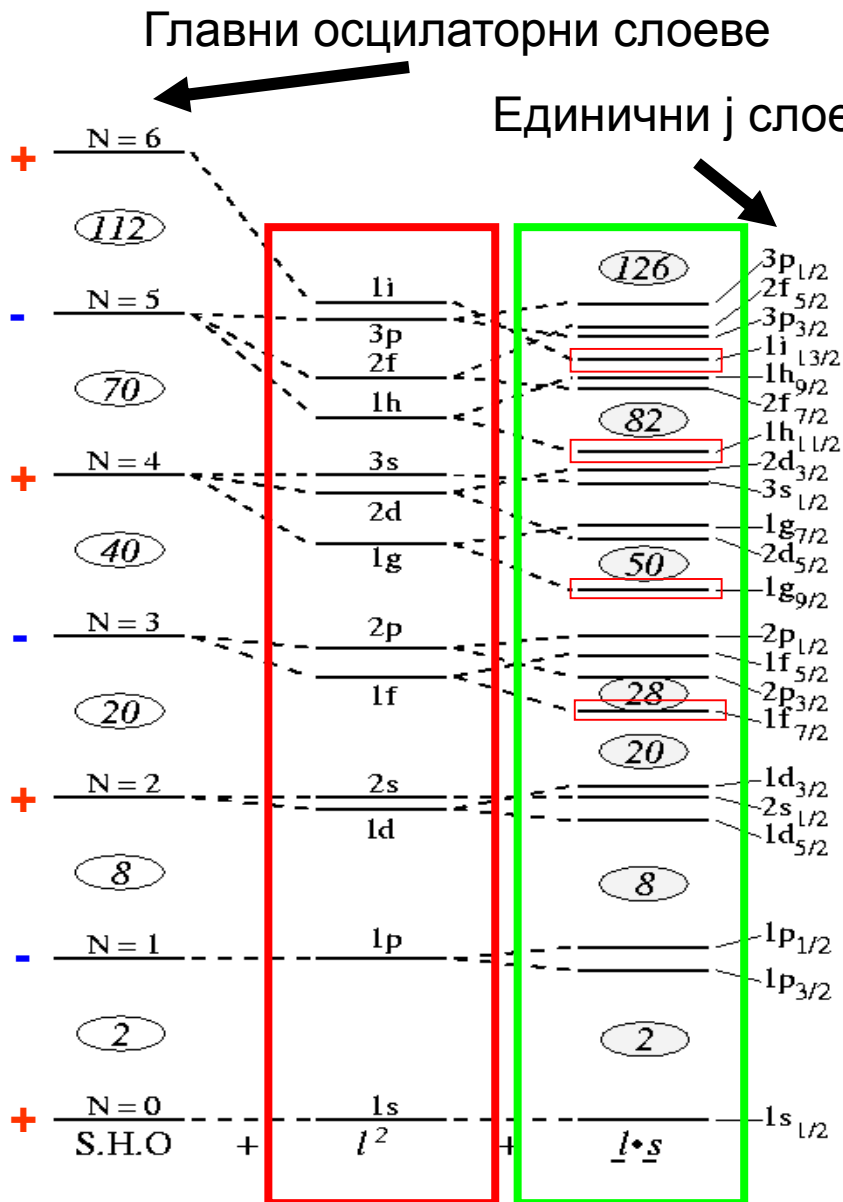
# Спин-орбитално взаимодействие

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 + \alpha \begin{pmatrix} -1 & \text{за } j = l + 1/2 \\ 1 & \text{за } j = l - 1/2 \end{pmatrix}$$





# Схема на състоянията



Четност на ядро, отговаряща на запълнен j-слой

$$\pi = \prod_{i=1}^A (-1)^{l_i} = (-1)^{\sum_{i=1}^A l_i}$$

$2j + 1$  израждане  $\rightarrow$

запълнен j слой отговаря на четен брой частици  $\rightarrow$

положителна четност

Спин на ядро, отговарящ на запълнен j-слой

$$J_z = (-j) + (-j + 1) + \dots + (j - 1) + j = 0$$

$$J = 0$$

Основното състояние на всяко ядро, което има брой нуклеони, отговарящи на запълнен главен или единичен j слой, има спин-четност

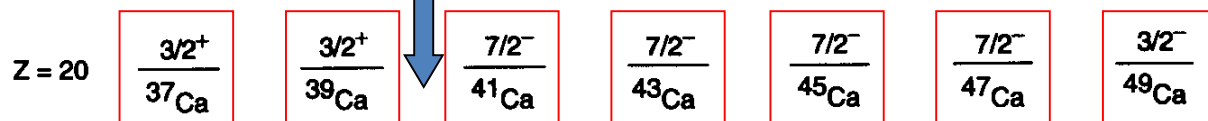
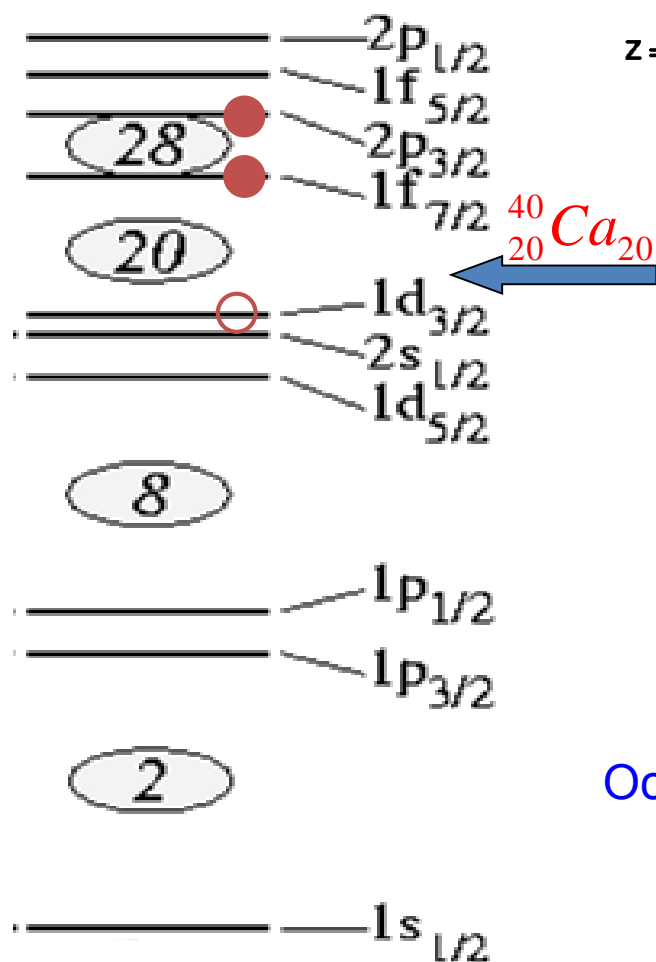
$$J^{\pi} = 0^{+}$$

# Едночастичен слоест модел

За четно-нечетни ядра: **запълнените j-слоеве** не дават принос в общия спин на ядрото  $J^\pi=0^+$   
 $\Rightarrow$  свойствата на ядрото ще се определят **от последния, нечетен нуклеон**

$$n\ell j \Rightarrow J=j \quad \pi=(-1)^\ell$$

$${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20} (J^\pi = 0^+)$$



Три-частични конфигурации

$$\underline{J} = j + j + j \quad J_{12}=0 \rightarrow J=j_3=j$$

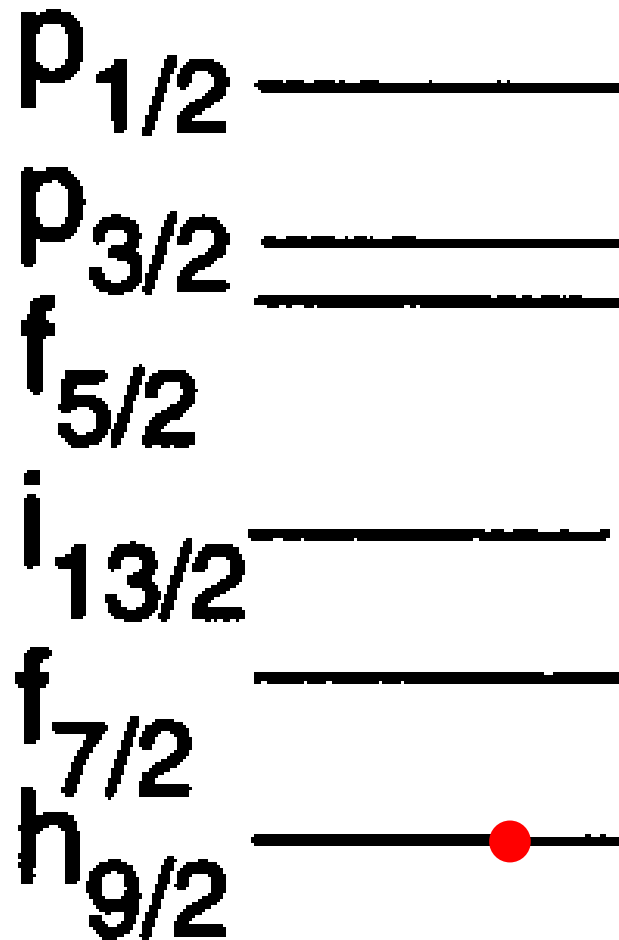
Пет-частични конфигурации

$$\underline{J} = j + j + j + j + j \quad J=j_{\text{last}}$$

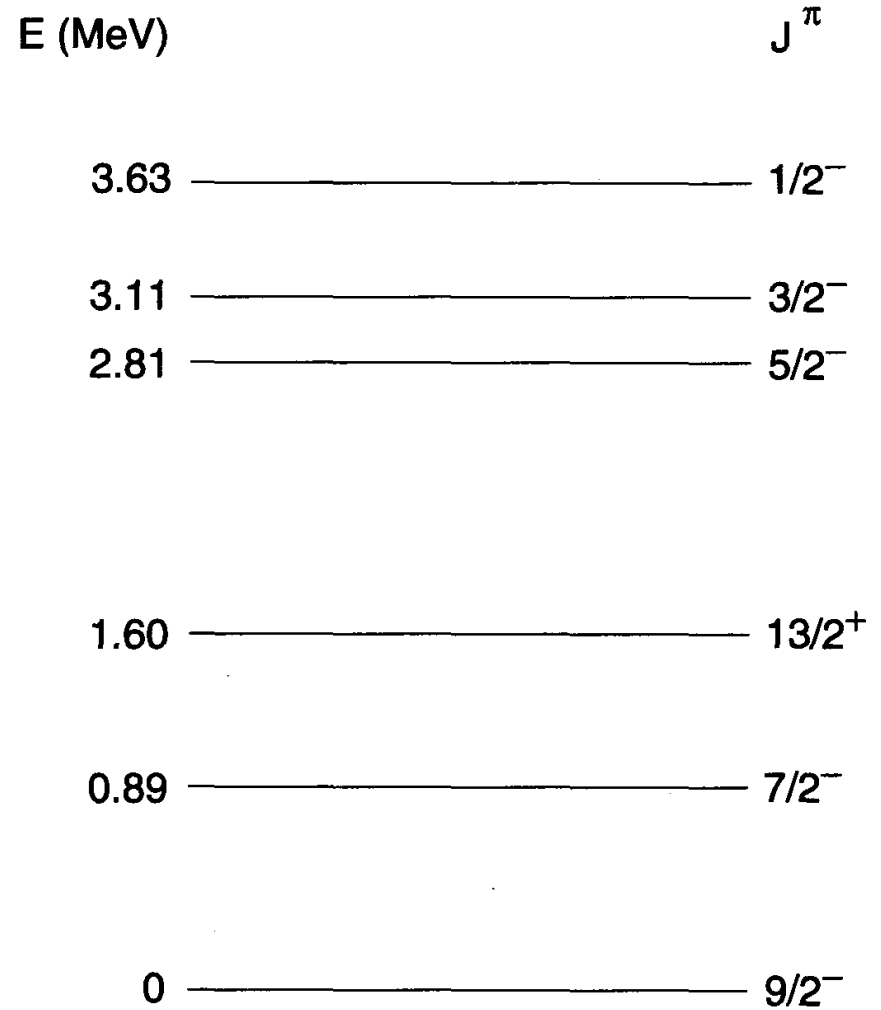
Експериментален факт

Основното състояние на всички четно-четни ядра е  $0^+$

# Възбудени състояния



$^{208}\text{Pb} + 1p$



$^{209}\text{Bi}$

# Ядрени моменти

Магнитният момент на нечетно ядро се определя от последния нуклеон в състояние  $j_z=j$

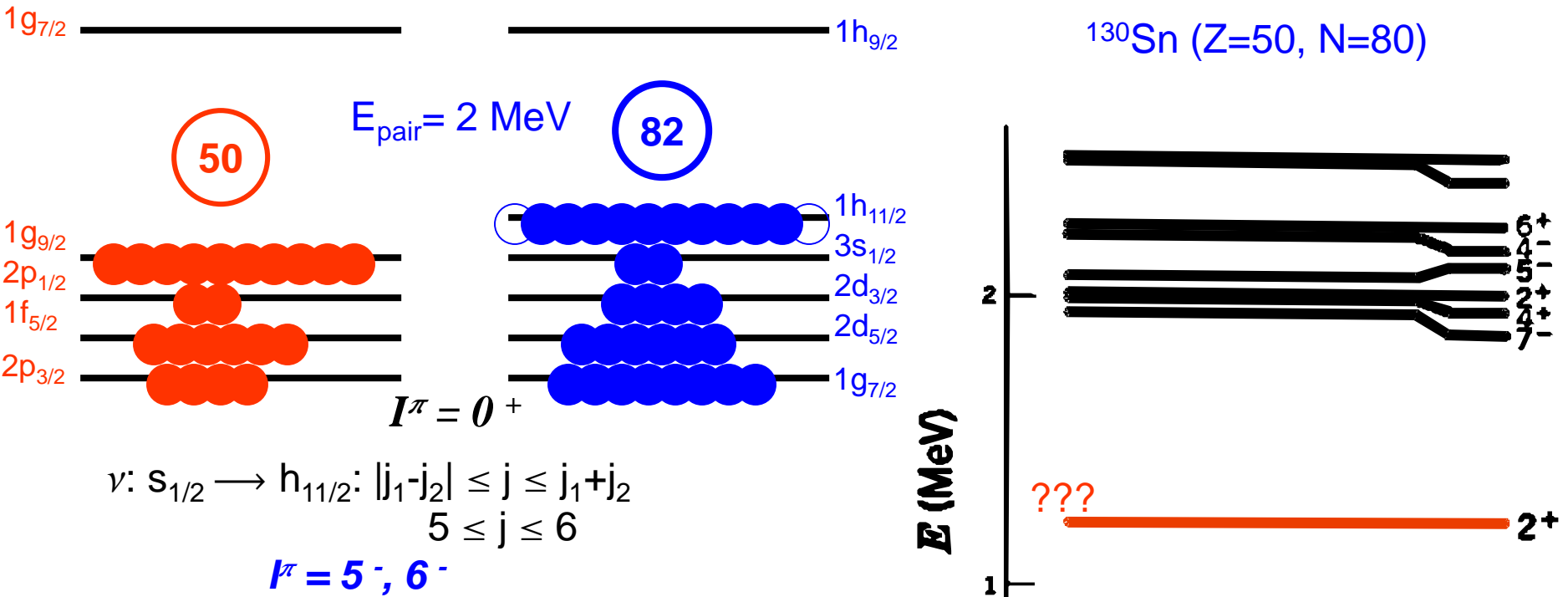
$$\mu = \langle j j_z = j | \hat{\mu}_z | j j_z = j \rangle \quad \vec{\mu} = \frac{\mu_N}{\hbar} (g_l \vec{l} + g_s \vec{s})$$

Квадруполният момент на нечетно ядро се определя от последния нуклеон в състояние  $j_z=j$

Едночастичният слоест модел е приложим главно за ядра, чиито брой нуклеони е  $\pm 1$  по отношение на магическите числа!

# Колективни възбуждания и модели

# Колективни състояния



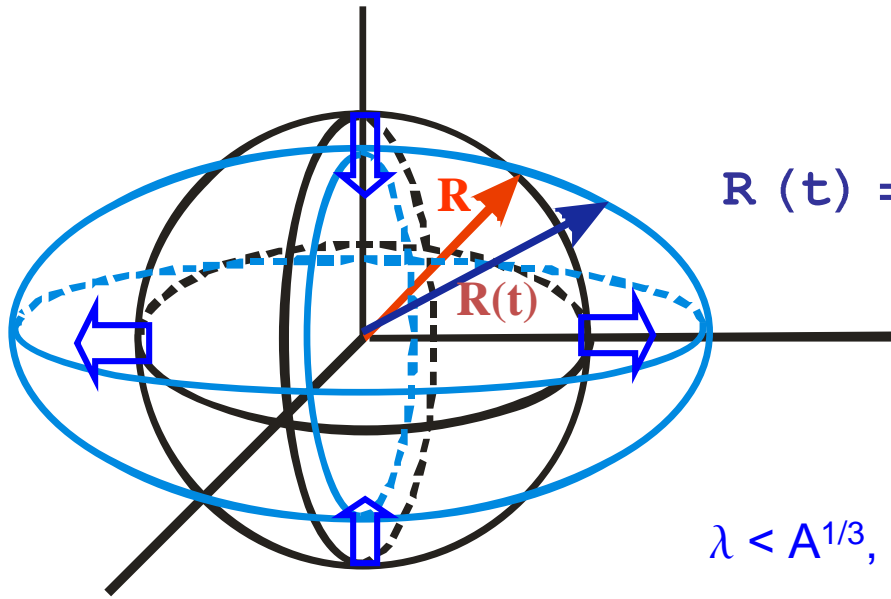
Колективните състояния възникват в резултат на смесване на множество нива под въздействие на остатъчното взаимодействие  $\rightarrow$  загуба на едночастичния характер, т.е. ядрото се държи като квантов флуид!

Експериментален факт – първото възбудено състояние в повечето от четно-четните ядра е  $2^+$

$^{130}_{50}\text{Sn}_{80}$

Синфазно възбуждане на група (или всички) нуклеони

# Ядрени вибрации в сферични ядра



$$R_0 = 1.2 A^{1/3}$$

$$R(t) = R_0 \left[ 1 + \sum_{\lambda > 1} \sum_{\mu = -\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right]$$

$\alpha_{00}$  – описва дихателни движения

$\alpha_{1\mu}$  – описва трансляция на ядрото

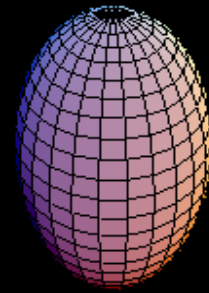
$\lambda < A^{1/3}$ , но съществени са само  $\lambda=2, 3, (4)$



$Y_{20}$  -  $\beta$  вибрации



$Y_{22}$  -  $\gamma$  вибрации



$Y_{33}$  – октуполни

# Ядрена деформация

Наблюдение: ядрата, за които **N** и **Z** са между магическите числа имат големи квадруполни моменти

Големи, стационарни отклонения от сферична форма → статична деформация

$$R = R_0 \left[ 1 + \sum_{\mu} \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}(\theta, \phi) \right] \quad \{\alpha_{2\mu}\} \rightarrow \{\beta, \gamma, \underbrace{\theta_1, \theta_2, \theta_3}_{\text{Ъгли на Ойлер}}\}$$

Ъгли на Ойлер

Вътрешна координатна система

избрана по главните оси на ядрото

$$\alpha_{21} = \alpha_{2-1} = 0$$

$$\alpha_{20} = \beta \cos(\gamma)$$

$$\alpha_{22} = \alpha_{2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin(\gamma)$$

$\{\beta, \gamma\}$  – параметри на Hill-Wheeler

$$\begin{aligned} \delta R_{x=1} &= R\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - R_0 = R_0 \left( \beta \cos(\gamma) Y_{20}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) + \frac{2}{\sqrt{2}} \beta \sin(\gamma) Y_{20}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \right) = \\ &= R_0 \left( -\sqrt{\frac{5}{16\pi}} \beta \cos(\gamma) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \beta \sin(\gamma) \right) = R_0 \left( \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\gamma) - \sqrt{\frac{1}{4}} \cos(\gamma) \right) \right) = \\ &= R_0 \left( \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \sin(\gamma) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cos(\gamma) \right) \right) = \\ &= R_0 \left( \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right) \end{aligned}$$



# Ядрена деформация

$$\delta R_{x=1} = R \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right) - R_0 = R_0 \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cos \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\delta R_{y=2} = R \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) - R_0 = R_0 \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cos \left( \gamma + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\delta R_{z=3} = R \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right) - R_0 = R_0 \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cos (\gamma)$$

$$\beta = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{\Delta R}{R_0}$$

$\Delta R$  – ексцентрицитет на елипсата

## Prolate деформация

$$\beta > 0, \gamma = 0$$

$$R_1 = R_2 < R_0$$

$$R_3 > R_{1,2}, R_3 > R_0$$

## Oblate деформация

$$\beta < 0, \gamma = 0$$

$$R_1 = R_2 > R_0$$

$$R_3 < R_{1,2}, R_3 < R_0$$

Аксиално симетрични форми



PROLATE

СФЕРИЧНО



OBLATE

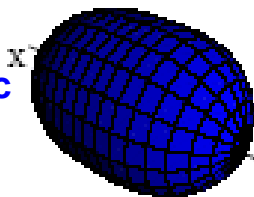
# Триосеви форми

$$\delta R_i / \left( R_0 \beta \sqrt{5 / 4 \pi} \right)$$

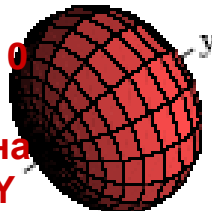
$$\beta = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{\Delta R}{R_0}$$

	$\gamma$			
	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$180^\circ$
$\partial R_x$	-1/2	0	+1/2	+1/2
$\partial R_y$	-1/2	-0.866	-1	+1/2
$\partial R_z$	1	+0.866	+1/2	-1

$\gamma = 120^\circ, \beta > 0$  –  
prolate форма, ос  
на симетрия X



$\gamma = 60^\circ, \beta < 0$  –  
oblate  
форма, ос на  
симетрия Y

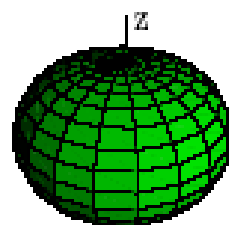


Лундска конвенция

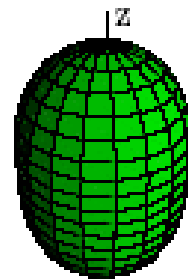
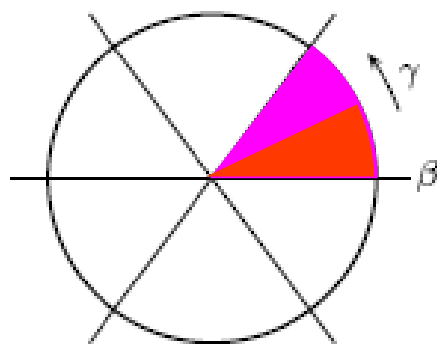
$\beta > 0$ ,

$0^\circ (\text{prolate}) \leq \gamma \leq 60^\circ (\text{oblate})$

$\gamma = 30^\circ$  - максимална  
триахиалност



$\gamma = 180^\circ, \beta < 0$  –  
oblate форма, ос  
на симетрия Z



$\gamma = 0^\circ, \beta > 0$  –  
prolate  
форма, ос  
на симетрия  
Z

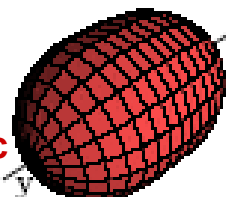
Алтернативна конвенция

$0^\circ (\text{ах. сим}) \leq \gamma \leq 30^\circ (\text{триах.})$

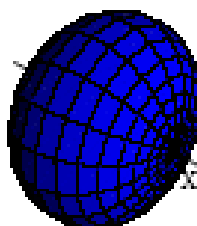
$\beta > 0$  - prolate

$\beta < 0$  - oblate

$\gamma = -120^\circ, \beta > 0$  –  
prolate форма, ос  
на симетрия Y

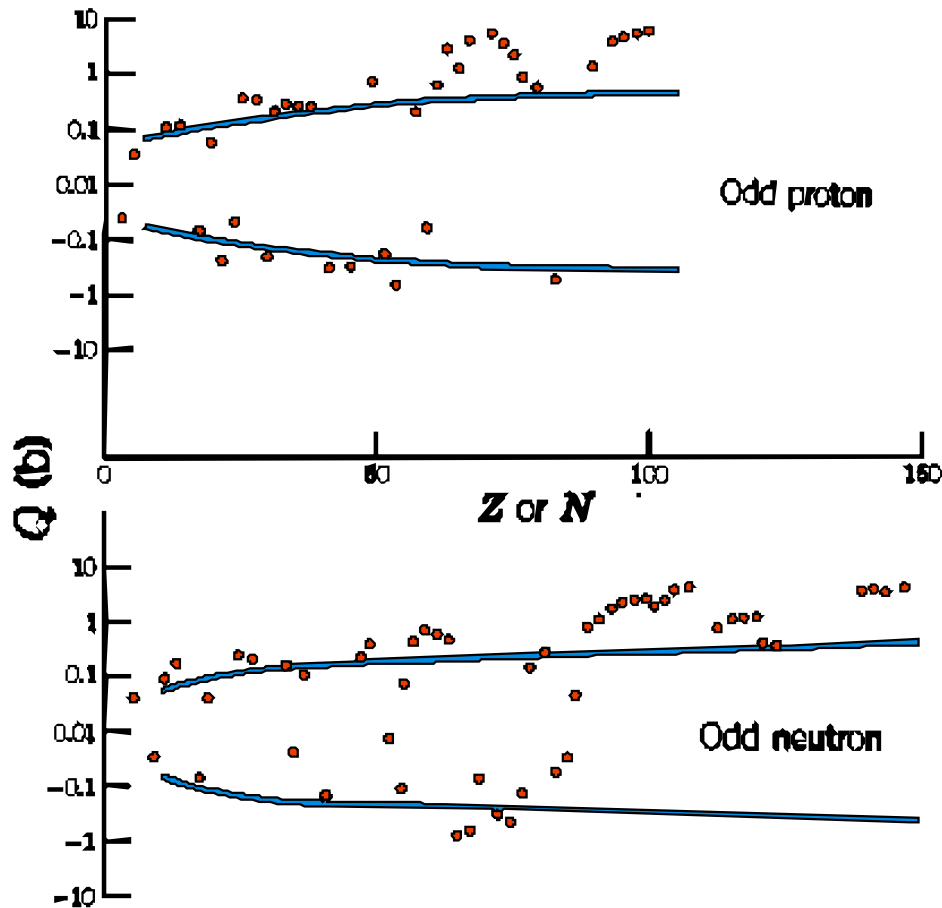


$\gamma = -60^\circ, \beta < 0$  –  
oblate  
форма, ос на  
симетрия X



# Квадруполни моменти

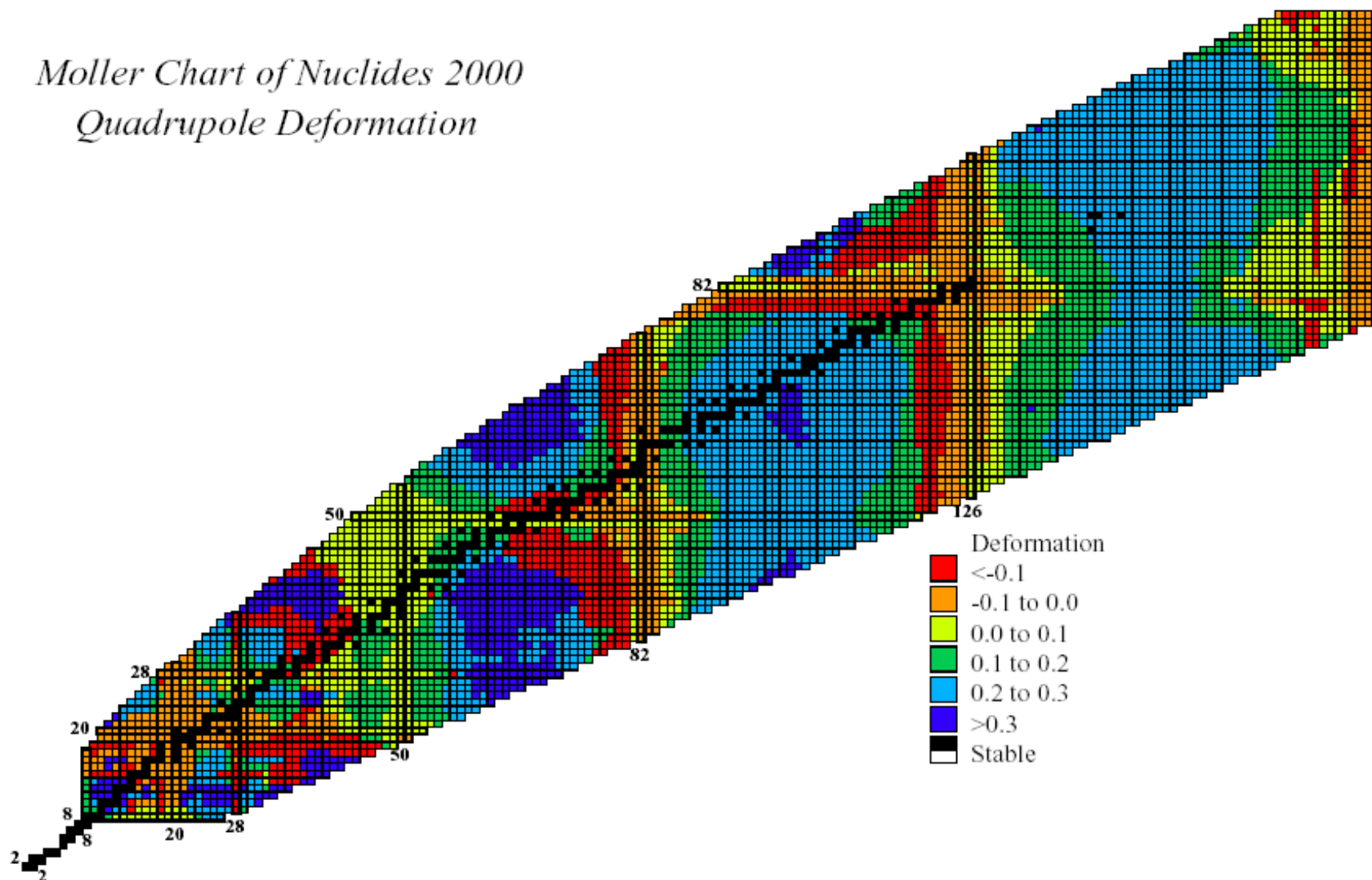
$$Q_0 = \frac{3}{\sqrt{5} \pi} R_0^2 Z \beta (1 + 0.16 \beta)$$



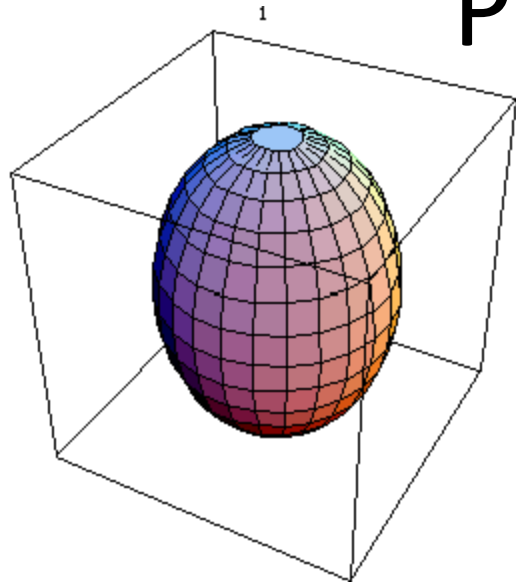
$Q_0 < 0$  – oblate     $Q_0 > 0$  – prolate

# Области на деформирани ядра

*Moller Chart of Nuclides 2000*  
*Quadrupole Deformation*



# Ротационен спектър



$$R_{4/2} = 3.276$$

$$\hat{H} = \hat{T}_{\text{rot}}$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \mathcal{I} \omega^2$$

$$\vec{l} = \mathcal{I} \vec{\omega}$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2 \mathcal{I}} l^2$$

$$\vec{l} \rightarrow \hbar \vec{I}$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2 \mathcal{I}} \hat{I}^2$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2 \mathcal{I}} I(I+1)$$

Четно-четно ядро  $\rightarrow$  основното състояние е  $0^+$

$I = 0^+, 2^+, 4^+, \dots$  – ротационна ивица

$$E(0^+) = 0$$

$$E(2^+) = 91.4 \text{ keV} = 6(\hbar^2/2\mathcal{I}) \quad (\hbar^2/2\mathcal{I}) = 15.2 \text{ keV}$$

$$E(4^+) = 299.4 \text{ KeV} \quad E(4^+) = 20(\hbar^2/2\mathcal{I}) = 305 \text{ KeV}$$

$$E(6^+) = 614.4 \text{ KeV} \quad E(6^+) = 42(\hbar^2/2\mathcal{I}) = 640 \text{ KeV}$$

$$E(8^+) = 1024.6 \text{ KeV} \quad E(8^+) = 72(\hbar^2/2\mathcal{I}) = 1097 \text{ KeV}$$

$$\mathcal{I}_{\text{rigid}} = \frac{2}{5} MR_0^2 (1 + 0.31 \beta) \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2 \mathcal{I}} \approx 6 \text{ keV}$$

$$\mathcal{I}_{\text{fluid}} = \frac{9}{8 \pi} MR_0^2 \beta \quad \mathcal{I} \sim A^{5/3} \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2 \mathcal{I}} \approx 90 \text{ keV}$$

$$R_{4/2} = E_{4^+} / E_{2^+} = 20 / 6 = 3.33 (3)$$

$$12^+ \text{ } ^{164}\text{Er} \text{ } 2082.7$$

$$10^+ \text{ } 1518.1$$

$$8^+ \text{ } 1024.6$$

$$6^+ \text{ } 614.4$$

$$4^+ \text{ } 299.5$$

$$2^+ \text{ } 91.4$$

$$0^+ \text{ } 0$$

# Адиабатично приближение

$$E_{\text{kin-sp}} \approx 20 \text{ MeV} \quad t_{\text{sp}} = \frac{2R}{\sqrt{2 E_{\text{kin-sp}} / m}} = \frac{10 \text{ fm}}{c \sqrt{40 \text{ MeV} / 938 \text{ MeV}}} = \frac{10 \text{ fm}}{c 0.2} \approx 10^{-22} \text{ s}$$

$$E_{\text{vib}} \approx 1 \text{ MeV} \quad t_{\text{vib}} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\hbar}{E_{\text{vib}}} = \frac{2\pi\hbar c}{c E_{\text{vib}}} = \frac{2\pi 197 (\text{MeV fm})}{c 1 (\text{MeV})} \approx 10^{-21} \text{ s}$$

$$E_{\text{rot}} \approx 100 \text{ keV} \quad t_{\text{rot}} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{E_{\text{rot}} / \mathcal{I}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{E_{\text{rot}} / (\hbar^2 / 20 (\text{keV}))}} =$$

$$= \frac{2\pi\hbar}{45 (\text{keV})} = \frac{2\pi 197 (\text{MeV fm})}{c 45 (\text{keV})} \approx 10^{-20} \text{ s}$$

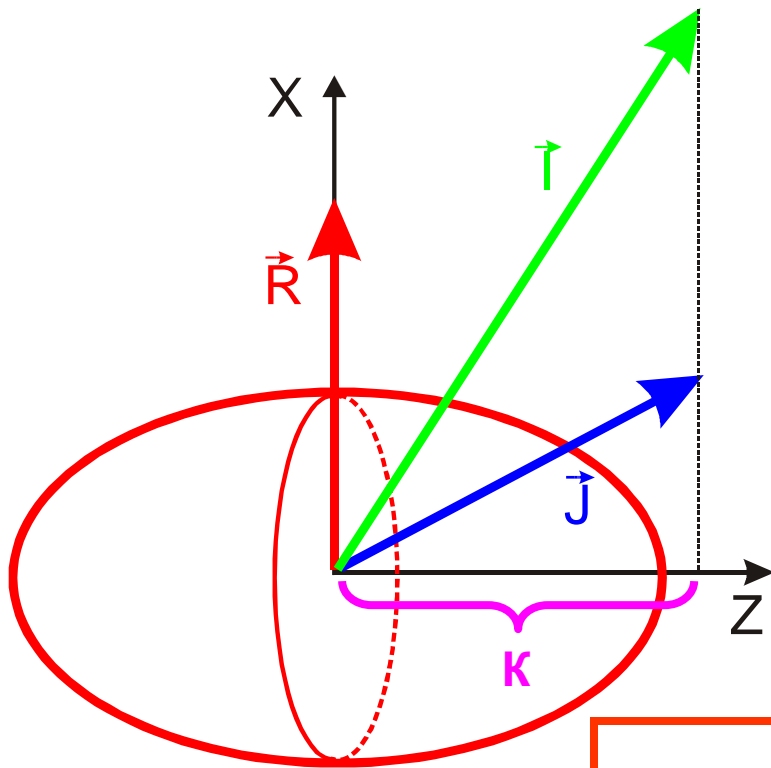
$$t_{\text{sp}} < t_{\text{vib}} < t_{\text{rot}}$$

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{sp}} + \hat{H}_{\text{vib}} + \hat{H}_{\text{rot}} + \hat{H}_{\text{int}}$$

Едночастично възбуждане + ротация  
Вибрационно възбуждане + ротация

# Ротации и вибрации на деформирани ядра

Ротацията се **развива върху** вибрационно състояние (ядрото вибрира около **равновесната си деформирана форма**). Вибрационния фонон се разглежда като **допълнителна частица**, която дава **константен принос** в енергията и ъгловите моменти на нивата от ротационната ивица.



$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \text{ (} = \mathbf{E}_{\text{vib}} \text{)} + \mathbf{E}_{\text{rot}} \text{ (I)}$$

$\mathbf{E}_0$  - енергия на вътрешното възбуждане

$\vec{J}$  ( $j$ ) - ъглов момент на вътрешното възбуждане

$$\mathbf{E}_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2 \mathcal{I}} \hat{\mathbf{R}}^2$$

$$\vec{\mathbf{I}} = \vec{\mathbf{R}} + \vec{\mathbf{J}} \quad \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{I}} - \vec{\mathbf{J}}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{int}} (n\hbar\omega) + \frac{\hbar^2}{2 \mathcal{I}} [\mathbf{I} (\mathbf{I} + 1) - \mathbf{K} (\mathbf{K} + 1)]$$

# $\beta$ - и $\gamma$ -ивици в деформирани ядра

$$\lambda = 2 \Rightarrow I = 2 (K = 0, 2)$$

$K=2$

$$I = K, K+1, K+2, \dots \Rightarrow \Delta I = 1$$

Глава на ивицата

$$I_0 = 2, E_0 = E(I_0) = E_\gamma \approx 1 \text{ MeV}$$

$$E = E_0 + \frac{\hbar^2}{2 \mathcal{I}_\gamma} [I(I+1) - 6]$$

$$I = 2, 3, 4, \dots$$

$K=0$

$$I = 0, 2, 4, \dots \Rightarrow \Delta I = 2$$

Глава на ивицата

$$I_0 = 0, E_0 = E(I_0) = E_\beta \gtrsim 1 \text{ MeV}$$

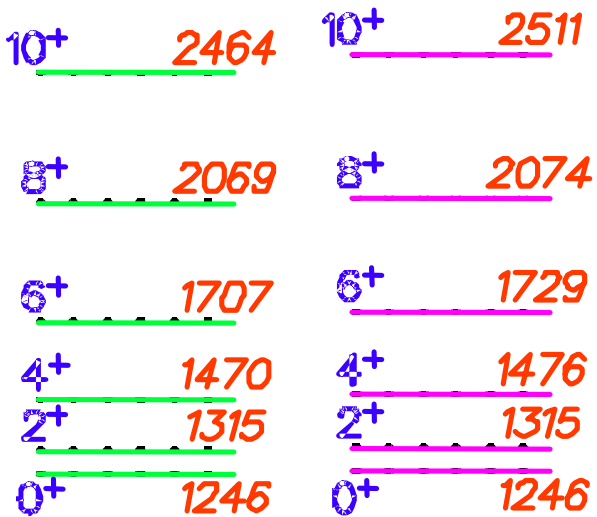
$$E = E_0 + \frac{\hbar^2}{2 \mathcal{I}_\beta} I(I+1)$$

$$I = 0, 2, 4, \dots$$



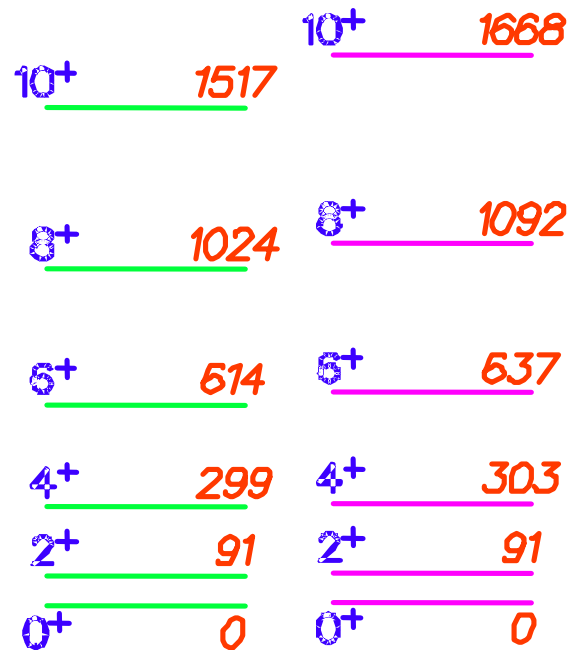
# $\beta$ - и $\gamma$ -ивизи в деформирани ядра

Пример –  $^{164}\text{Er}$  ( $Z=68$ ,  $N=96$ )



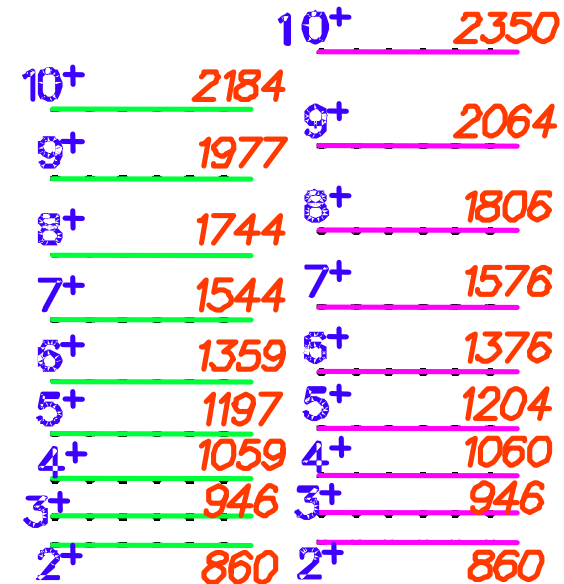
$\beta$  ивица

$$\tau_{\beta} = 43 \hbar^2 / \text{MeV}$$



GS ивица

$$\tau_{\text{GS}} = 33 \hbar^2 / \text{MeV}$$



$\gamma$  ивица

$$\tau_{\gamma} = 35 \hbar^2 / \text{MeV}$$

# $\beta$ - и $\gamma$ -ивници в деформирани ядра

