РАДИУСИ НА ЯДРАТА

1. Увод

Радиусите на ядрата не са точно дефинирани величини: ядрета не са твърди сфери с резки граници.

Радиусите на атомите и ядрата се определят „операционно” - радиусът се явява параметър в теоретичен израз, който се сравнява с експериментални данни. Той *ще зависи от приетия модел* (опростяващи предположения!).

Пример: радиус на атом, дефиниран като най-големият среден радиус на възбудените електронни състояния или като средното разстояние между атомите в йонните съединения на атома.

Ядрената плътност и ядреният потенциал са с проста пространствена зависимост – те са приблизително постоянни до определено късо разстояние, извън което те почти изведнаж рязко спадат до нула.

Формата на ядрата може да се характеризира с два параметъра:

* *среден радиус*
* *дифузна дебелина*

За ядра, които нямат сферична форма, се въвеждат допълнителни параметри като деформация или отклонение от аксиалността.

Определяният радиус на ядрото ще зависи от вида на експеримента.

* електромагнитното взаимодействие, ще получаваме *разпределението на зарядите в ядрото*: разсейване на електрони с висока енергия от ядра, мюонни рентгенови спектри, разлика в енергиите на огледални ядра.
* Ако експериментът се основава на силното ядрено взаимодействие резултатът ще се получава *разпределението на ядрената материя* (опити по разсейване на бързи неутрони, пионни рентгенови лъчи или ръдърфордовото разсейване.

Опитите на Ръдърфорд (1905 г.) дават $R \sim 10^{-14}$ m

2. Разпределение на ядрения заряд

Два метода с исторически интерес:

* метод на огледалните ядра, използван за определяне на радиусите на ядрата през 30-те и 40-те години
* методът на мезорентгеновите спектри, разработен по-късно, когато има ускорители със снопове от мюони

Метод на огледалните ядра - основава се на пряко измерване на разликата в кулоновата енергия на две ядра. При леки β^+-радиоактивни ядра протон от матерното ядро се превръща в неутрон на дъщерното и разликата в масите на двете ядра ще се дължи само на разликата в кулоновата енергия при намаляване на протоните от Z на $Z-1$ (защото ядрените сили са зарядово независими). Превръщането на протон в неутрон ще се промени само кулоновата енергия на отблъскване.

Защо се избират *огледални* ядра? В тежки ядра при бета-разпада не се получава огледално ядро – напр. при ${}^{228}_{92}\mathrm{U}_{136}$ 92-тия протон се превръща в 137 неутрон и “орбитата” на 92 протон няма да е същата като тази на 137 неутрон. Разликата в масите на двете ядра ще се дължи преди всичко на разликата в нивата. *Огледални* ядра се наричат тези, при които броят на неутроните на едното ядро е равен на броя на протоните на другото. Такива могат да бъдат само леки ядра и те са частен случай на изобарни ядра, напр. ${}^{11}_{6}\mathrm{C}_5$ и ${}^{11}_{5}\mathrm{B}_6$.

Енергията на свързване на едно ядро е

$$B = a_{\text{об}} A - a_{\text{пов}} A^{2/3} - a_{\text{кул}} Z^2 / A^{1/3} - a_{\text{сим}} (N - Z)^2 / A + \delta(Z, N)$$

и разликата в енергиите на свързване на две огледални ядра ще се дължи само на промяната в кулоновия член при намаляване на Z с единица при β^+-разпадането. От дефиницията за огледални ядра $N = Z - 1$ и като знаем, че $N = A - Z$

$$A = 2Z - 1$$

В енергията на свързване има два члена, зависещи от Z - кулоновото отблъскване и енергията на симетрия. Разликата от енергията на симетрия за две огледални ядра е нула, тъй като $A = 2Z - 1$:

$$a_{\text{сим}} A^{-1}\{(A - 2Z)^2 - [A - 2(Z - 1)]^2\} =$$
$$= a_{\text{сим}} A^{-1}[(2Z - 1 - 2Z)^2 - (2Z - 1 - 2Z + 2)^2] = 0$$

Разликата в енергията на свързване ще идва само от разликата в кулоновия член

$$\Delta B = B(A, Z - 1) - B(A, Z) =$$

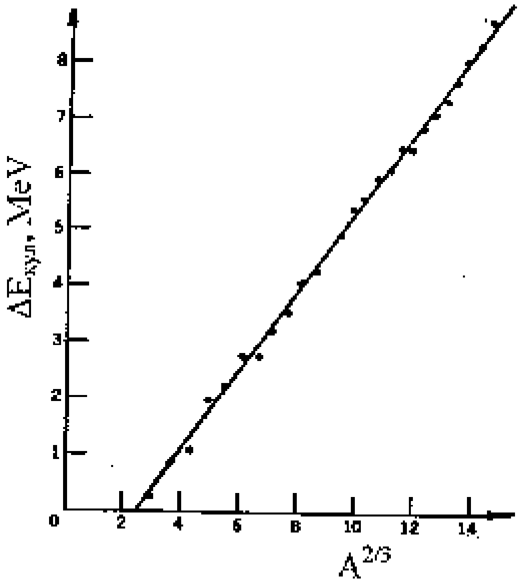
$$= \frac{3}{5} \frac{k_0 e^2}{r_0 A^{1/3}} \left[Z^2 - (Z - 1)^2 \right] = \frac{3}{5} \frac{k_0 e^2}{r_0} A^{2/3}$$

Разликата в кулоновата енергия може да се определи чрез измерване енергията на β^+-разпадането $Q_{\beta+}$ - определя се експериментално от максималната енергия на позитроните $T_{\beta+}^{\max}$.

$$T_{\beta+}^{\max} = Q_{\beta+} = c^2 \left[M(Z, A) - M(Z - 1, A) - m_0 \right] =$$

$$= c^2 \left[-(m_{\text{n}} - m_{\text{p}}) - m_0 \right] + \Delta B = \Delta B - 3{,}5 m_0$$

$$T_{b+}^{\max} = \Delta B - 3{,}5 m_0 = \frac{3}{5} \frac{k_0 e^2}{r_0} A^{2/3} - 1{,}8 \ \text{MeV}$$



Друг начин за измерване разликата в енергиите на свързване на огледални ядра е чрез ядрени реакции.

Например, ако ядрото ${}^{11}_{5}B_6$ се бомбардира с протони, се получава ядрото ${}^{11}_{6}C_5$ и се излъчва неутрон. Минималната енергия на протона, при която започва реакцията е равна на масовата разлика между ${}^{11}_{5}B_6$ и ${}^{11}_{6}C_5$.

„Мезорентгенови" спектри (нива на мюонни атоми)

Мюон - частица, идентична с електрона по своето поведение и характеристики, но с маса 207 пъти по-голяма от тази на електрона.
Мюоните се получават при разпадането на *пиони* (време на живот $\tau \approx 2.10^{-8}$s)

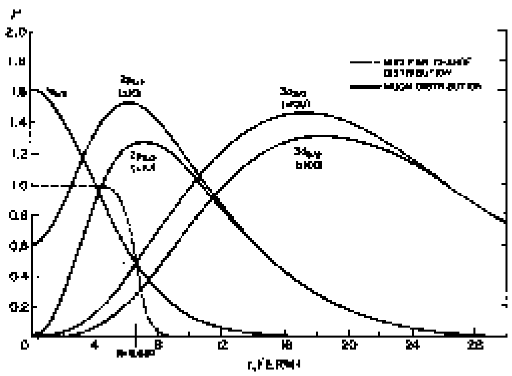
$$\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu_{\mu}, \qquad \mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu_{\mu} + \nu_{e},$$

където ν_{μ} е *мюонното неутрино*, а ν_e – *електронното неутрино*.
Мюонните снопове се формират на сравнително голямо разстояние от мишената на ускорителя, отчитайки времето на живот на пионите. Формираният и фокусиран сноп мюони пада върху мишена, в която мюоните се забавят. Когато енергиите им станат достатъчно ниски, започва залавянето им на молекулни и атомни орбити във веществото на мишената. Така се образуват *мюонни атоми*.
Боровият радиус

$$a_0 = \frac{\Lambda}{\alpha}\cdot\frac{1}{Z} \quad (\alpha = k_0 e^2/\mathbf{h}c,\ \Lambda = \mathbf{h}/m_0 c^2)$$

е обратно пропорционален на масата на електрона. При залавяне на мюон на „орбита" нейният радиус ще е 207 пъти по-малък от a_0.
При захващане от тежък атом, напр. от олово (Z = 82), орбитата на мюона (n = 1) ще е на разстояние

$a_0(\mu^-) = a_0(e^-)/(207.82) = 3.10^{-15}$ m – вътре в ядрото



Енергията на мюонните нива е чувствителна към формата на ядрото

$$E_n(m) = -0{,}5 m_m c^2 \alpha^2 \frac{Z^2}{n^2} = -0{,}5.207 m_0 c^2 \alpha^2 \frac{Z^2}{n^2} = -13{,}6.207 \frac{Z^2}{n^2}$$

$E_n(\mu) = 18{,}93/n^2$ MeV

E_{10} = 189 keV, E_9 = 230 keV, E_8 = 300 keV,..., E_2 = 4,73 MeV и E_1= 18,93 MeV.

Захващането става на ниво с голямо n и мюонът се спуска по нивата до основното - излъчват се рентгенови лъчи
Каскадът от рентгенови лъчи от нивото n = 10 надолу ще има енергии

230 –189 = 41 keV
300 –230 = 70 keV
....
18,93 - 4,73 = 14,2 MeV

мюонните рентгенови спектри са в диапазона на γ-лъчите. K-рентгеновите лъчи, излъчващи се при преход на мюона между нивата $2p \rightarrow 1s$ за точково ядро имат енергия 14,2 MeV.
Но определената експериментално енергия на K-линията на Pb има енергия 5,5 MeV - влияние на крайния размер на ядрото на оловото!

Операционно определяне на радиуса - радиусът на ядрото участва като параметър, и се определя от фитиране с експерименталните точки. Търси се минимум на функционала за всяка от точките $P_i^{\text{експ}}$

$$c^2 = \sum_{i=1}^{N} [P_i^{\text{експ}} - P_i^{\text{теор}}(X_1, X_2,..., R,..., X_n)]^2,$$

за да се определи най-правдоподобната стойност за R. Тук X_i са параметрите, описващи теоретичната функция, а N – броят на експерименталните точки. С този пример се илюстрира и понятието.

От изследване на мюонните рентгенови спектри на оловото за радиуса е получена стойност

$$R_{\text{ср}}(\text{Pb}) = 1{,}17.10^{-15} \sqrt[3]{208}$$

Експерименти по разсейване на електрони

Дължината на вълната на дьо Бройл на тези частици трябва да бъде близка до размерите на обектите - за да се „сондират” обекти с размер 2 fm са необходими електрони с енергия не по-малка от 600 MeV.

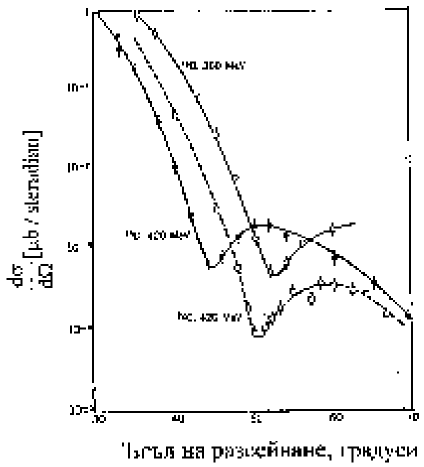
частици	кинетична енергия	дължина на вълната = h/p	сравнение
α-частици	8 MeV	5,1 fm	($\lambda \sim R$)
протони	200 MeV	1,9 fm	($\lambda < R$)
протони	500 GeV	$2{,}5.10^{-3}$ fm	($\lambda \ll R$)
електрони	600 MeV	2 fm	($\lambda < R$)

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6{,}6.10^{-34}.3.10^{8}}{10^{8}.1{,}6.10^{-19}} = 1{,}2.10^{-14}\,\mathrm{m} = 1{,}2.10^{-14}\ \mathrm{m} = 12\ \mathrm{fm}$$

$\hbar c$ = 197 MeV.fm

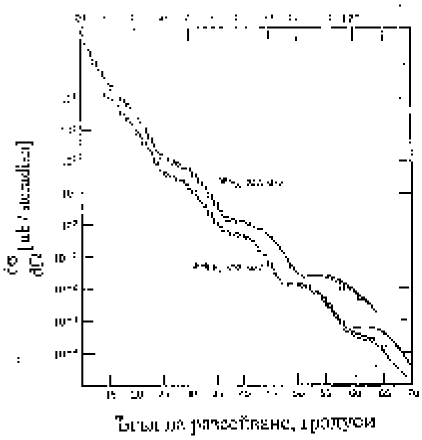
$$\lambda = \frac{hc}{E} = 2\pi \frac{197}{100}\frac{\mathrm{MeV.fm}}{\mathrm{MeV}} = 12\ \mathrm{fm}$$

от



Ъглово разпределение на разсеяните електрони от ^{16}O (при 360 MeV и 420 MeV и ^{12}C (при 420 MeV)

Хофщатер - експерименти с електронни снопове с енергии от 100 MeV до 1 GeV. Разсеяните електрони се анализират с прецизен спектрометър, за да се отделят само еластично разсеяните от избраната мишена. Вижда се първият дифракционен минимум - мести се в зависимост от енергията на електроните и от размерите на ядрото, от което те се разсейват.



Ъглово разпределение на разсеяните електрони от ^{208}Pb (при 248 MeV и 502 MeV)

Кръгъл диск с диаметър D дава първи минимум при
$\theta = \arcsin(1{,}22\ \lambda/D)$ и за ядрения радиус на ^{16}O - 2,6 fm,
за ^{12}C - 2,3 fm.

дифракционните минимуми са плитки - причината е дифузният край на ядрото, то (няма рязка граница, за да се получи ясна дифракционна картина.

Количествена оценка – формфактор

Ф-лата на Ръдърфорд за разсейване на частица със заряд ze от ядро със заряд Ze е

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = \left(\frac{zZe^2k_0}{2T}\right)^2 \frac{1}{4\sin^4(\theta/2)} = \frac{\alpha^2\hbar^2c^2z^2Z^2}{4T^2}\frac{1}{4\sin^4(\theta/2)}$$
$$= \frac{\alpha^2\hbar^2c^2}{p^2\mathrm{v}^2}z^2Z^2\frac{1}{4\sin^4(\theta/2)}\ .$$

$$4T^2 = 4\frac{m\mathrm{v}^2}{2}\frac{p^2}{2m} = (p\mathrm{v})^2$$

За $z = 1$(електрон) ръдърфордовото сечение става:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = \frac{\alpha^2\hbar^2c^2}{4p^2\mathrm{v}^2}Z^2\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}.$$

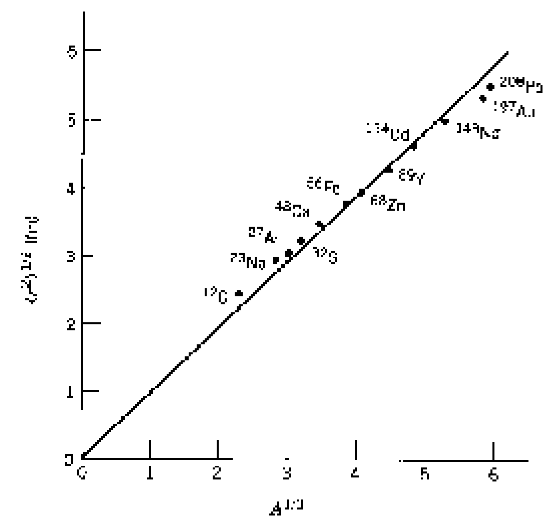
За *бързи електрон* (спин $1/2\hbar$ и $\mathrm{v} \sim c$) Мот извежда израза

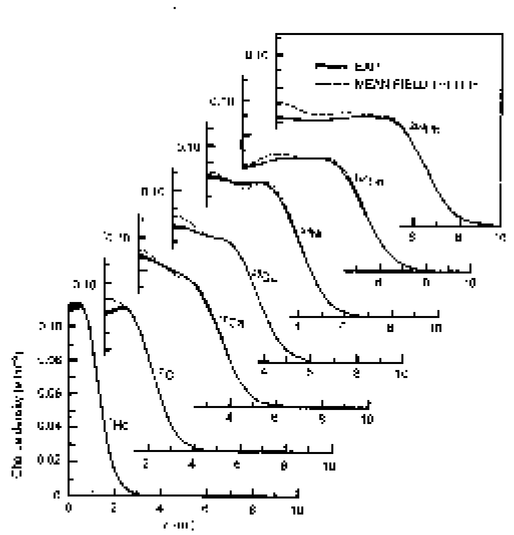
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{Mott}} = \frac{\alpha^2\hbar^2c^2}{p^2\mathrm{v}^2}Z^2\frac{1}{4\sin^4(\theta/2)}\left[1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\sin^2(\theta/2)\right],$$

сечение на Мот.
При извеждането на това сечение се предполага, че ядрото е точково ($R = 0$). Прилага се теория на пертурбациите от първи порядък - коректно е само $Z\alpha << 1$, (за леки ядра, защото $\alpha = 1/137$). Важно е да се отчете ненулевият размер на ядрото. В сечението се включва множител $f(\theta)$

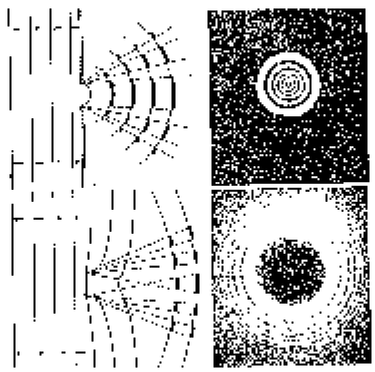
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{Mott}}|f(\theta)|^2$$

$f(\theta)$ се нарича *формфактор* (множител на формата).





Еластично разсейване на електрони от ^{12}C, ^{16}O, ^{40}Ca, ^{48}Ca, ^{58}Ni, ^{124}Sn и ^{208}Pb



При изчислението на формфактора се използва аналогията с фрауенхоферова дифракция от отвор: полученото изображение върху екран представлява Фурие-транформацията на отвора. За разсейване на електрони от ядро отворът се замества със сферично разпределение на заряди.

Фрауенхоферова дифракция от отвор и от диск – аналогия с разсейването на електрони от сферично равномерно заредено ядро. Изображението върху екрана е Фурие-трансформация на отвора.

важен резултат - средната плътност на ядрата е почти постоянна за всички ядра. Очевидно, протоните не се събират в средата на ядрото – плътността е почти постоянна до повърхността на ядрото. Нуклеонната плътност, т.е. брой нуклеони в единица обем, е приблизително постоянна – A/V ~ const, което означава, че $V \sim A$ и следователно $R^3 = r_0 A$. Това дава

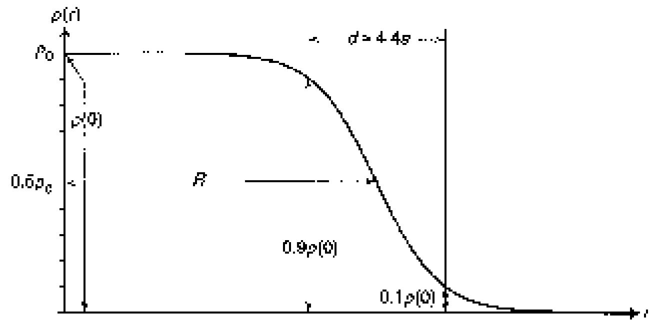
$$R = r_0 A^{1/3}, \qquad r_0 = 1{,}05 \text{ fm}.$$

дифузна дебелина - еднаква за всички ядра ~ на 2,3-2,5 fm
средно квадратичен радиус за няколко ядра - наклонът на правата дава r_0 = 1,23 fm

Разпределението на плътността се описва с израза

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\dfrac{r - R_{\text{ср}}}{a}\right)}$$

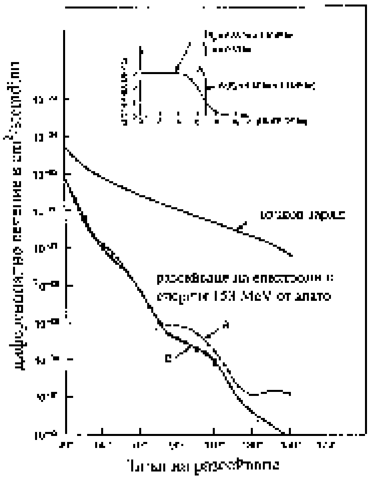
$R_{ср}$ се дефинира от условието $\rho(R_{ср})/\rho(0) = ½$, d - дифузна дебелина



$$a = \frac{d}{2\ln 9} = \frac{d}{4,4}$$

от дефиницията
$\rho(R_{ср}+d/2)/\rho(0) = 1/10$

Теоретичен вид на плътността



Експериментите по разсейване на електрони са чувствителни към формата на ядрото – показани са три теоретични разпределения: за точково ядро, за ядро с рязък край (крива А) и за ядро с дифузен край (крива В): експерименталните точки са най-близо до теоретичната крива за ядро с дифузен край.

Изотопно отместване

Радиалните вълнови функции на s-електроните в атомите се различават от тези на p-електроните - съществува ненулева вероятност s-електронът да бъде намерен и при много малки стойности на r, т.е. в близост до ядрото.

Средната стойност на енергията се дава с матричния елемент

$$\langle E \rangle = \int \psi_n^* V(r) \psi_n d^3 r \,, \qquad V(r) = -k_0 Z e^2 / r \text{ (точково ядро)}$$

Приближение на неточково ядро - равномерно заредена сфера с радиус R. Потенциалът в т. r, намираща се вътре в сферата ($r < R$) се дава с

$$V'(r) = -\frac{k_0 Z e^2}{R}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right], \text{ а енергията } \langle E \rangle = \int_{r<R} \psi_n^* V'(r) \psi_n \mathrm{d}^3 r$$

ще отчита промяната на енергията поради навлизане на s-електроните вътре в ядрото (при $r < R$). Енергията на нивото ще се отмества с

$$\Delta E = \langle E' \rangle - \langle E \rangle .$$

(вълновите функции са същите, тъй като кинетичните енергии са еднакви). Радиалната вълнова функция за основното състояние 1s е

$$\psi(r) = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{Z}{a_0} r\right) \quad .$$

заместваме в израза за $\Delta E = \langle E' \rangle - \langle E \rangle$ и получаваме

$$\Delta E = k_0 e^2 \left(4\frac{Z^4}{a_0{}^3}\right) \int_0^R \exp\left(-2\frac{Z}{a_0} r\right) \left[\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3}\right] r^2 \mathrm{d}r$$

Експонентата в този интеграл клони към 1 при $r < 10^{-15}$ m и тогава

$$\Delta E = \frac{2}{5}\frac{k_0 Z^4 e^2}{a_0{}^3} R^2 = \frac{2}{5}\frac{k_0 Z^4 e^2}{a_0{}^3} r_0{}^2 A^{2/3} .$$

„Точково” ядро не съществува - за сравнение се използват K_α-рентгеновите лъчи за два съседни изотопа A и A'. Разликата в енергиите на K_α-рентгеновите лъчи е

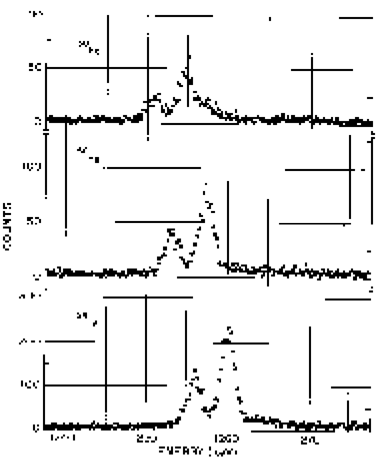
$\Delta E =$

$$= E_{K_a}(A) - E_{K_a}(A') = E_{2p}(_{2p}(A') - E_{1s}(A')] \cong E_{1s}(A') - E_{1s}(A)$$

(вълновите функции на състоянието $2p$ са почти нула в близост до ядрото)
изотопното отместване е

$$\Delta E(A') - \Delta E(A) = \frac{2}{5}\frac{k_0 Z^4 e^2}{a_0{}^3} r_0{}^2 \left[(A')^{2/3} - A^{2/3}\right].$$

За рентгеновите преходи това е 10^{-6} от енергията на прехода. За тежки елементи енергията на K_α-лъчите е около 100 keV и се очаква отместване от около 10^{-1} eV. Опитните данни показват предсказаната линейна зависимост от $A^{2/3}$.



За K_α-мезорентгеновите линии (мюонните орбити са много близо до ядрото) ефектът е с около 4 порядъка по-голям.

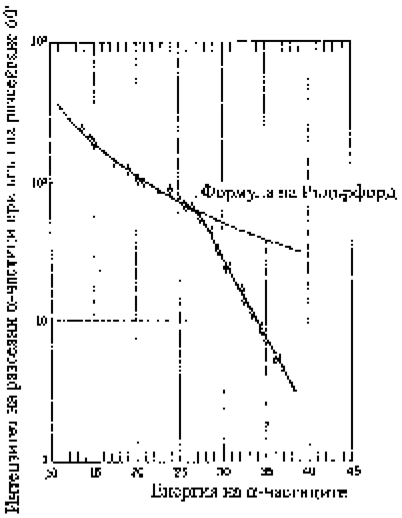
K_α -мезорентгеновите линии за три изотопа на Fe (A = 54, 56, 58) (излъчват от нивата $2p_{3/2}$ и $2p_{1/2}$ към основното ниво $1s_{1/2}$)

Разпределение на ядрената материя

Опити по разсейване на α-частици

Ядреното взаимодействие не се въвлича, ако ядрата не са се приближили на разстояние, равно на сумата от двата радиуса - дотогава разсейването е чисто кулоново - ръдърфордово разсейване. Под определена стойност на енергията разсейването винаги става според формулата на Ръдърфорд: вероятността за разсейване под даден ъгъл е обратно пропорционална на кинетичната енергия на частицата. С увеличаване енергията на α-частицата кулоновото отблъскване от ядрото се преодолява и ядрата се приближават на разстояние, на което започват да действат ядрените сили. При определена енергия на α-частиците (определяща прицелния параметър) започва да се наблюдава отклонение от формулата на Ръдърфорд.

пример - разсейване от Pb: при ъгъл на разсейване 60° енергията, при която започва отклонението от чисто кулоновото взаимодействие, е около 27 MeV.



Прекратяване валидноста на формулата на Ръдърфорд. От положението на точката на пречупване може да се определи радиуса на ядрото

α-разпадането на тежките ядра. - прозрачността на бариерата зависи от ядрения радиус ***R***. Сравняването на изчислената и измерената константа на разпадане позволява да се определи ***R***.

Разсейване на бързи неутрони

Разсейването на неутрони и дифракцията на неутрони от ядра са методи, които дават радиуса на ядрената материя (при тяхното взаимодействие с ядрата участват само ядрените сили).

Изследва се разсейването на бързи неутрони, тъй като при тях $\lambda \ll R$ *и* дифракционните ефекти са минимални. Мишена с дебелина **l** и N ядра/cm^3 се облъчва с поток неутрони Φ_0 [неутр/cm^{2}s]. До слоя с дебелина ***dx*** в мишената, разположен на дълбочина x достига поток Ф. Условието за линейност

$$\mathrm{d}\Phi = -\Sigma\Phi\mathrm{d}x$$

Σ - коефициент на пропорционалност (дава относителното намаляване на потока за единица път - това е линейният коефициент на отслабване $\Sigma = 1/\lambda$). Σ е *макроскопското сечение*

Потокът след преминаване на цялата дебелина $\mathbf{l}$ на мишената се получава чрез интегриране

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\Sigma \mathbf{l}}$$

Въвежда се *микроскопско ефективно сечение* - напречното сечение на ядрото

$$\sigma = \pi R^2 \quad \text{и тогава} \quad \Sigma = N\sigma$$

За микроскопското сечение

$$\sigma = \frac{1}{N\mathbf{l}} \ln\left(\frac{\Phi_0}{\Phi}\right)$$

$\mathbf{l}$ и N са известни, а Φ_0 и Φ се измерват, а радиусът на ядрото се изчисляв.

Резултат - измереното сечение е два пъти по-голямо (ядрото не е черно тяло). При по-ниски енергии определеният радиус от такива експерименти може да е завишен („раздуване" на ядрото), а при много високи енергии на неутроните ядрото може да стане „сиво", т.е. частично проницаемо.

Опитите по разсейване на неутрони от ядра дават за радиуса величината

$$R = (1,3 - 1,4).10^{-15} A^{1/3} \text{ m}$$

Дифракция на неутрони от ядра

Дифракцията от диск с диаметър $2R$ е аналогична на дифракция от процеп със същия размер (вж фиг. III.11). Условието за получаване на първия дифракционен минимум е

$$R \sin\theta = \lambda/2,$$

при малки ъгли θ получаваме $\theta \sim \lambda/R$

- положението на първия дифракционен минимум е обратно пропорционално на радиуса на ядрото, т.е. колкото по-голямо е едно ядро, на толкова по-малък ъгъл ще се появи първият минимум в дифракционната картина.