

## ДОПЪЛНЕНИЯ

### 1. Решаване на уравнението на Шрьодингер за преминаване на $\alpha$ -частица през потенциална бариера с произволна форма

#### II. Решаване на едномерното уравнение на Шрьодингер

Уравнението на Шрьодингер за движение на частица с маса  $m_\alpha$  в сферично-симетричен потенциал е

$$[\text{VIII.1}] \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right] + \frac{2m_\alpha}{\hbar^2} \left[ E - V(r) - \frac{\mathbf{l}(\mathbf{l}+1)\hbar^2}{2m_\alpha r^2} \right] R(r) = 0.$$

Потенциалната бариера би трябвало да се разглежда като тримерна. Предполагаме, че потенциалът  $V(r)$  зависи само от разстоянието до центъра на ядрото  $r$ . Това е всъщност уравнението за радиалната вълнова функция<sup>1</sup> и решението се търси с вълнова функция от вида  $R(r) = u(r)/r$

$$[\text{VIII.2}] \quad -\frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \frac{d^2 u}{dr^2} + V(r)u = Eu.$$

В общия случай потенциалът е сума от кулоновия потенциал и потенциала на центробежната сила:  $V(r) + \frac{\mathbf{l}(\mathbf{l}+1)\hbar^2}{2m_\alpha r^2}$ . Като първа стъпка ще разгледаме случая

$\mathbf{l} = 0$ , което означава, че  $\alpha$ -частицата излиза от центъра на ядрото без да отнася ъглов момент. Тогава остава само кулоновият потенциал

$$V(r) = k_0 \frac{2(Z-2)e^2}{r}.$$

Търсим решение от вида  $u(r) = \exp\left(-\frac{y(r)}{\hbar}\right)$ . След като заместим  $d^2 u/dr^2$  в уравнение [VIII.2] то става

$$[\text{VIII.3}] \quad -\frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \left[ -\frac{1}{\hbar} \frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{1}{\hbar^2} \left( \frac{dy}{dr} \right)^2 \right] + (V(r) - E) = 0.$$

Тъй като  $V$  е бавно изменяща се функция на  $r$ ,  $y(r)$  ще бъде също бавно изменяща се и тогава  $d^2 y/dr^2$  ще е малко. Освен това множителят  $\hbar/2m_\alpha$  е много по-малък от множителя  $1/2m_\alpha$  и затова първият член в това уравнение може да се пренебрегне. Тогава

$$\frac{dy}{dr} = \sqrt{2m_\alpha(V(r) - E)} \quad \text{и съответно} \quad y(r) = \int_0^r \sqrt{2m_\alpha[V(\rho) - E]} d\rho.$$

<sup>1</sup> вж Лекции по АФ, стр. 130

Прозрачността на бариерата по дефиницията [II.47] ще бъде

$$[VIII.4] \quad P = \frac{|u(b)|}{|u(R)|} \frac{\exp\left(-\frac{2}{\mathbf{h}} y(b)\right)}{\exp\left(-\frac{2}{\mathbf{h}} y(R)\right)} = \exp\left\{-\frac{2}{\mathbf{h}_R} \int^b dr \sqrt{2m_a[V(\rho) - E]}\right\},$$

което съвпада с резултата, получен от сумирането на много на брой тесни правоъгълни бариери [II.49]. Този израз може да се представи във вида

$$P = \exp\left\{-\frac{2\sqrt{2m_a}}{\mathbf{h}} I\right\},$$

където сме означили

$$[VIII.5] \quad I = \int_R^b dr \sqrt{V(r) - E}.$$

Задачата е да се реши аналитично този интеграл.

В края на потенциалната бариера (в т.  $r = b$ ) пълната енергия  $E$  е равна на потенциалната:

$$E = V_b = k_0 \frac{2(Z-2)e^2}{b}, \quad \text{с } k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Отношението на потенциала към енергията е  $\frac{V(r)}{E} = \frac{V(r)}{V_b} = \frac{b}{r}$  и тогава

$$[VIII.6] \quad V(r) = E \frac{b}{r}.$$

Интегралът се записва съответно

$$[VIII.7] \quad I = \int_R^b dr \sqrt{E \frac{b}{r} - E} = \sqrt{E} \int_R^b dr \sqrt{\frac{b}{r} - 1}.$$

Удобно е да се направи субституцията  $\frac{b}{r} = \frac{1}{x^2}$ , с което интегралът става

$$[VIII.8] \quad I = 2b\sqrt{E} \int_{\sqrt{R/b}}^1 dx \sqrt{1-x^2}.$$

Видът на интеграла подсказва още една субституция. Полагаме  $x = \sin j$ , също и  $\sqrt{R/b} = \sin j_0$ . Така новата променлива  $\varphi$  в т.  $r = b$  става  $j = j_0$ . С тази субституция интегралът става

$$[VIII.9] \quad I = 2b\sqrt{E} \int_{j_0}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 j} \cos j dj.$$

Границите на интегрирането се определят така:

В т.  $x = \sqrt{R/b}$ , както положихме по-горе  $x = \sqrt{R/b} = \sin j_0$ , и следователно  $j = j_0 = \arcsin(R/b)$ . В т.  $r = b (x = 1) = \sin j$ , така че  $j = \pi/2$ . И така, за интеграла получаваме

$$[\text{VIII.10}] \quad I = 2b\sqrt{E} \int_{j_0}^{\pi/2} \cos^2 j \, dj = 2b\sqrt{E} \left[ \frac{j}{2} + \frac{1}{4} \sin 2j \right]_{j_0}^{\pi/2} = \frac{b}{2} \sqrt{E} \left( \frac{\pi}{2} - j_0 - \frac{1}{2} \sin 2j_0 \right) = b\sqrt{E} \left( \frac{\pi}{2} - j_0 - \frac{1}{2} \sin 2j_0 \right).$$

Числото  $\sin j_0 = \sqrt{R/b}$  е много малко, защото  $R \ll b$  и тогава  $\sin j_0 \approx j_0 \approx \sqrt{R/b}$ . Величината  $b$  може да се изрази чрез енергията:  $b = k_0 \frac{2(Z-2)e^2}{E}$ . След като заместим  $b$  се получава окончателно:

$$[\text{VIII.12}] \quad I = \frac{\pi k_0 (Z-2) e^2}{\sqrt{E}} - 2e\sqrt{k_0 2(Z-2)R}.$$

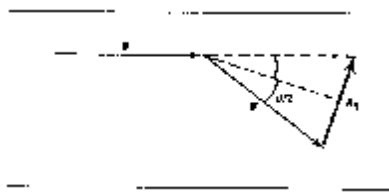
Оттук за прозрачността на бариерата се получава изрза [II.50]:

$$P = \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m_\alpha}}{\mathbf{h}} I\right) = \exp\left[-\frac{2\pi k_0 e^2 (Z-2)\sqrt{2m_\alpha}}{\mathbf{h}\sqrt{E}} + \frac{8e\sqrt{k_0 m_\alpha (Z-2)R}}{\mathbf{h}}\right].$$

## 2. Ядрен формфактор

Вълновите функции на електрона преди и след разсейването се представят с плоски монохроматични вълни в съответствие с импулса на електрона:  $\mathbf{p}_i = \mathbf{h}\mathbf{k}_i$  преди разсейването и  $\mathbf{p}_f = \mathbf{h}\mathbf{k}_f$  след разсейването с вълнови функции съответно  $y_i = e^{i(\mathbf{k}_i, \mathbf{r})}$  и  $y_f = e^{i(\mathbf{k}_f, \mathbf{r})}$ . Предаденият при разсейването импулс е

$$[\text{VIII.13}] \quad \mathbf{h}\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f \quad \text{или} \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f.$$



Фиг. VIII.1

Предаденият напречен импулс при разсейване на електрони

От фиг. VIII.1 се вижда, че  $\mathbf{h}\mathbf{q}/2 = p_i \sin(\theta/2)$  и понеже  $p_i = \mathbf{h}/\mathbf{D}$ , за  $q$  се получава  $q = (2/\mathbf{D})\sin(\theta/2)$ .

Взаимодействието, което причинява разсейването, се описва с потенциала  $V(r)$ . Според т.нар. „златно правило на Ферми“, вероятността за извършване на преход от началното състояние  $i$  (initial) към крайното състояние  $f$  (final) се задава с

израза:

$$[\text{VIII.14}] \quad \lambda = \frac{2\pi}{h} |V_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_f},$$

където  $\frac{dn}{dE_f}$  задава плътността на крайните състояния, а

$$[\text{VIII.15}] \quad V_{fi} = \int_{\tau} \Psi_f^* V(r) \Psi_i d\mathbf{r} = \langle y_f | V(r) | y_i \rangle$$

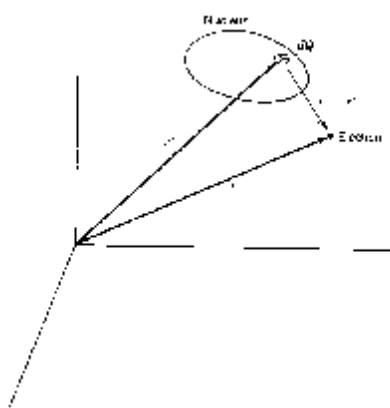
е матричният елемент на прехода. Интегрирането е по обема на ядрото  $\tau$ . Вероятността за преход зависи от квадрата на матричния елемент. Плътността на крайните състояния, изразяваща се в броя на състоянията на единица енергетичен интервал се включва в [VIII.14] от статистически съображения – ако крайното състояние е единично изолирано, вероятността за прехода е много по-малка, отколкото ако съществуват много на брой и близко разположени нива, към които може да се извърши прехода.

В разглеждания от нас случай на разсейване на електрони вероятността за преход е пропорционална на квадрата на матричния елемент. Нека означим матричния елемент с  $F'$ . В приближението вълновите функции на падащия и на излитащия електрон да бъдат плоски вълни и от [VIII.15]

$$[\text{VIII.16}] \quad V_{fi} = F'(k_i, k_f) = \int_{\tau} e^{-i(k_f, \mathbf{r})} V(r) e^{i(k_i, \mathbf{r})} d\mathbf{r},$$

и като се вземе предвид големината на предадения импулс [VIII.13] той се изразява чрез израза

$$[\text{VIII.17}] \quad V_{fi} = F'(\mathbf{q}) = \int_{\tau} e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r})} V(r) d\mathbf{r}.$$



Фиг. VIII.2

Към определяне потенциала на взаимодействие между електрон и равномерно заредено ядро

Константата на нормировка се избира така, че  $F'(0) = 1$ , т.е. формфакторът на точково ядро е равен на 1. Потенциалът на взаимодействие  $V(r)$  между електрона и ядрото зависи от плътността на ядрения електричен заряд  $Z\rho_p(\mathbf{r}')$ , където  $\mathbf{r}'$  е радиус-векторът на точка от ядрения обем, а  $\rho_p(\mathbf{r}')$  дава разпределението на ядрения заряд, изразяващ разпределението на протоните. Функцията  $\rho_p(\mathbf{r}')$  е нормирана, което означава  $\int \rho_p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 1$ . На фиг. VIII.2 е

показан смисълът на означенията. Електронът, разположен в точка с радиус-вектор  $\mathbf{r}$  има потенциална енергия от взаимодействието с елемента заряд  $dQ$  в т.  $\mathbf{r}'$  от ядрото

$$[\text{VIII.18}] \quad dV = -\frac{k_0 e dQ}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{k_0 Z e^2 \rho_p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

За да се определи пълната енергия на взаимодействието  $V(r)$ , трябва да се просумира по всички елементи  $dQ$  на заряда, т.е. да се интегрира по обема на ядрото, предполагайки равномерно разпределение на заряда. Това дава

$$[\text{VIII.19}] \quad V(r) = -Ze^2 k_0 \int_{\tau} \frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'.$$

Като заместим израза [VIII.18] в [VIII.14] получаваме:

$$[\text{VIII.20}] \quad F'(\mathbf{q}) = -\int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r})} \int d\mathbf{r}' \left[ \frac{k_0 Z e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho_p(\mathbf{r}') \right] = -k_0 e^2 Z \iint e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r})} \frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}'.$$

Ако се направи смяна на променливите  $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  интегралът може да се раздели на произведение от два интеграла

$$[\text{VIII.21}] \quad F'(\mathbf{q}) = -k_0 Z e^2 \int \frac{e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{s})}}{|\mathbf{s}|} d\mathbf{s} \int \rho_p(\mathbf{r}') e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r}')} d\mathbf{r}' = -k_0 Z e^2 \frac{4\pi}{q^2} F(\mathbf{q}).$$

Първият от тези интеграли  $I_1 = \int d\mathbf{s} e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{s})} / |\mathbf{s}|$  представлява често срещана в електродинамиката фурие-трансформация и се изчислява лесно:  $I_1 = -4\pi/q^2$ .

Вторият интеграл в [VIII.21] е именно *формфакторът*

$$[\text{VIII.22}] \quad F(\mathbf{q}) = \int \rho_p(\mathbf{r}') e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r}')} d\mathbf{r}'.$$

В приближението, което направихме – вълновите функции да бъдат плоски вълни, формфакторът представлява фурие-образ на разпределението на ядрения заряд. Обратната фурие-трансформация на  $F(\mathbf{q})$  би трябвало да даде търсеното зарядово разпределение  $\rho_p(\mathbf{r}')$ . Оттук се вижда смисълът и важността на формфактора.

Матричният елемент на разсейването става

$$F'(\mathbf{q}) = V_{fi} = Ze^2 k_0 \frac{4\pi}{q^2} F(\mathbf{q}).$$

Когато става предаване на много малък импулс ( $q \ll p_i \mathbf{h}$ ), експонентата в [VIII.22] може да се развие в ред на Тейлор по степените на  $i(\mathbf{q}, \mathbf{r}')$

$$e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r}')} = 1 + i(\mathbf{q}, \mathbf{r}') - \frac{1}{2!} (\mathbf{q}, \mathbf{r}')^2 + \dots,$$

откъдето

$$[\text{VIII.23}] F(\mathbf{q}) = \int r_p(\mathbf{r}') e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{r}')} d\mathbf{r}' = \int d\mathbf{r}' \rho_p(\mathbf{r}') \left[ 1 + (i\mathbf{q}, \mathbf{r}') - \frac{1}{2!} (\mathbf{q}, \mathbf{r}')^2 + \dots \right] = 1 - \frac{q^2}{6} \langle R^2 \rangle + \dots$$

Първият член от този ред е равен на единица от условието за нормировка. Вторият член става нула при сферично симетрично разпределение на заряда в ядрото. Третият член ще стане

$$[\text{VIII.24}] -\frac{q^2}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r'^2 \rho_p(\mathbf{r}') r'^2 \cos^2 \theta \sin \theta dr' d\theta d\phi = -\frac{q^2}{6} \langle R^2 \rangle$$

и следователно

$$[\text{VIII.25}] F(\mathbf{q}) = 1 - \frac{q^2}{6} \langle R^2 \rangle + \mathbf{L},$$

където с  $\langle R^2 \rangle$  сме означили квадрата на средноквадратичния радиус на ядрото

$$[\text{VIII.26}] \langle R^2 \rangle = \int r'^2 \rho_p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

който в сферично-симетричния случай на [VIII.24] с обемен елемент  $4\pi r'^2 dr'$  ще има вида  $\langle R^2 \rangle = 4\pi \int r'^4 \rho_p(r') dr'$ . В израза [VIII.26] няма знаменател, както би трябвало да се очаква по дефиницията за средна стойност, защото  $\int \rho_p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 1$  от условието за нормировка на вълновата функция. От дефиницията на радиуса [VIII.26] и от [VIII.25] се вижда, че той може да се определи, ако се измери формфактора  $F(q)$  при малки предадени импулси. В сила е съотношението

$$[\text{VIII.27}] \langle R^2 \rangle = -3 \left. \frac{d^2 F}{dq^2} \right|_{q=0},$$

тъй като от [VIII.25] се получава  $\frac{dF}{dq} = -\frac{q}{3} \langle R^2 \rangle + \dots$  и  $\frac{d^2 F}{dq^2} = -\frac{1}{3} \langle R^2 \rangle + \dots$ , откъдето

$$\left. \frac{d^2 F}{dq^2} \right|_{q=0} = -\frac{1}{3} \langle R^2 \rangle.$$

Ако ядрото е точково и разположено в началото на координатната система, зарядовата му плътност се изразява чрез  $\delta$ -функцията на Дирак и формфакторът става равен на 1.

Функцията  $\rho_p(\mathbf{r}')$ , описваща зарядовото разпределение на ядрото, се получава от измерванията на ъгловите разпределения и от определените чрез тях диференциални сечения се получава формфактора. От него пък, чрез обратната фурие-трансформация се получава зарядовото разпределение.

### 3. Магнитен диполен момент на ядрата

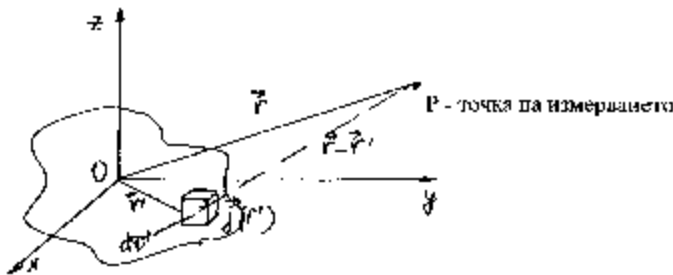
Нека разгледаме токове, разпределени в определен обем в пространството

(фиг. VIII.3). Разпределението се характеризира с плътност на тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ . Векторът  $\mathbf{r}'$  задава координатата на точка от елементарния обем  $d\mathbf{r}'$ , а векторната функция  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  дава големината и посоката на електричния ток в елементарния обем  $d\mathbf{r}'$  около тази точка. От електродинамиката е известно, че магнитното поле в точка с радиус-вектор  $\mathbf{r}$  се изчислява от

$$[\text{VIII.28}] \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \text{rot} \mathbf{A},$$

където векторният потенциал в точката  $\mathbf{r}$  се задава с

$$[\text{VIII.29}] \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'.$$



Фиг. VIII.3

Към определяне на магнитния диполен момент  $\mu$

Интегрирането става по обема на ядрото  $\tau$ . От електродинамиката е известно развитието на [VIII.29] по мултиполи, използвайки израза

$$[\text{VIII.30}] \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1/r}{|1 - \mathbf{r}'/r|} = \frac{1}{r} + \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{r^3} + \dots,$$

$$[\text{VIII.31}] \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \int_{\tau} \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \frac{1}{r^3} \int_{\tau} (\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \dots \right].$$

Първият от тези интеграли е равен на нула (не съществува магнитен монопол), а подинтегралната функция във втория може да се представи в удобна форма, използвайки свойствата на тройното векторно произведение\*. Тъй като  $(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{j} = (\mathbf{r}, \mathbf{j}) \mathbf{r}' - \mathbf{r} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})$ , обемният интеграл от първото слагаемо вдясно е равен с обратен знак на интеграла от лявата част на този израз. Тогава  $2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{r} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})$ , така че  $(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{j} = -\frac{1}{2} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})]$  и [VIII.31] може да се запише като

$$[\text{VIII.32}] \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}').$$

Тук с  $\mu$  сме означили магнитния дипол

\* вж Дж.Джаксон, Класическая электродинамика, Изд. Москва, 1965 г., стр. 168-171.

$$[\text{VIII.33}] \quad \mathbf{\mu} = \frac{1}{2} \int_{\tau} [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}' .$$

Аргументът на интеграла в този израз включва неявно чрез  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  заряда  $e$ , зарядовата плътност  $|\psi(\mathbf{r}')|^2 = \psi^*(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')$  и скоростта на заряда  $\mathbf{v}$ , защото  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = e|\psi(\mathbf{r}')|^2 \mathbf{v}$ . Векторното произведение  $(\mathbf{r}' \times \mathbf{v})$  за частица с маса  $m_p$  е  $\mathbf{L}/m_p$ . Тук  $\mathbf{L}$  е ъгловият момент  $\mathbf{L} = m_p \mathbf{v} \times \mathbf{r}'$ . В квантовата механика зарядовата плътност на частица със заряд  $e$  се дава с  $e|\psi(\mathbf{r}')|^2$  и тогава магнитният момент ще бъде

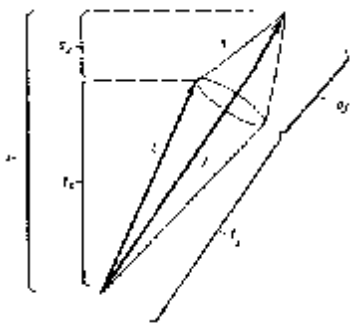
$$[\text{VIII.34}] \quad \mathbf{\mu} = \frac{e}{2m_p} \int \psi^*(\mathbf{r}') \hat{L} \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' .$$

Ако вълновата функция съответства на състояние с определено  $L_z$ , то единствена отлична от нула е  $z$ -компонентата на интеграла

$$[\text{VIII.35}] \quad \mu_z = \frac{e}{2m_p} \int \psi^*(\mathbf{r}') \hat{L}_z \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' .$$

#### 4. Модел на Шмид

В рамките на едночастичния слоест модел на ядрото Шмид изчислява магнитните моменти на ядра с нечетно  $A$  при предположение, че той се дължи само на магнитния момент на неедвоения нуклеон. Магнитният момент се изчислява от очакваната стойност на съответния оператор в състояние с максимална проекция на ъгловия момент. Както орбиталния и спиновия моменти се сумират ( $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$ ), така и магнитните моменти, дължащи се на тези два момента се сумират така (вж фиг. VIII.4)



Фиг. VIII.4

Към изчисляване на средната стойност на  $s_z$  (модел на Шмид)

$$[\text{VIII.36}] \quad \mu = \frac{g_l \mathbf{l}_z + g_s s_z}{\mathbf{h}} M_j$$

От фигурата се вижда, че  $\mathbf{l}_z = j_z - s_z$ . Като се постави очакваната стойност  $j_z = m_j \mathbf{h} = j \mathbf{h}$  ( $m^{\max} = j$ ) се получава



$$[\text{VIII.37}] \quad \langle \mu \rangle = \left[ g_1 j + \frac{g_s - g_1}{\mathbf{h}} \langle s_z \rangle \right] M_{\text{я}}.$$

Когато се изчислява  $\langle s_z \rangle$  ненулева ще бъде само проекцията на  $\mathbf{s}$  върху  $\mathbf{j}$ , която е постоянна поради прецесията. Моментните стойности на  $s_z$  ще се менят, но  $s_j$  ще се запазва. Величината  $\mathbf{s}_j$  ще е вектор, чийто единичен вектор ще съвпада с този на  $\mathbf{j}$ , т.е.  $\frac{\mathbf{s}_j}{|\mathbf{j}|}$ . Проекцията на  $\mathbf{s}$  върху  $\mathbf{j}$  е  $s_j = |\mathbf{s}| \cos(\mathbf{s}, \mathbf{j})$ . Скаларното произведение  $(\mathbf{s}, \mathbf{j}) = |\mathbf{s}| |\mathbf{j}| \cos(\mathbf{s}, \mathbf{j})$ , откъдето

$$[\text{VIII.38}] \quad \frac{(\mathbf{s}, \mathbf{j})}{|\mathbf{j}|} = |\mathbf{s}| \cos(\mathbf{s}, \mathbf{j}) = s_j.$$

От друга страна, като се има предвид израза за  $(\mathbf{s}, \mathbf{l})$  от (IV.23),

$$[\text{VIII.39}] \quad (\mathbf{s}, \mathbf{j}) = \mathbf{s} (\mathbf{l} + \mathbf{s}) = (\mathbf{s}, \mathbf{l}) + s^2 = \frac{j^2 - \mathbf{l}^2 + s^2}{2}$$

то за  $\mathbf{s}_j$  се получава

$$[\text{VIII.40}] \quad \mathbf{s}_j = s_j \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{j}|} = \frac{(\mathbf{s}, \mathbf{j})}{|\mathbf{j}|^2} \mathbf{j} = \frac{j^2 - \mathbf{l}^2 + s^2}{2 |\mathbf{j}|^2} \mathbf{j}.$$

За да получим очакваната стойност на  $\langle s_z \rangle$  трябва в [VIII.39] да заместим всички величини с очакваните за тях стойности, което дава

$$[\text{VIII.41}] \quad \langle s_z \rangle = \frac{j(j+1) - \mathbf{l}(\mathbf{l}+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} \mathbf{j} \mathbf{h},$$

тъй като средната стойност на  $\mathbf{j}$  е  $\langle \mathbf{j} \rangle = j_z = m_j^{\max} = \mathbf{j} \mathbf{h}$ . За  $j = \mathbf{l} + 1/2$  ( $\mathbf{l} = j - 1/2$ ) се получава  $\langle s_z \rangle = \mathbf{h}/2$ , а за  $j = \mathbf{l} - 1/2$  ( $\mathbf{l} = j + 1/2$ )  $\langle s_z \rangle = -\mathbf{h}j/2(j+1)$ . Като заместим в [VIII.37] тези стойности на  $\langle s_z \rangle$  се получава:

за *несдвоен неутрон*, като се има предвид, че  $g_1^n = 0$

при  $j = \mathbf{l} + 1/2$

$$[\text{VIII.42}] \quad \langle m_n \rangle = \frac{1}{2} g_s^n M_{\text{я}} = -1,91 M_{\text{я}}$$

при  $j = \mathbf{l} - 1/2$

$$[\text{VIII.43}] \quad \langle m_n \rangle = -\frac{I}{2(I+1)} g_s^n M_{\text{я}} = 1,91 \frac{I}{I+1} M_{\text{я}}.$$

За *несдвоен протон* като се има предвид, че  $g_1^p = 1$  ще имаме:

При  $j = \mathbf{1} + 1/2$

$$[\text{VIII.44}] \quad \langle m_p \rangle = \left[ I + \frac{1}{2} (g_s^p - 1) \right] M_y = (I + 2,29) M_y$$

при  $j = \mathbf{1} - 1/2$

$$[\text{VIII.45}] \quad \langle m_p \rangle = \left[ I - \frac{1}{2} (g_s^p - 1) \right] \frac{I}{I+1} M_y = (I - 2,29) \frac{I}{I+1} M_y .$$

Числените стойности тук са получени като се имат предвид  $g_s^p = 5,586$  и  $g_s^n = -3,826$  и факта, че спинът на ядрото се определя от спина на несдвоения нуклеон,  $I = j$ .

## 5. Ядрени електрични моменти

### 5.1. Развитие по мултиполи

За дефиницията на мултиполните моменти се използва развитието на потенциала, дефиниран с израза [III.74], в ред като се вземе предвид и редът [VIII.30]

$$[\text{VIII.46}] \quad V(x_1, x_2, x_3) = k_0 \left\{ \frac{q}{r} + \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^3 p_i x_i + \frac{1}{2r^5} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} x_i x_j + \dots \right\},$$

където величините  $q$ ,  $p_i$  и  $Q_{ij}$  са свързани с мултиполните моменти на разпределението

$$[\text{VIII.47}] \quad q = \int_{\tau} \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad p_i = \int_{\tau} x_i \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad Q_{ij} = \frac{1}{e} \int_{\tau} (3x_i x_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' .$$

В тези дефиниции  $q$  представлява електричният монопол, т.е. пълният заряд  $Ze$  на точково ядро,  $p_i$  е една от трите компоненти на електричния диполен момент  $D(p_x, p_y, p_z)$ , а  $Q_{ij}$  е една от петте независими компоненти на тензора на електричния квадруполен момент  $Q$ .

### 5.2. Оператори на електричните моменти

Ако началото на координатната система съвпада с центъра на тежестта на ядрото (работим в СЦМ), диполният момент е нула.

В квантовата механика се дефинира оператор на електричния квадруполен момент от ред  $\lambda$ :

$$[\text{VIII.48}] \quad \hat{M}(E\lambda, \mu) = \int_{\tau} \rho(\mathbf{r}') r'^{\lambda} Y_{\lambda}^{\mu}(\theta, \phi) d\mathbf{r}' .$$

Ако протоните се приемат за точкови заряди, този израз става

$$[\text{VIII.49}] \quad \hat{M}(E\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^Z e r_k^{\lambda} Y_{\lambda}^{\mu}(\theta_k, \phi_k)$$

Засега обаче ще работим с непрекъснатата плътност. Операторът  $\hat{M}(E\lambda, \mu)$  има  $(2\lambda+1)$  компоненти, които са свързани с класическите мултиполни моменти по следния начин

$$[\text{VIII.50}] \quad q = \sqrt{4\pi} \hat{M}(E0,0), \quad p_z = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \hat{M}(E1,0), \quad Q_{zz} = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \hat{M}(E2,0).$$

Тези изрази показват, че величината  $r^\lambda Y_\lambda^\mu$  може да играе роля на вълнова функция на състояние, характеризиращо се с квантови числа на ъгловия момент  $\mathbf{l} = \lambda$  и на неговата проекция по оста  $z$  ( $m_l = \mu$ ). От тук следва, че при ротация на координатната система квадруполният момент се трансформира като вълнова функция от горния вид.

Електричният квадруполен момент ( $\lambda = 2$ ) има положителна четност, защото  $\pi = (-1)^\lambda$ , а диполният момент е с отрицателна четност.

Физическата наблюдаема *мултиполен момент на ядрото* представлява средната стойност на съответния оператор в стационарно състояние на ядрото. Ако  $|Im_l\rangle$  е вълновата функция на ядрото в стационарно състояние с ъглов момент  $\mathbf{l}$  и проекция  $m_l$ , под мултиполен момент от порядък  $\lambda$  се разбира средната стойност на оператора, изчислен в състоянието с максимална проекция на момента, т.е.  $|I\rangle$  ( $m_l^{\max} = I$ )

$$[\text{VIII.51}] \quad Q_\lambda = \langle I | \hat{M}(E\lambda\mu) | I \rangle.$$

Квадруполният момент  $Q$  е

$$[\text{VIII.52}] \quad Q = \langle I | \hat{M}(E2,0) | I \rangle.$$

*Забележка:* При прецесия на ядрото около ъгловия момент  $\mathbf{l}$  измереният квадруполен момент е усреднената стойност от един период на въртене.

Когато зарядовото разпределение има ос на симетрия, какъвто е случая, когато ядрото има формата на ротационен елипсоид, (в СЦМ това е оста  $z'$ ) за средните стойности се получава

$$\langle Q_{ij} \rangle = 0 \quad \text{при } j \neq i.$$

Единствени ненулеви са диагоналните елементи на тензора. Освен това при тази форма на ядрото

$$[\text{VIII.53}] \quad \langle Q_{x'x'} \rangle = \langle Q_{y'y'} \rangle,$$

а тъй като  
се получава

$$\langle Q_{x'x'} \rangle + \langle Q_{y'y'} \rangle + \langle Q_{z'z'} \rangle = 0,$$

$$[\text{VIII.54}] \quad \langle Q_{x'x'} \rangle = \langle Q_{y'y'} \rangle = -\frac{1}{2} \langle Q_{z'z'} \rangle.$$

Вижда се, че за познаване на квадруполния момент е необходима само една величина и обикновено се избира това да е

$$[\text{VIII.55}] \quad \langle Q_{z'z'} \rangle = \int_{\tau} (3z'^2 - r'^2) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' .$$

за класическо описание, а за квантово-механическо – операторът  $\hat{M}(E2,0)$ .

### 5.3. Квадруполен момент на ядро с постоянна деформация

Предполагаме, че ядрото има форма на ротационен елипсоид с голяма и малка полуоси  $c$  и  $a$  съответно, и че зарядът е равномерно разпределен в този обем. В координатната система, свързана с ядрото (началото в центъра на елипсоида, а оста  $z'$  е голямата полуос) собственият квадруполен момент на ядрото е

$$[\text{VIII.56}] \quad eQ_0 = \int_{\tau} \rho(3z'^2 - r'^2) d\mathbf{r}'$$

където  $\rho(\mathbf{r}')$  е плътността на заряда. Ако направим субституцията  $\gamma^2 = x'^2 + y'^2$ , от уравнението на елипсоида

$$[\text{VIII.57}] \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 - \frac{z'^2}{c^2}$$

и условието  $a = b$  ще получим

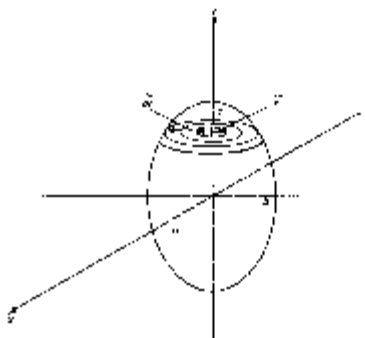
$$[\text{VIII.58}] \quad \gamma = a\sqrt{1 - (z'/c)^2} .$$

Тогава квадруполният момент ще бъде

$$[\text{VIII.59}] \quad eQ_0 = \int \rho(3z'^2 - z'^2 - \gamma^2) dz' 2\pi\gamma d\gamma = 2\pi\rho \int_{-c}^{+c} dz' \int_0^{a\sqrt{1-(z'/c)^2}} (2z'^2 - \gamma^2) \gamma d\gamma ,$$

където обемният елемент  $2\pi\gamma d\gamma$  представлява пръстен в диск на разстояние  $z'$  от „екватора” – фиг. VIII.5. След интегриране се получава

$$[\text{VIII.60}] \quad eQ_0 = \frac{8}{15} \pi \rho c a^2 (c^2 - a^2) = \frac{2}{5} Ze(c^2 - a^2),$$



Фиг. VIII.5

Към определяне квадруполния момент на ядро с постоянна деформация

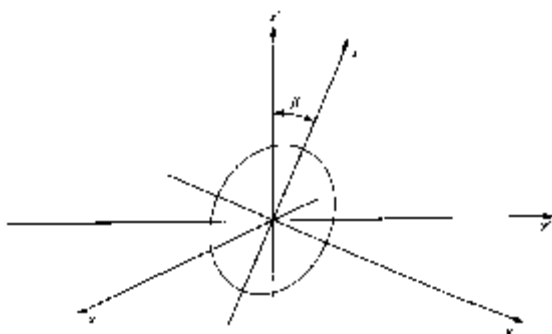
тъй като плътността  $\rho(\mathbf{r}')$  по обема на елипсоида  $\tau = \frac{4\pi}{3} c a^2$  дава пълния заряд  $Ze$ .

Ако ядрото има форма на сфероид, т.е. малко отклонение от формата на сфера, и се

въведе средният радиус  $R_0 = \frac{c+a}{2}$ , отклонението от средния радиус  $\Delta R = c - a$  и деформацията  $\beta = \frac{\Delta R}{R_0}$ , то за квадруполния момент се получава

$$[\text{VIII.61}] \quad Q_0 = \frac{4}{5}ZR_0^2\beta,$$

от което се вижда, че чрез измерване на квадруполния момент може да се определи деформацията  $\beta$  на ядрото. Алгебричният знак на  $Q$  ще зависи от това коя от двете полуоси е по-голяма:  $Q_0 > 0$  при издължено ядро (prolate) и  $Q_0 < 0$  при сплескано ядро (oblate).



Фиг. VIII.6

Системата  $(x', y', z')$  е свързана с външното поле, а  $(x, y, z)$  – с оста на симетрия на ядрото.

#### 5.4. Взаимодействие на заряд с непрекъснато разпределение с външно електрично поле

Нека имаме аксиално симетрично (спрямо оста  $z$ ) външно поле. Самото ядро е аксиално симетрично спрямо координатната система  $(x', y', z')$ . Външното поле може да бъде създадено от атомната обвивка на ядрото и в този случай оста  $z$  е насочена по вектора  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  – пълният механичен момент на атома. Нека предположим, че осите  $x$  и  $x'$  съвпадат – фиг. VIII.6.

Електричният потенциал  $\Phi(x, y, z)$  на външното поле може да се развие в ред на Тейлор около точката 0, съвпадаща с центъра на тежестта на ядрото

$$[\text{VIII.62}] \quad \begin{aligned} \Phi(x, y, z) = & \Phi(0) + x \frac{\partial \Phi(0)}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi(0)}{\partial y} + z \frac{\partial \Phi(0)}{\partial z} + \\ & + \frac{1}{2} \left[ x^2 \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial x \partial y} + \dots + z^2 \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial z^2} \right] + \dots \end{aligned}$$

*Енергия на взаимодействие в лабораторна система*

Енергията на системата ядро-външно електрично поле се определя от израза

$$\begin{aligned} W = & \int \rho(x, y, z) \Phi(x, y, z) d\mathbf{r} = \\ = & \int \rho(x, y, z) \Phi(0) d\mathbf{r} + \int \rho(x, y, z) \left[ x \frac{\partial \Phi(0)}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi(0)}{\partial y} + z \frac{\partial \Phi(0)}{\partial z} \right] d\mathbf{r} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \int \rho(x, y, z) \left[ x^2 \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial x \partial y} + \dots + z^2 \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial z^2} \right] d\mathbf{r} + \dots =$$

[VIII.63]

$$= W_C + W_D + W_Q + \dots$$

Първият от тези членове дава кулоновата енергия, свързана с еквивалентен точков заряд. Вторият член представлява енергията на взаимодействие на диполния момент на зарядовото разпределение в постоянното поле  $\left[ \frac{\partial \Phi(0)}{\partial x}, \frac{\partial \Phi(0)}{\partial y}, \frac{\partial \Phi(0)}{\partial z} \right]$  и е равна на нула, понеже диполният момент на ядрото е нула.

Третият член дава взаимодействието на квадруполния момент с външното поле, което е симетрично спрямо оста  $z$ , така че  $\Phi$  зависи от  $x$  и  $y$  само чрез тяхната квадратична сума, която пък е функция от разстоянието до оста  $z$ . От това следва, че

$$[\text{VIII.64}] \quad \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial y \partial z} = 0.$$

Също поради симетрията  $\frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial y^2}$ . Ако предположим, че полето  $\Phi$  възниква от кулоновия заряд на атомните електрони и пренебрегнем ненулевата плътност на  $s$ -електроните в ядрения обем, то  $\Phi$  удовлетворява  $\Delta \Phi = 0$  в т. 0, т.е.

$$\frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial z^2} = 0$$

и следователно

$$[\text{VIII.65}] \quad \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial z^2} = -2 \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial y^2}.$$

В крайна сметка за енергията на взаимодействие се получава

$$W_Q = \frac{1}{2} \int \rho(x, y, z) \left[ z^2 \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial z^2} - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial z^2} \right] d\mathbf{r} = \frac{1}{4} \Phi_{zz} \int \rho(x, y, z) (3z^2 - r^2) d\mathbf{r},$$

където  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , така че накрая имаме

$$[\text{VIII.66}] \quad W_Q = \frac{1}{4} \Phi_{zz} \int \rho(x, y, z) (3z^2 - r^2) d\mathbf{r} = \frac{1}{4} \Phi_{zz} eQ.$$

Тук  $\Phi_{zz} = \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial z^2}$  е градиентът на електричното поле по оста  $z$  в т.0.

По-горе пренебрегнахме електронната плътност в областта на ядрото. Електроните обаче имат ненулева вероятност да бъдат намерени в областта на

ядрото, по-специално  $s$ -електроните. Ако се вземе предвид тази плътност  $\rho_e(0)$ , към енергията на взаимодействие  $W_Q$  трябва да се добави член

$$[\text{VIII.67}] \quad \delta W_Q = \frac{2\pi}{3} \rho_e(0) \langle R^2 \rangle \quad (\text{в с-ма CGS})$$

или

$$\delta W_Q = \frac{1}{6\epsilon_0} \rho_e(0) \langle R^2 \rangle \quad (\text{в СИ}),$$

който е пропорционален на средния квадратичен радиус на ядрото. Този член съответства на отместване на всички нива с малката величина  $\delta W_Q$ , наречена *изотопно отместване*. За него ще стане дума при Ефекта на Мьосбауер (Част VII), а се извежда в тази част, Допълнение 8.

*Енергия на взаимодействие в координатна система, свързана с ядрото*  
Интегралът в [VIII.63] трябва да се изрази в координатите на ядрото  $(x', y', z')$  – фиг. VIII.6. Нека  $\alpha$  е ъгълът между осите  $z$  и  $z'$ . Връзката между едните и другите координати е

$$\begin{aligned} z &= z' \cos \alpha - y' \sin \alpha & (x = x') \\ y &= z' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{aligned}$$

Тогава

$$[\text{VIII.68}] \quad W_Q = \frac{1}{4} \Phi_{zz} \int_{\tau} \rho(x', y', z') (3z'^2 \cos^2 \alpha + 3y'^2 \sin^2 \alpha - 6y'z' \sin \alpha \cos \alpha - r'^2) d\mathbf{r}'.$$

В тази координатна система зарядовото разпределение има ос на симетрия ( $z'$ ) и следователно

$$[\text{VIII.69}] \quad \int_{\tau} y'z' \rho(x', y', z') d\mathbf{r}' = 0.$$

Също от симетрията следва, че

$$[\text{VIII.70}] \quad \begin{aligned} \int y'^2 \rho(x', y', z') d\mathbf{r}' &= \int x'^2 \rho(x', y', z') d\mathbf{r}' = \frac{1}{2} \int (x'^2 + y'^2) \rho(x', y', z') d\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{2} \int (r'^2 - z'^2) \rho(x', y', z') d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

Като заместим в израза [VIII.68], за  $W_Q$  се получава:

$$[\text{VIII.71}] \quad \begin{aligned} W_Q &= \frac{1}{4} \Phi_{zz} \int_{\tau} \rho(x', y', z') \left[ 3z'^2 \cos^2 \alpha + \frac{3}{2} (r'^2 - z'^2) \sin^2 \alpha - r'^2 \right] d\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{8} \Phi_{zz} (3 \cos^2 \alpha - 1) \int_{\tau} \rho(x', y', z') (3z'^2 - r'^2) d\mathbf{r}' = \frac{1}{8} \Phi_{zz} e Q_0 (3 \cos^2 \alpha - 1). \end{aligned}$$

Тук  $Q_0$  е собственият квадруполен момент, както е дефиниран с [VIII.55] и [VIII.56]. Формула [VIII.71] дава енергията на взаимодействие на ядро с квадруполен момент  $Q_0$ , когато оста на симетрия на ядрото сключва ъгъл  $\alpha$  с оста

на симетрия на външно аксиално симетрично поле с градиент по тази ос  $\Phi_{zz}$ .

### 5.5. Собствен и спектроскопичен квадруполен момент

Собственият квадруполен момент  $Q_0$  се дефинира спрямо координатната система на ядрото, това е системата  $(x', y', z')$  на фиг. VIII.6. Той представлява истинският квадруполен момент, носещ информация за формата на ядрото. Той се различава от наблюдавания момент  $Q$ , наречен ефективен или *спектроскопичен квадруполен момент*, който се дефинира спрямо лабораторната координатна система, използвана за измерване на квадруполния момент, и в случая оста  $z$  се задава от посоката на външното електрично поле (вектора  $\hat{J}$  на атомната обвивка). Спектроскопичният квадруполен момент е винаги по-малък от собствения. От сравняването на изрази [VIII.61] и [VIII.66] се вижда връзката между двата момента

$$[VIII.72] \quad Q = Q_0 \frac{3\cos^2 \alpha - 1}{2}.$$

От извода на [VIII.66] и [VIII.71] се вижда, че става дума за класическата връзка между двата момента.

### 5.6. Връзка между квадруполните моменти в квантовата механика

Ядрено състояние, притежаващо механичен момент  $\hat{I}$ , има  $(2I + 1)$  изродени състояния и всяко от тях може да се характеризира със свой квадруполен момент, т.е. имаме общо  $(2I + 1)$  квадруполни момента:

$$Q(m) = \langle Im_l | \hat{M}(E2) | Im_l \rangle,$$

където с  $|Im_l\rangle$  сме означили вълновата функция на собствено състояние с ъглов момент  $I$  и проекция по оста  $z$   $m_l$ .

Връзката между тези различни величини може да се намери лесно. Един от тези квадруполни моменти беше избран (израз [VIII.52]) да отговаря на най-голямата проекция на  $I$ :  $Q = Q(m_l^{\max} = I)$ , а ъгълът беше избран като ъгъл между посоката на полето  $\Phi$  и  $I$

$$\cos^2 \alpha = \frac{I^2}{I(I+1)}.$$

Следователно, като заместим тази стойност на  $\cos \alpha$  в [VIII.72] получаваме

$$[VIII.73] \quad Q(m_l = I) = \frac{1}{2} Q_0 \left[ \frac{3I^2}{I(I+1)} - 1 \right] = \frac{1}{2} Q_0 \frac{2I-1}{I+1}$$

$$[VIII.74] \quad Q(m_l) = \frac{1}{2} Q_0 \left[ \frac{3m_l^2}{I(I+1)} - 1 \right],$$

откъдето за отношението им се получава



$$[\text{VIII.75}] \quad \frac{Q(m_I)}{Q_0} = \frac{3m_I^2 - I(I+1)}{I(2I-1)}.$$

Може да се случи спинът на ядрото  $I$  да не е насочен по неговата ос на симетрия, например както е показано на фиг. IV.28. Нека с  $K$  означим проекцията на спина по тази ос. Тогава за спектроскопичния квадруполен момент се получава

$$[\text{VIII.76}] \quad Q = Q_0 \left[ \frac{3K^2}{I(I+1)} - 1 \right].$$

Тази връзка обаче не е точната стойност. С изчисляване на матричните елементи се получава (тук няма да привеждаме този извод)

$$[\text{VIII.77}] \quad Q = Q_0 \frac{3K^2 - I(I+1)}{(I+1)(2I+3)}.$$

За повечето ядра в основно състояние  $I = K$  и тогава връзката между собствения и спектроскопичния ефективен квадруполен момент е

$$[\text{VIII.78}] \quad Q = Q_0 \frac{I(2I-1)}{(I+1)(2I+3)}.$$

Енергията на взаимодействие с външно поле също ще има различни стойности в зависимост от стойностите на  $Q$

$$[\text{VIII.79}] \quad W_Q = \frac{1}{8} \Phi_{zz} e Q_0 \frac{(2I-1)}{(I+1)}$$

и съответно израждането по  $m_I$  ще се снемее. Като се има предвид израза [VIII.73]

$$[\text{VIII.80}] \quad \begin{aligned} (W_Q)_{m_I} &= \frac{1}{8} \Phi_{zz} e Q_0 \left[ \frac{3m_I^2}{I(I+1)} - 1 \right] = \frac{1}{8} \Phi_{zz} e Q \frac{2(I+1)}{2I-1} \cdot \frac{3m_I^2 - I(I+1)}{I(I+1)} = \\ &= \frac{1}{4} \Phi_{zz} e Q \frac{3m_I^2 - I(I+1)}{I(2I-1)}. \end{aligned}$$

Нека разгледаме специалните случаи  $I = 0$  и  $I = 1/2$ . Нека предположим, че ядрото има форма на ротационен елипсоид с ос на симетрия  $z'$ . Когато  $I = 0$  няма да има въртене около оста на симетрия. Поради липсата на ъглов момент около тази ос ядрото може да се ориентира произволно в пространството и тогава всички погорни разсъждения отпадат. Произволната ориентация в пространството е еквивалентна на сферично симетрично зарядово разпределение. Следователно, макар и да има собствен квадруполен момент  $Q_0 \neq 0$ , спектроскопичният квадруполен момент на ядрото е нула. В случая  $I = 1/2$   $\cos \alpha = 1/\sqrt{3}$  и тогава при всяка ориентация на ядрото величината  $(3\cos^2 \alpha - 1) = 0$ . Отново спектроскопичният

квадруполен момент ще е равен на нула. Така се достига до важния извод, че спектроскопичният квадруполен момент не е нула само, ако  $I \geq 0$ . Този извод се потвърждава от експерименталните данни.

### 6. Изотопичен формализъм

Формално изоспинът се въвежда като ъгловия момент, т.е. аналогично на спина за частиците. Дадено изоспиново състояние се характеризира с величините  $T^2$  и  $T_z$  и съответно вълнова функция, удовлетворяваща уравнението за собствените стойности

$$[\text{VIII.81}] \quad \begin{aligned} \hat{T}^2 |T, T_z\rangle &= T(T+1) |T, T_z\rangle \\ \hat{T}_z |T, T_z\rangle &= T_z |T, T_z\rangle \end{aligned}$$

Ако  $\hat{H}_я$  е частта от хамилтониана, отговорна за силното взаимодействие, независимостта на ядрените сили от заряда ще означава, че  $\hat{H}_я$  комутира с оператора на изоспина, което означава  $[\hat{H}_я, \hat{T}^2] = 0$

Нуклеонният дублет (p,n) има изоспин  $t = 1/2$  и двете му разновидности имат проекции  $t_z = \pm 1/2$ . Постулира се

$$[\text{VIII.82}] \quad t_z |p\rangle = \frac{1}{2} |p\rangle \quad \text{и} \quad t_z |n\rangle = -\frac{1}{2} |n\rangle$$

Електричният заряд се представя с оператора  $\hat{Q} = e \left( \frac{1}{2} + \hat{T}_z \right)$ .

Изоспинът на система от нуклеони се определя адитивно

$$[\text{VIII.83}] \quad \hat{T} = \sum_{i=1}^A \hat{t}_i \quad \text{и} \quad \hat{T}_z = \sum_{i=1}^A (\hat{t}_z)_i$$

За дадено ядро проекцията на изотопичния спин е свързана с асиметрията, т.е. с разликата в броя на протоните и неутроните. Наистина

$$[\text{VIII.84}] \quad \hat{T}_z = Z t_z(p) + N t_z(n) = \frac{Z-N}{2} = \frac{1}{2} (2Z - A) = Z - \frac{A}{2}.$$

За ядро със заряд  $Q = eZ$  е в сила уравнението за собствените стойности

$$[\text{VIII.85}] \quad \hat{T}_z |T, T_z\rangle = \left( \frac{Q}{e} - \frac{A}{2} \right) |T, T_z\rangle,$$

което се получава от [VIII.84] – сумиране на  $t_z$  за всички нуклеони в ядрото.

Запазването на заряда за система от нуклеони означава, че операторите  $\hat{Q}$  и  $\hat{T}_z$  комутират с оператора на силното взаимодействие  $\hat{H}_я$ .

$$[\hat{H}_я, \hat{Q}] = [\hat{H}_я, \hat{T}_z]$$

Изоспинът  $T$  на едно ядро представлява резултат от сумирането на изоспиновете ( $t = 1/2$ ) на  $A$  нуклеона, което може да взема стойности

$$\frac{N-Z}{2} < T < \frac{A}{2}, \quad \text{ако } N > Z$$

или

$$\frac{Z-N}{2} < T < \frac{A}{2}, \quad \text{ако } N < Z.$$

Обикновено ядрата в основното си състояние имат минималния възможен изоспин

$$[\text{VIII.86}] \quad T_{\text{осн}} = |T_z| = \frac{|N-Z|}{2}.$$

Системата от два нуклеона може да съществува в триплетно и синглетно изоспинови състояния

триплетно –  $T = 1$  с три стойности на  $T_z = -1, 0, +1$

синглетно –  $T = 0$  с една стойност на  $T_z = 0$ .

Вълновите функции на тези две състояния са показани в таблица VIII.1.

Таблица VIII.1 – Стойности на изотопичния спин и неговата проекция

$T^2$	$T_z$	Състояние	система
1	1	$ p\rangle p\rangle$	протон-протон
	0	$( p\rangle n\rangle +  n\rangle p\rangle)$	(p,n) симетрично изоспиново
	-1	$ n\rangle n\rangle$	неутрон-неутрон
0	0	$( p\rangle n\rangle -  n\rangle p\rangle)$	(p,n) антисиметрично изоспиново

Изоспинът не се запазва при електромагнитното и при слабото взаимодействие.

Деутронът, единственото свързано състояние на системата от два нуклеона, съответства на синглетното състояние  $T_z = 0 = T^3$ . За силните взаимодействия е в сила *обобщеният принцип на Паули*, според който система от тъждествени

<sup>2</sup> Трябва да се отбележи, че докато  $T_z$  е винаги интеграл на движение и характеризира ядрените състояния (тъй като винаги  $[\hat{H}_я, T_z] = 0$ ), то  $T$  е „добро квантово число“, т.е. проекцията е интеграл на движението само ако  $[\hat{H}_я, \hat{T}^2] = 0$ . Това е изпълнено предимно за леки ядра. За такива ядра всяко състояние се характеризира с квантовите число  $T$  и  $T_z$ . За по-тежки ядра условието  $[\hat{H}_я, \hat{T}^2] = 0$  представлява само приближение.

<sup>3</sup> Ако предположим  $T = 1$  ще следва, че е възможно съществуването на свързани състояния на два протона и на два неутрона.

фермиони може да се намира само в състояния антисиметрични спрямо обмена на частици в пространството, представляващо произведение от координатното, спиновото и изоспиновото състояния. Ако  $L$  е ъгловият момент (четност  $(-1)^L$ ),  $S$ -спинът, а  $T$ -изоспинът, антисиметрично състояние означава сумата от тези три числа да е нечетна

$$L + S + T = 1, 3, \dots - \text{нечетно число.}$$

Изоспиновият формализъм е в сила за всички адрони<sup>4</sup>, с неговото въвеждане те се обединяват в *изомултиплети* – частици с близки маси и отличаващи се само по електричния си заряд. Пример за триплет от мезони, също адрони, е тройката  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  и  $\pi^0$ . Пример за квадруплет са т. нар. резонанси: четири частици  $\Delta^{++}$ ,  $\Delta^+$ ,  $\Delta^0$  и  $\Delta^-$  с близки маси и заряди  $+2e$ ,  $+e$ ,  $0$  и  $-e$ .

### 7. Интеграл на Ферми за леки ядра.

Интегралът на Ферми [II.73] е свързан с функцията на Ферми, въведена, за да се отчете кулоновото взаимодействие между излитащия от ядрото електрон (или позитрон) и ядро с крайни размери.

Като използваме зависимостите  $E_e = m_0c^2 + T_e$ , а същото може да се напише и за  $T_e^{\max}$ , интегралът на Ферми може да се запише и така

$$[\text{VIII.87}] \quad f(Z', E_e^{\max}) = \int_0^{p_{\max}} F(Z', p) \left( \frac{E_e^{\max} - E_e}{m_0c^2} \right)^2 \left( \frac{p}{m_0c} \right) \frac{dp}{m_0c}.$$

В случая на много леко ядро с малък брой протони, казано строго, при  $Z' = 0$ , функцията  $F(Z', p)$  може да се приеме за единица и тогава интегралът на Ферми може да се реши аналитично:

$$[\text{VIII.88}] \quad f(Z', E_e^{\max}) = \int_0^{p_{\max}} \left( \frac{E_e^{\max} - E_e}{m_0c^2} \right)^2 \left( \frac{p}{m_0c} \right) \frac{dp}{m_0c} \sim \left( \frac{E_e^{\max}}{m_0c^2} \right)^5,$$

което може да се проследи както следва. Нека използваме връзката  $p^2c^2 = E_e^2 - m_0^2c^4$  и означим с  $I$  интеграла

$$[\text{VIII.89}] \quad I = \int_{\frac{m_0c^2}{E_e^{\max}}}^{\frac{E_e^{\max}}{m_0c^2}} \left[ 1 - \frac{E_e}{E_e^{\max}} \right]^2 \left\{ \left( \frac{E_e}{E_e^{\max}} \right)^2 - \frac{m_0^2c^4}{(E_e^{\max})^2} \right\}^{1/2} \frac{E_e}{E_e^{\max}} \frac{dE_e}{E_e^{\max}}.$$

Тогава

$$f(Z', E_e^{\max}) = \left( \frac{E_e^{\max}}{m_0c^2} \right)^5 \cdot I.$$

Полагаме  $x = \frac{E_e}{E_e^{\max}}$  и  $a = \frac{m_0c^2}{E_e^{\max}}$  и интегралът става  $I = \int_a^1 (1-x)^2 \sqrt{x^2 - a^2} dx$ . Ако предположим, че  $a$  е малко, т.е.  $E_e^{\max} \gg m_0c^2 (= 0,511 \text{ MeV})$ , ще имаме

<sup>4</sup> Адрони (hadrons) се наричат частиците, участващи в силното взаимодействие.

$$I = \int_0^1 (1-x)^2 x^2 dx \sim \frac{1}{30}. \text{ Тогава}$$

$$[\text{VIII.90}] \quad f(0, E_e^{\max}) = \frac{1}{30} \left( \frac{E_e^{\max}}{m_0 c^2} \right)^5$$

и константата на разпадане става

$$[\text{VIII.91}] \quad \lambda = \text{const} \left( \frac{E_e^{\max}}{m_0 c^2} \right)^5.$$

### 8. Изомерно отместване при ефекта на Мьосбауер

В тази част, в допълнението за ядрени електрични моменти разгледахме енергията на взаимодействие на ядрото с външно поле, в случая полето на електронната обвивка и показахме, че интерес представлява членът на квадруполното взаимодействие  $W_Q$ . Крайният израз за взаимодействието [VIII.61] беше получен при предположение, че плътността на електроните в областта на ядрото е пренебрежима.

Електричният потенциал  $\Phi(x, y, z)$  взаимодейства със зарядовото разпределение  $\int_V \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$  и енергията на взаимодействие е

$$W = \int_V \Phi(x, y, z) \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = W_C + W_D + W_Q + \dots \text{ Първият член дава взаимодействието с}$$

точков заряд, вторият – с дипол (но той е равен на нула, тъй като ядрата нямат диполен момент) и третият член дава взаимодействието с квадруполния момент на ядрото [VIII.61].

Ако обаче се отчете и електронната плътност в областта на ядрото, към енергията на взаимодействието трябва да се добави и члена [VIII.50], който не трябва да се пренебрегва. Тогава енергията на взаимодействие става

$$[\text{VIII.92}] \quad W_Q = \frac{1}{6} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} Q_{xx} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} Q_{yy} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} Q_{zz} \right] + \frac{e}{6\epsilon_0} \Delta \Phi \int_V r^2 \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

От електростатиката е известно, че у-нието на Поасон за полето, което създават атомните електрони в центъра на ядрото, е:

$$[\text{VIII.93}] \quad \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial z^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(0) = \frac{e}{e_0} |\psi(0)|^2,$$

където  $\rho(0)$  е електронната плътност в областта на ядрото. Към първия член в [VIII.87] трябва да се добави допълнителната енергия

$$[\text{VIII.94}] \quad \delta W_Q = \frac{e}{6\epsilon_0} |\psi(0)|^2 \int_V r^2 \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{Ze^2}{6\epsilon_0} |\psi(0)|^2 \langle r^2 \rangle.$$

Тук  $\langle r^2 \rangle = \frac{\int_V r^2 \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\int_V \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}$  е средноквадратичният радиус на ядрото, а  $\int_V \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = Ze$ .

Ако електронната плътност е постоянна по целия ядрен обем,  $\rho = \frac{Ze}{V} = \frac{3Ze}{4\pi R^3}$ , където  $R$  е зарядовият радиус на ядрото, ще получим:

$$[\text{VIII.95}] \quad \langle r^2 \rangle = \frac{3}{4\pi R^3} \int_V r^2 d\mathbf{r} = \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} dj = \frac{3}{5} R^2,$$

Тогава [VIII.94] става

$$\delta W_Q = \frac{Ze^2}{10\epsilon_0} |\psi(0)|^2 R^2 \quad (\text{в СИ}).$$