

Записки по
физика на елементарните частици
доц. д-р Леандър Литов

София
2008

Съдържание

1	Кинематика на елементарни частици	9
1.1	Пространство на Минковски	9
1.2	Преобразувания на Лоренц	10
1.3	4-скорост , 4-импулс и Енергия	11
1.4	Релативистки инварианти	12
1.5	Отправни системи	13
1.6	Закопи за съхранение на енергията и импулса	15
1.7	Единици за измерване. Система мерни единици $c = \hbar = 1$	17
2	Квантова Механика.Представяне на Шрьодингер,представяне на Хайзенберг и представяне на взаимодействието(Дирак).Матрица на разсейването	19
2.1	Означения на Дирак	19
2.2	Представяния на Шрьодингер, Хайзенберг и на взаимодействие(Дирак)	20
2.3	Матрица на разсейването	24
3	Фазов обем.Вероятност за разпад и сечение на процес	27
4	Теорема на Ньотер	29
4.1	Лагранжев формализъм	29
4.1.1	Принцип на най - малкото действие в класическата механика	29
4.1.2	Принцип на стационарното действие в теория на полето . .	31
4.2	Теорема на Ньотер	35
4.2.1	Тензор на енергията и импулса	39
4.2.2	Съхранение на заряда	40
4.2.3	Скаларно поле	40
4.2.4	Спинорно поле	41

5	Симетрии	43
5.1	Преобразувания на симетрия	43
5.1.1	Унитарни преобразувания	43
5.1.2	Типове преобразувания	44
5.2	Вътрешни симетрии	46
5.2.1	Електричен заряд Q	46
5.2.2	Барионно число B	47
5.2.3	Лептонно число L	48
5.2.4	Странност S	49
5.2.5	Изоспин.	51
5.3	Дискретни симетрии	54
5.3.1	Пространствени отражения. Орбитална четност	54
5.3.2	Вътрешна(собствена) четност	55
5.3.3	Обръщане на времето	58
5.3.4	Принцип на детайлния баланс	59
5.3.5	Зарядово спрягане	59
5.3.6	G-четност	62
6	Кварк-партонен модел	63
6.1	Лептон-нуклонно разсейване	63
6.1.1	Еластично разсейване	63
6.1.2	Дълбоко нееластично разсейване	63
6.2	Кварков модел	64
6.2.1	SU(3) - класификация на адроните. Кварки.	64
6.2.2	Група SU(2)	65
6.2.3	Група SU(3)	67
6.2.4	Непреводими представяния на групата SU(3)	68
6.2.5	Мезони	70
6.2.6	Бариони	71
6.2.7	Барионни състояния	73
6.2.8	Непреводими представяния на групата SU(3)	74
6.2.9	Разцепване по маси в SU(3)	75
6.3	Цвят	79
6.3.1	Указания за цвят	80
6.4	Дълбоко нееластично електронно-протонно разсейване	82

7	Калибровъчни теории	85
7.1	Групови симетрии	85
7.2	Класификация на вътрешните симетрии	86
7.3	Калибровъчна теория за абелева група на симетрия	89
7.4	Неабелева калибровъчна теория на Янг и Милс	93
7.5	Калибровъчна теория за произвола група на симетрия	95
8	Силни взаимодействия	99
8.1	Асимптотична свобода	99
8.2	Цвят и глюони	105
8.3	Експериментални указания за съществуването на цвят	108
8.4	Квантова хромодинамика (QCD)	111
8.5	Квантова хромодинамика	111
8.5.1	Лагранжиан на квантовата хромодинамика	111
8.5.2	Квантуване	115
8.5.3	Квантови примки	116
8.5.4	Пертурбативна квантова хромодинамика	128
9	Слаби взаимодействия	145
9.0.5	Неутрални токове	149
9.0.6	Теория на електрослабото взаимодействие	150
10	Стандартен модел	153
10.1	Експериментални факти при ниски енергии	153
10.1.1	Разпад $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$	153
10.1.2	Бета разпад	154
10.1.3	$\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$	155
10.1.4	$\Delta S = 1$ преходи	156
10.1.5	$V - A$ модел	156
10.2	Поведение при високи енергии	157
10.2.1	Хипотеза за промеждутъчен векторен бозон	158
10.2.2	Неутрални токове	160
10.2.3	Особености на слабото взаимодействие	161
10.3	$SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ теория	162
10.3.1	Взаимодействия на заредени токове	165
10.3.2	Взаимодействие на неутрални токове	166
10.3.3	Самодействие на калибровъчните полета	168
10.4	Спонтанно нарушение на симетрията	169

10.4.1	Теорема на Голдстоун	170
10.4.2	Механизъм на Хигс	172
10.4.3	Предсказания	175
10.4.4	Хигс бозон	177
10.5	Фермионни поколения	177
10.5.1	ГИМ механизъм	177
10.5.2	Фермионни маси	179
10.5.3	Смесване на ароматите	180
10.5.4	Параметри на Стандартния модел	184
10.6	Смесване на кварките	184
10.6.1	V_{ud}	186
10.6.2	V_{us}	187
10.6.3	V_{cd}	188
10.6.4	V_{cs}	188
10.6.5	V_{cb}	189
10.6.6	V_{ub}	189
10.6.7	V_{tb}	190
10.6.8	Unitarity	190
10.6.9	Индиректно определяне	191
10.7	Лептонна универсалност на заредените токове	193
11	Взаимодействие на високоенергетични частици с веществото	195
11.1	Взаимодействия на фотони с веществото	197
11.1.1	Фотоефект	197
11.1.2	Комптъново разсейване	198
11.1.3	Раждане на двойка електрон - позитрон	200
11.2	Електромагнитни каскади	201
11.3	Адронни лавини	207
11.4	Взаимодействия на заредени частици	208
11.4.1	Кинематика	208
11.5	Разсейване	209
11.5.1	Разсейване на Ръдърфорд	209
11.6	Многократно разсейване	211
11.7	Енергетични загуби на заредени частици във вещество	212
11.7.1	Йонизационни загуби	212
11.7.2	Разпределение на Ландау	216

12 Детектори на високоенергетични частици	221
12.1 Трекови детектори	221
12.1.1 Измерване на импулса на заредени частици	221
12.1.2 Многократно разсейване	222
12.2 Газови трекови детектори	223
12.2.1 Йонизация в газове	223
12.2.2 Газово усилване	225
12.2.3 Формиране на сигнала	226
12.2.4 Режими на работа	227
12.2.5 Дрейф на електроните в електрично поле	228
12.3 Многонишкова пропорционална камера	231
12.4 Дрейфови камери	235
12.5 Камери със съпротивителна плоскост (RPC)	238
12.6 Време - проекционни камери (TPC - time projection chambers) . .	240
12.7 Твърдотелни трекови детектори. Силициеви стрипови детектори .	243
12.8 Сцинтилации в материалите	251
12.8.1 Кристали	252
12.8.2 Органични сцинтилатори	252
12.8.3 Пластмаси	252
12.9 Сцинтилационни детектори	253
12.10 Черенковско излъчване	263
12.11 Черенковски броячи	264
12.12 Преходно излъчване	271
12.13 Спирачно лъчение (Bremsstrahlung)	272
12.14 Критична енергия	273
12.15 Ядрени взаимодействия	274
12.16 Взаимодействие на неутрони с веществото	275
12.17 Електромагнитни каскади	276
12.18 Адронни лавини	278
12.19 Адронни лавини	279
12.20 Електромагнитни и адронни калориметри	280
12.20.1 Разделителна способност по енергии	281
12.20.2 Електромагнитни калориметри	283
12.20.3 Адронни калориметри	285
13 Ускорители	289
13.1 Ускорители: Принципи на действие, видове, основни характеристики	289
13.1.1 Ускорители с пряко действие	290

13.1.2	Резонансни ускорители	291
13.1.3	Синхротрон, фазотрон, синхрофазотрон	294
13.2	Принцип на автофазировката	296
13.2.1	Автофазировка	301
13.2.2	Фокусировка на снопа	301
13.2.3	Мека фокусировка	301
13.2.4	Твърда фокусировка	301
13.2.5	Излъчване	302
13.2.6	Ускорители на насрещни снопове	302
13.2.7	Светимост	303
13.3	Ускорители в CERN	304

Глава 1

Кинематика на елементарни частици

1.1 Пространство на Минковски

В теорията на относителността точките в пространство-времето се описват с 4-вектори $x_\mu \equiv (x_0, \vec{x}) = (x_0, x_i) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ (гръцките букви $\mu, \nu, \sigma, \tau, \dots$ пробягват стойностите $0, 1, 2, 3$), като $x_\mu \in \mathbb{M}^4$. Ще работим в т.нар. "естествена" система мерни единици : $c = \hbar = 1$. В такъв случай $x_0 = c.t = t$, а x_i са пространствените координати ($i = 1, 2, 3$). Скаларното произведение на два вектора се дефинира посредством метричния тензор $g_{\mu\nu}$, който за \mathbb{M}^4 има следния вид:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = x_\nu y^\nu = x_0 y_0 - x_i y_i \quad , \quad (1.2)$$

$$x_i y_i = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad (1.3)$$

s^2 е интервалът между събитията с 4-вектори x^μ и y^ν . Тъй като $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$, то $x_0 = x^0$, и $x_i = -x^i$. За метричния тензор имаме равенствата:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu \quad (1.4)$$

Основните физични величини се описват посредством 4-вектори: например вектор на енергията и импулса $p = (p_0, p_i) = (E, p_1, p_2, p_3)$.

1.2 Преобразувания на Лоренц

С помощта на преобразованията на Лоренц се осъществяват преходи между координатни системи. Тези трансформации по дефиниция запазват скаларното произведение (метриката), т.е. $x \cdot y = inv$.

$$A'^\mu = \Lambda_\nu^\mu A^\nu \quad (1.5)$$

и

$$A' \cdot B' = g_{\mu\nu} A'^\mu B'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda_\tau^\mu \Lambda_\sigma^\nu A^\tau B^\sigma = A \cdot B = g_{\tau\sigma} A^\tau B^\sigma \quad (1.6)$$

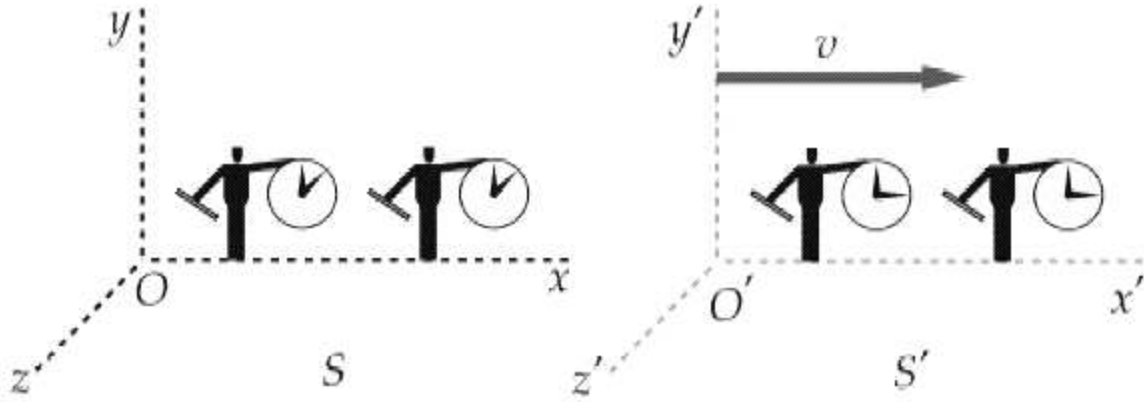
Т.е. ще имаме: $g_{\mu\nu} \Lambda_\tau^\mu \Lambda_\sigma^\nu = g_{\tau\sigma} \Leftrightarrow \Lambda_\tau^\mu \Lambda_{\mu\sigma} = g_{\tau\sigma} \Leftrightarrow$

$$\Lambda_\tau^\mu \Lambda_\mu^\sigma = \delta_\tau^\sigma \quad (1.7)$$

или:

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad (1.8)$$

Да разгледаме две координатни системи O и O' с успоредни координатни оси.



Нека O' се движи спрямо O равномерно със скорост \vec{V} , насочена по оста x . Тогава енергията и импулса се преобразуват посредством формулите:

$$E' = \frac{E - (\vec{V} \cdot \vec{p})}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (1.9)$$

$$p_x' = \frac{p_x - EV_x}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z \quad (1.10)$$

1.3 4-скорост , 4-импулс и Енергия

В класическата механика скоростта се дефинира като $\vec{V} = \frac{d\vec{x}}{dt}$. В СТО се дефинира т. нар. собствено време:

$$d\tau^2 = [dt^2 - d\vec{x}^2] = dt^2 \left(1 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 \right) \quad (1.11)$$

При $\vec{V} = 0 \Rightarrow d\tau = dt$. Ако положим $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$, то $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$.

Дефинираме 4-скоростта като:

$$u^\mu = \frac{x^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \quad (1.12)$$

Т.е. $u = \gamma(1, \vec{V})$. Съответно за другите кинетични величини имаме:

$$p = mu = m\gamma(1, \vec{V}) = (E, \vec{p}) \quad (1.13)$$

$$E = m\gamma \quad (1.14)$$

$$u^2 = 1 \quad (1.15)$$

Използвайки тези формули последователно получаваме $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 u^2 = m^2$, т.е.

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (1.16)$$

От дефинициите на 4-векторите се получават и следните съотношения:

$$\vec{V} = \frac{\vec{p}}{E}, \quad \vec{V}\gamma = \frac{\vec{p}}{m} \quad (1.17)$$

При преход в произволно ориентирана координатна система K' , която се движи спрямо K с произволна скорост \vec{V} трансформационните закони имат вида:

$$\vec{p}' = \vec{p} + \gamma\vec{V}\left[\frac{\gamma(\vec{p}\cdot\vec{V})}{1 + \gamma} - E\right] \quad (1.18)$$

$$E' = \gamma[E - (\vec{p}\cdot\vec{V})] \quad (1.19)$$

1.4 Релативистки инварианти

Лоренцовите скалари и играят важна роля при описанието на света около нас. Например :

$$p^2 = p_\mu p^\mu = p'_\mu p'^\mu = m^2 = inv \quad (p = mu, u^2 = 1) \quad (1.20)$$

Когато частицата е в покой $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = E^2$. Т.е. квадрата на енергията на частица в покой е $E^2 = m_0^2$, където m_0 е масата на покой.

Нека имаме две частици $\Rightarrow p^2 = (p_1 + p_2)^2 = M_{12}^2$, където M_{12}^2 е "ефективната маса" на системата от две частици. За N частици ще имаме :

$$p^2 = \left(\sum_{i=1}^N p_i \right)^2 = M^2 \quad (1.21)$$

Нека разгледаме произведението на импулсите p и k на две частици :

$$p \cdot k = g_{\mu\nu} p^\mu k^\nu = E\omega - (\vec{p} \cdot \vec{k}) \quad , \quad (1.22)$$

където $p = (E, \vec{p})$, $k = (\omega, \vec{k})$. Тогава

$$p \cdot k = p' \cdot k' = inv \quad (1.23)$$

За описание на физичните процеси е удобно да се използват следните величини:

$$s_{12} = (p_1 + p_2)^2 = M_{12}^2 \quad (1.24)$$

В система, в която $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ ефективната маса има вида $s_{12} = (E_1 + E_2)^2$ и тъй като s_{12} е инвариант това е стойността във всяка инерциална отправна система. Друга често използвана величина е придаденият 4-импулс t :

$t = (p_1 - p_2)^2$, където p_1 и p_2 са съответно началният и крайният импулс на частица участваща в някакъв процес/взаимодействие.

1.5 Отправни системи

Нека разгледаме реакцията : $a + b \longrightarrow \dots$ В зависимост от конкретната задача е удобно да отнесем характеристиките на частиците (енергия, импулс, ...) към различни координатни

системи. Най-често използваните са лабораторната система (ЛС) и системата на центъра на масите (СЦМ):

- ЛС се използва когато едната частица е в покой спрямо наблюдателя, т.е. има $\vec{p} = 0$. В такъв случай $p = (m, \vec{0})$.
- СЦМ е система, в която $\vec{p}_a^* + \vec{p}_b^* = 0$. Звездичките означават именно, че импулсите са отнесени към СЦМ.

За преминаване от ЛС към СЦМ и обратно са необходими следните формули:

- Спрямо произволна инерциална отправна система центърът на масите на система от две частици има скорост

$$\vec{V}_c = \frac{\vec{p}_a + \vec{p}_b}{E_a + E_b} \quad (1.25)$$

В такъв случай спрямо ЛС (нека например частицата b е в покой) центърът на масите ще има скорост

$$\vec{V}_c = \frac{\vec{p}_a}{E_a + m_b} \quad (1.26)$$

За удобство ще завъртим нашата ЛС, така че \vec{V}_c да съвпада с една от осите ѝ (напр. z). В този случай може да използваме 1.9 и 1.10 за да определим стойностите на енергиите и импулсите на частиците a и b в СЦМ :

$$E_a^* = \frac{E_a - (\vec{p}_a \cdot \vec{V}_c)}{\sqrt{1 - V_c^2}} \quad E_b^* = \frac{m_b}{\sqrt{1 - V_c^2}} \quad (1.27)$$

$$\vec{p}_a^* = \frac{\vec{p}_a - E_a \vec{V}_c}{\sqrt{1 - V_c^2}} \quad \vec{p}_b^* = -\frac{m_b \vec{V}_c}{\sqrt{1 - V_c^2}} = -\vec{p}_a^* \quad (1.28)$$

- Преход от СЦМ в ЛС може да се направи отново с формулите 1.9 и 1.10 като отчетем, че правим преход към ЛС (т.е. едната частица (напр. b) е в покой) и използваме първото от уравненията 1.17. От тези неща намираме скоростта, която има ЛС спрямо СЦМ - тя е равна на скоростта на частицата b в СЦМ. Т.е. $\vec{V}_{LS} = \vec{V}_b^* \Rightarrow$

$$E_a = \frac{E_a^* - (\vec{p}_a^* \cdot \vec{V}_{LS})}{\sqrt{1 - V_{LS}^2}} \quad E_b = \frac{E_b^* - (\vec{p}_b^* \cdot \vec{V}_{LS})}{\sqrt{1 - V_{LS}^2}} = m_b \quad (1.29)$$

$$\vec{p}_a = \frac{\vec{p}_a^* - E_a^* \vec{V}_{LS}}{\sqrt{1 - V_{LS}^2}} \quad \vec{p}_b = \frac{\vec{p}_b^* - E_b^* \vec{V}_{LS}}{\sqrt{1 - V_{LS}^2}} = 0 \quad (1.30)$$

1.6 Закони за съхранение на енергията и импулса

Във физиката на елементарните частици се разглеждат следните видове реакции: еластично разсейване, квазиеластично разсейване, нееластично разсейване и разпад. Съответно те могат да се представят схематично по следния начин :

$$A + B \longrightarrow A + B \quad (1.31)$$

$$A + B \longrightarrow C + D \quad (1.32)$$

$$A + B \longrightarrow C + D + E + F + \dots \quad (1.33)$$

$$A \longrightarrow B + C + \dots \quad (1.34)$$

При всички тях е изпълнен закон за запазване на 4-импулса:

$$\sum_i p_i = \sum_f p_f, \quad (1.35)$$

където p_i са началните, а p_f са крайните 4-импулси. При изучаване на динамиката на процеси с участие на елементарни частици импулсите p рядко се използват в качеството на променливи. За интерпретирането на експериментални данни или за формулирането на теоретични модели са необходими други променливи, например инвариантна маса s , придаден импулс t и др.

При определянето на броя независими променливи ще пренебрегваме спина на частиците. Да разгледаме първо процес на разпад (1.34), в който една частица се разпада на n частици. Крайното състояние можем да опишем с $3n$ променливи, тъй като за всяка частица е в сила 1.16. Сега налагаме четирите условия за запазване на енергията и импулса. Независимите променливи стават $3n - 4$. Поради отсъствието на спин, в системата на покой на продуктите на реакцията, ориентацията на сумарните импулси не играят роля откъдето следват още 3 условия. В крайна сметка имаме $3n - 7$ независими променливи. Масите на частиците считаме за известни. Например разпадането на 1 частица на 3 частици можем да опишем с 2 променливи.

Нека сега разгледаме реакцията 1.33. Подобно на случая на разпад крайното състояние може да опишем с $3n - 4$ независими променливи. Посоката на импулса на налитащата частица задава посока в пространството. Затова вместо 3 тривиални променливи в системата на покой остава само една променлива ϕ , която съответства на въртене около оста на \vec{p}_a . Значи имаме $3n - 5$ независими променливи, описващи крайното състояние. Началното състояние дава още една съществена променлива - квадрата на пълната енергия s , така че общо имаме $3n - 4$ независими променливи. Например реакция, в която в началото имаме 2 частици и в края имаме също 2 частици може да опишем с 2 променливи (избират се s и t), крайното състояние - само с една (t).

1.7 Единици за измерване. Система мерни единици $c = \hbar = 1$

$$[p] = eV/c, \quad [E] = eV, \quad [m] = eV/c^2$$

$$1 \text{ GeV} \approx 1,6 \cdot 10^{-10} J \approx 1,8 \cdot 10^{-24} g$$

$$1 \text{ GeV}^{-1} \approx 0,7 \cdot 10^{-24} s \approx 2 \cdot 10^{-14} cm$$

$$[\sigma] = bn \text{ (barn)}, 1 bn = 10^{-24} cm^2$$

$$1 \text{ GeV}^{-2} = 0,389 \text{ mbn} = 0,389 \cdot 10^{-27} cm^2$$

Във Физиката на високите енергии се работи със система мерни единици за която $\hbar = c = 1$. Да разгледаме произволна

$$[A] = M^a L^b T^c \quad (1.36)$$

Въвеждаме

$$A' = \frac{A}{\hbar^\alpha c^\beta} \quad (1.37)$$

Избираме α и β така че $[A] = m$. Това може да бъде направено по следния начин:

$$[\hbar] = ML^2T^{-1}, [c] = LT^{-1} \quad (1.38)$$

Тогава ще имаме:

$$[A'] = M^{a-\alpha} L^{b-2\alpha-\beta} T^{c+\alpha+\beta} \quad (1.39)$$

Полагаме $\alpha = -(b + c)$, $\beta = -b - 2c$. За рамерността на A получаваме: $[A'] = M^\gamma$, където $\gamma = a - b - c$. За конкретни физични величини имаме: $\alpha_{\hbar} = 1$, $\beta_{\hbar} = 0$, $\alpha_c = 0$, $\beta_c = 1$. Т.е.

$$\hbar' = \frac{\hbar}{\hbar} = 1, c' = \frac{c}{c} = 1 \quad (1.40)$$

Аналогично импулса, енергията и момента на импулса се измерват в:

$$\begin{aligned} p' &= \frac{p}{c}, & \implies & [p'] = M, \\ E' &= \frac{E}{c^2}, & \implies & [E'] = M \\ m' &= m, & \implies & [m'] = M, \\ L'_0 &= \frac{L_0}{\hbar}, & \implies & [L'_0] = 1 \end{aligned}$$

Глава 2

Квантова Механика. Представяне на Шрьодингер, представяне на Хайзенберг и представяне на взаимодействието (Дирак). Матрица на разсейването

2.1 Означения на Дирак

Състоянието на квантово-механична (КМ) система се описва с вектор в Хилбертово пространство - т.нар. вълнова функция Ψ . Удобно е да се използват означенията на Дирак за вълновата функция : с $|a\rangle$ се означава т.нар "ket" вектор (накратко ket), с който означаваме абстрактен вектор (неотнесен към никаква отправна система), описващ състоянието на системата. Скаларното произведение на 2 ket вектора ни позволява с всеки ket да асоциираме т.нар. "bra", който се означава така : $\langle a|$. Бра всъщност е функционна и се въвежда за да можем да запишем скаларното произведение на 2 ket вектора (напр. $|a\rangle$ и $|b\rangle$) по следния начин:

$$(|a\rangle, |b\rangle) = \langle a|b\rangle \quad (2.1)$$

Тук $\langle a|$ е функционалът съпоставен на ket вектора $|a\rangle$. Освен това ket и асоциираният с него bra са ермитово спрегнати един на друг ($|a\rangle^\dagger = \langle a|$). Едно от свойствата на скаларното произведение в означения на Дирак ще изглежда така:

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^* \quad (2.2)$$

Нека разгледаме пълен ортонормиран базис $|\alpha\rangle$, т.е. $\langle\alpha|\alpha'\rangle = \delta(\alpha - \alpha')$. Тъй като базиса е пълен имаме :

$$\sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1 \quad (2.3)$$

В такъв случай за произволен вектор може да се запише :

$$|a\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha|a\rangle \quad (2.4)$$

$|\langle\alpha|a\rangle|^2$ е вероятността да намерим системата, която описваме с ket вектора $|a\rangle$ в състояние $|\alpha\rangle$. Нека оператора \hat{A} действа на вектора $|a\rangle$ и го трансформира в нов вектор $|b\rangle$, т.е. $\hat{A}|a\rangle = |b\rangle$. Ако умножим скаларно това равенство с $|\beta\rangle$ последователно получаваме :

$$\langle\beta|b\rangle = \langle\beta|\hat{A}|a\rangle = \sum_{\alpha} \langle\beta|\hat{A}|\alpha\rangle\langle\alpha|a\rangle \quad (2.5)$$

$\langle\beta|\hat{A}|\alpha\rangle$ се нарича матричен елемент на оператора \hat{A} между състоянията $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$.

2.2 Представяния на Шрьодингер, Хайзенберг и на взаимодействието (Дирак)

Уравнението, което описва динамиката на една квантово-механична системата е уравнението на Шрьодингер:

$$i\frac{\partial|\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\Psi(t)\rangle \quad (2.6)$$

\hat{H} е Хамилтонианът на системата. Виждаме, че динамичната зависимост от времето се носи от вълновия вектор, а не от операторите, съответстващи на физическите величини. След малко ще покажем, че е възможно динамичната зависимост от времето да се прехвърли напълно или частично от вълновите вектори към операторите. Това се извършва с подходящи унитарни оператори. За да фиксираме нещата, описанието, при което цялата динамична зависимост от времето се носи от вълновия вектор ще наричаме представяне (картина) на Шрьодингер и всички величини и вълновият вектор ще снабдим с индекс S

$$i \frac{\partial |\Psi_S(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_S |\Psi_S(t)\rangle \quad (2.7)$$

Уравнението на Шрьодингер еднозначно определя временната еволюция на вълновия вектор ако той е зададен в някакъв момент $t_0 - |\Psi(t_0)\rangle$. Това означава, че съществува оператор $\hat{U}(t, t_0)$, който на началния вектор в момента t_0 съпоставя вълновия вектор в произволен момент t

$$|\Psi_S(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi_S(t_0)\rangle \quad (2.8)$$

Операторът $\hat{U}(t, t_0)$ ще наричаме оператор на еволюцията на системата. Той е унитарен оператор ($\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{\mathbf{1}}$), тъй като нормата на вектора $|\Psi\rangle$ трябва да се запазва и във всеки момент от време да бъде равна на единица. Ако заместим 2.8 в уравнението на Шрьодингер и отчетем, че $|\Psi_S(t_0)\rangle$ не зависи от времето, намираме уравнение за оператора на еволюцията :

$$i \frac{\partial \hat{U}(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H} \hat{U}(t, t_0) \quad (2.9)$$

Това уравнение се интегрира лесно когато хамилтонианът на системата не зависи явно от времето. За $\hat{U}(t, t_0)$ получаваме :

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp\{-i\hat{H} \cdot (t - t_0)\} \quad (2.10)$$

С негова помощ може да прехвърлим зависимостта от времето от вълновия вектор към физическите величини. Това различно описание на временната еволюция на една квантово механична система се нарича представяне на Хайзенберг. Вълновите вектори и физическите величини ще означаваме с индекса H . За вълновия вектор имаме:

$$|\Psi_S(t)\rangle = \exp\{-i\hat{H}\cdot(t-t_0)\}|\Psi_H(t_0)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\Psi_H(t_0)\rangle \quad (2.11)$$

Нека припомним как изглежда средната стойност на дадена квантово-механична величина, която описваме с оператора \hat{A} :

$$\langle A(t) \rangle = \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle = \int d^3x \Psi^*(t, \vec{x}) \hat{A} \Psi(t, \vec{x}) \quad (2.12)$$

За средната стойност на оператора A_S получаваме :

$$\langle \Psi_S(t) | \hat{A}_S | \Psi_S(t) \rangle = \langle \Psi_H(t_0) | \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S \hat{U}(t, t_0) | \Psi_H(t_0) \rangle \quad (2.13)$$

Като използваме факта, че средните стойности на величините не трябва да зависят от представянето, в което работим намираме вида на оператора \hat{A} в представяне на Хайзенберг :

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S \hat{U}(t, t_0) \quad (2.14)$$

Често се използва и едно междинно представяне, при което както вълновият вектор така и физическите величини са натоварени с динамична зависимост от времето. Тази картина се нарича представяне на взаимодействието (Дирак) и величините в нея ще означаваме с индекс I .

Нека хамилтонианът да може да се представи като сума от две части :

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}(t) \quad (2.15)$$

2.2. Представяния на Шрьодингер, Хайзенберг и на взаимодействието(Дирак)23

Като \hat{H}_0 описва свободната система, а $\hat{H}_{int}(t)$ - взаимодействието. Аналогично на това, което направихме за представянето на Хайзенберг вземаме унитарен оператор $\hat{V}_I(t)$, с който извършваме преход от представяне на Шрьодингер към представяне на взаимодействието (вместо $|\Psi_I(t)\rangle$ ще пишем $|\Phi(t)\rangle$ без да забравяме, че векторът е в представяне на взаимодействието) :

$$|\Psi_S(t)\rangle = \hat{V}_I(t)|\Phi(t)\rangle \quad |\Phi(t)\rangle = \hat{V}_I^\dagger(t)|\Psi_S(t)\rangle \quad (2.16)$$

За операторите в представяне на взаимодействието имаме:

$$\hat{A}_I(t) = \hat{V}_I^\dagger(t)\hat{A}_S\hat{V}_I(t) \quad (2.17)$$

Като заместим новият хамилтониан и тези вълнови функции в уравнението на Шрьодингер получаваме :

$$i \frac{\partial \hat{V}_I(t)}{\partial t} |\Phi(t)\rangle + i \hat{V}_I(t) \frac{\partial |\Phi(t)\rangle}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{H}_{int}(t)) \hat{V}_I(t) |\Phi(t)\rangle \quad (2.18)$$

Оператора $\hat{V}_I(t)$ удовлетворява уравнението на Шрьодингер със свободен хамилтониан \hat{H}_0 :

$$i \frac{\partial \hat{V}_I(t)}{\partial t} = \hat{H}_0 \hat{V}_I(t) \quad (2.19)$$

Така стигаме до уравнението

$$i \frac{\partial |\Phi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_{int}(t) |\Phi(t)\rangle \quad (2.20)$$

Това е уравнението на Шрьодингер в представяне на взаимодействието. Тук хамилтонианът зависи от t . От уравнението 2.17 може да пресметнем как се изменят операторите с времето:

$$\frac{\partial \hat{A}_I(t)}{\partial t} = \frac{\partial \hat{V}_I^\dagger(t)}{\partial t} \hat{A}_S \hat{V}_I(t) + \hat{V}_I^\dagger(t) \hat{A}_S \frac{\partial \hat{V}_I(t)}{\partial t} \quad (2.21)$$

В него заместваме $\frac{\partial \widehat{V}_I(t)}{\partial t}$ и $\frac{\partial \widehat{V}_I^\dagger(t)}{\partial t}$ от 2.19 и ермитово спрегнатото му.Получаваме:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{A}_I(t)}{\partial t} &= i \widehat{V}_I^\dagger(t) \widehat{H}_0 \widehat{A}_S \widehat{V}_I(t) - i \widehat{V}_I^\dagger(t) \widehat{A}_S \widehat{H}_0 \widehat{V}_I(t) \\
&= -i \left(\widehat{V}_I^\dagger(t) \widehat{A}_S \widehat{V}_I(t) \widehat{H}_0 - \widehat{H}_0 \widehat{V}_I^\dagger(t) \widehat{A}_S \widehat{V}_I(t) \right) \\
&= -i \left(\widehat{A}_I(t) \widehat{H}_0 - \widehat{H}_0 \widehat{A}_I(t) \right) \\
&= -i \left[\widehat{A}_I(t), \widehat{H}_0 \right]
\end{aligned} \tag{2.22}$$

2.3 Матрица на разсейването

Целта ни е да решим уравнението 2.20.Еквивалентно може да го запишем във вида :

$$|\Phi(t)\rangle = |\Phi(t_0)\rangle - i \int_{t_0}^t dt_1 \widehat{H}_{int}(t_1) |\Phi(t_1)\rangle \tag{2.23}$$

То може да се реши с итерационна процедура.Като нулево приближение за $|\Phi(t)\rangle$ вземаме началното условие за вълновата функция - $|\Phi^0(t)\rangle = |\Phi(t_0)\rangle$. Заместваме $|\Phi^0(t)\rangle$ в 2.23 и получаваме първото приближение за $|\Phi(t)\rangle$:

$$|\Phi^1(t)\rangle = |\Phi(t_0)\rangle - i \int_{t_0}^t dt_1 \widehat{H}_{int}(t_1) |\Phi(t_0)\rangle \tag{2.24}$$

Ако сега заместим $|\Phi^1(t)\rangle$ в 2.23 ще получим второто приближение за $|\Phi(t)\rangle$:

$$|\Phi^2(t)\rangle = |\Phi(t_0)\rangle + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \widehat{H}_{int}(t_1) |\Phi(t_0)\rangle + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \widehat{H}_{int}(t_1) \widehat{H}_{int}(t_2) |\Phi(t_0)\rangle \tag{2.25}$$

Така конструираме приближенията докато достигнем задоволителна точност, т.е. докато n -тото и $(n+1)$ -вото приближения се различават по-малко от предварително зададена стойност. n -тото приближение за $|\Phi(t)\rangle$ ще има вида :

$$\begin{aligned}
|\Phi^n(t)\rangle &= |\Phi(t_0)\rangle + \\
&+ (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_{int}(t_1) |\Phi(t_0)\rangle + \\
&+ (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_{int}(t_1) \hat{H}_{int}(t_2) |\Phi(t_0)\rangle + \dots + \\
&+ (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}_{int}(t_1) \hat{H}_{int}(t_2) \dots \hat{H}_{int}(t_n) |\Phi(t_0)\rangle = \\
&= \hat{U}(t, t_0) |\Phi(t_0)\rangle
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Тук $\hat{U}(t, t_0)$ е операторът на еволюцията в представяне на взаимодействието, т.нар. оператор на Дайсън.

Ако $t_n < t_{n-1} < \dots < t_1$ казваме, че произведението $\hat{H}_{int}(t_1) \hat{H}_{int}(t_2) \dots \hat{H}_{int}(t_n)$ е t -наредено. В тази връзка е удобно да се въведе оператор \hat{T} , който подрежда по време произведение на функции на t , т.е. който генерира t -наредено произведение. Дефинираме \hat{T} по следния начин:

$$\hat{T}(\hat{A}(t_1) \hat{A}(t_2)) = \begin{cases} \hat{A}(t_1) \hat{A}(t_2) & \text{ако } t_1 > t_2 \\ \hat{A}(t_2) \hat{A}(t_1) & \text{ако } t_2 > t_1 \end{cases}$$

Действието на \hat{T} върху произведение от n функции на t може да се дефинира така:

$$\hat{T}(\hat{A}(t_1) \hat{A}(t_2) \dots \hat{A}(t_n)) = \hat{A}(t_{i_1}) \hat{A}(t_{i_2}) \dots \hat{A}(t_{i_n}) \tag{2.27}$$

като $t_{i_n} \leq t_{i_{n-1}} \leq \dots \leq t_{i_1}$.

Нека разгледаме две достатъчно отдалечени по време състояния на една квантово-механична система - $|\Phi(-\infty)\rangle$ и $|\Phi(\infty)\rangle$. Както знаем прехода между тях се описва с оператора на еволюцията. В този конкретен случай се въвежда понятието матрица на разсейването или S-матрица. С други думи:

$$|\Phi(\infty)\rangle = \hat{S}|\Phi(-\infty)\rangle \quad , \quad \hat{S} = \hat{U}(\infty, -\infty) \quad (2.28)$$

Вида на матрицата на разсейването получаваме от 2.26 :

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \hat{T} \left(\hat{H}_{int}(t_1) \hat{H}_{int}(t_2) \cdots \hat{H}_{int}(t_n) \right) \quad (2.29)$$

Какъв е физическият смисъл на S-матрицата? Нека разгледаме набор от базисни вектори $|n\rangle$. Да означим състоянието на КМ система в момента $t = -\infty$, $|\Phi(-\infty)\rangle$ с $|n_0\rangle$. Тогава за момента $t = \infty$ можем да запишем :

$$|\Phi(\infty)\rangle = \hat{S}|n_0\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\hat{S}|n_0\rangle \quad (2.30)$$

Това означава, че матричните елементи на матрицата на разсейването повдигнати на квадрат дават вероятността за преход между двете състояния.

Глава 3

Фазов обем. Вероятност за разпад и сечение на процес

Да разгледаме система от частици. Началното им състояние ще означаваме с $|i\rangle$, а крайното - с $|f\rangle$. Ще считаме, че двете състояние са много по-отдалечени по време от времето за осъществяване на взаимодействието. В такъв случай, както вече отбелязахме, амплитудата на вероятността за преход се дава от $\langle f|\widehat{S}|i\rangle$. Ако запишем матрицата на разсейването във вида $\widehat{S} = 1 + i\widehat{R}$, където \widehat{R} се нарича матрица на преход, за амплитудата на разсейването получаваме :

$$A_{fi} = \langle f|\widehat{S}|i\rangle = \delta_{fi} + i\langle f|\widehat{R}|i\rangle \quad (3.1)$$

Ако състоянията $|i\rangle$ и $|f\rangle$ са различни $\delta_{fi} = 0$. Матричният елемент $\langle f|\widehat{R}|i\rangle$ може да запишем във вида :

$$\langle f|\widehat{R}|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \frac{1}{\left[\prod_{k=1}^{n_i} E_k V \prod_{l=1}^{n_f} E_l V \right]^{1/2}} M_{fi} \quad (3.2)$$

M_{fi} се нарича приведен матричен елемент и също има смисъл на амплитуда на преход, а $\delta^4(p_f - p_i)$ осигурява запазването на енергията и импулса. n_i и n_f са броят частици, които имаме в началото

и в края. Изразът в правоъгълните скоби е нормировъчен. В квантовата механика всяка частица заема определен обем във фазовото пространство. За свободни частици броят състояния се задава от

$$dN = \frac{d^3p d^3x}{(2\pi)^3} \quad (3.3)$$

Глава 4

Теорема на Нютер

4.1 Лагранжев формализъм

4.1.1 Принцип на най - малкото действие в класическата механика

Разглеждаме система от N частици с координати x_p^i . Лагранжианът на тази система се записва във вида

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \sum_{p=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{m_p (\dot{x}_p^i)^2}{2} - V(x), \quad (4.1)$$

а функционалът на действието е интегрираният по времето лагранжиан

$$\mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}) dt \quad (4.2)$$

Разглеждаме инфинитизимално преместване на частица от системата, което се дава с трансформацията

$$x_p^{i'}(t) = x_p^i(t) + \delta x_p^i(t) \quad (4.3)$$

Ще искаме тази трансформация да е такава, че действието да е инвариант, т.е.

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'(x', \dot{x}') dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}) dt \quad (4.4)$$

Условието за инвариантно действие се изпълнява, когато вариацията му се занулява

$$\delta \mathcal{I} = \mathcal{I}' - \mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} [\mathcal{L}(x', \dot{x}') - \mathcal{L}(x, \dot{x})] dt \quad (4.5)$$

Ще използваме следните две елементарни преобразувания

$$\delta \dot{x}_p^i = \frac{d}{dt} x_p'^i - \frac{d}{dt} x_p^i = \frac{d}{dt} \delta x_p^i \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_p^i} \delta \dot{x}_p^i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_p^i} \delta x_p^i \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_p^i} \right) \delta x_p^i, \quad (4.7)$$

за да пресметнем вариацията на действието :

$$\delta \mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] dt \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{I} &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \delta x \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta x \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \delta x \right] dt \\ \Rightarrow \delta \mathcal{I} &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{p=1}^N \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_p^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_p^i} \right) \delta x_p^i dt + \sum_{p=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_p^i} \delta x_p^i (t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (4.9)$$

От $\delta x_p^i(t_1) = \delta x_p^i(t_2) = 0$ следва уравнението на движение на Лагранж

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_p^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_p^i} = 0 \quad (4.10)$$

$$m_p \ddot{x}_p^i = - \frac{\partial V}{\partial x_p^i} \quad (4.11)$$

4.1.2 Принцип на стационарното действие в теория на полето

Като разглеждаме поле във вид на механична система с безкрайно голям брой степени на свобода, можем да построим теория на полето по аналогия с класическата механика. В нея полето се характеризира с т.н. функция на полето $u(x)$, която съответствува на безкрайно голям брой степени на свобода. Уравненията за функциите на полето могат да бъдат получени от система лагранжеви функции с помощта на вариационния принцип на стационарното действие, а динамическите променливи могат да бъдат построени чрез величини, подобни на съответстващите величини в апарата на класическата механика.

По аналогия с класическата теория са възможни два способа за построяване на вълнова теория на полето. Единият е канонически (или хамилтонов) формализъм, а другият е лагранжев формализъм. По - долу в изложението ще се спрем на втория от тях. При него, като изходим от лагранжиана на системата, с помощта на вариационен принцип можем да получим уравненията на движение, а запазващите се във времето динамически величини като енергия - импулс, заряд и т.н. можем да определим с помощта на теоремата на Ньотер като инварианти, съответстващи на различни преобразувания на координатни системи и функции на полето. Лагранжевата функция трябва да изпълнява условието за *релативистка инвариантност* или инвариантност относно пълната нееднородна група на Лоренц (пълна група на Пуанкаре). Както е известно, *пълна група на Лоренц* се нарича групата на еднородни линейни преобразувания на координатите на четиримерно пространство - време, които запазват инвариантна квадратичната форма и не изменят времевото направление. Инвариантността относно тази група наричаме *релативистка* или *лоренц инвариантност*.

Да се върнем към функцията на Лагранж. Тя се явява функция, зависеща от времето и в класическата механика се записва като сума по всички материални точки на системата. Тази сума за непрекъснати системи, каквито са вълновите полета, се изразява чрез пространствено интегриране на плътността на функцията на Лагранж

$$L(x^0) = \int \mathcal{L}(u^i(x), \partial_\mu u^i(x)) d^3x \quad (4.12)$$

Функционалът на действието се дава с израза

$$\mathcal{I} = \int L dx^0 = \int_{x_1^0}^{x_2^0} dx^0 \int \mathcal{L}(u^i(x), \partial_\mu u^i(x)) = \int_V \mathcal{L}(u^i(x), \partial_\mu u^i(x)) d^4x \quad (4.13)$$

Във вариационния принцип, обаче, влиза не функцията на Лагранж, а действието I , получено след интегриране по x^0 . Поради това е достатъчно да разглеждаме плътността на функцията на Лагранж

$$\mathcal{L}(x^0, \vec{x}) = \mathcal{L}(x),$$

зависеща от четири пространствено - времеви променливи. Занапред, ще наричаме $\mathcal{L}(x)$ лагранжиан. При това, ако $\mathcal{L}(x)$ зависи само от състояния на полето в безкрайно малка околност на x , т.е. от стойности на u^i и краен брой нейни частни производни, взети в точката x , то той се нарича *локален лагранжиан*, а съответстващата теория - локална теория, каквато ние ще разглеждаме.

За всяка област V в пространството на Минковски M ($V \subseteq M$) разглеждаме полета u^i , решения на уравнението на Лагранж - Ойлер. За да можем да приложим вариационен принцип, въвеждаме вариация на полето $u^i(x)$ с допълнително поле $h^i(x)$ такова, че то се занулява по границите на областта $h^i(x)|_{\partial V} = 0$:

$$u^i(x) \longrightarrow u^i(x) + \varepsilon h^i(x), \quad \varepsilon > 0 \quad (4.14)$$

Записваме действието като проинтегриран по времето лагранжиан, функцията на новите варирани полета

$$\mathcal{I}(\varepsilon) = \int_V \mathcal{L} (u^i(x) + \varepsilon h^i(x), \partial_\mu u^i(x) + \varepsilon \partial_\mu h^i(x)) d^4x \quad (4.15)$$

Действието I е стационарно за $u^i(x)$ и $\partial_\mu u^i(x)$ ако $\frac{\partial I}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0} = 0$, където $\delta I = \frac{\partial I}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}$ е първата вариация на действието I т.е. промяната на $u^i(x)$ с (x^0, \vec{x}) е такава, че $u^i(x)$ реализират стационарност на действието.

За да осигурим горните изисквания ще искаме лагранжианът да е лоренцово скаларна функция.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} (u^i + \varepsilon h^i, \partial_\mu u^i + \varepsilon \partial_\mu h^i) &= \mathcal{L} (u^i, \partial_\mu u^i) + \varepsilon h^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i} + \varepsilon \partial_\mu h^i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u^i)} \right) + O(\varepsilon^2) = \\ &= \mathcal{L} (u^i, \partial_\mu u^i) + \varepsilon h^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i} + \varepsilon \partial_\mu \left(h^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u^i)} \right) - \varepsilon h^i \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial u^i}{\partial x^\mu})} \right) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Като заместим гореполученото развитие на лагранжиана в израза за действието, получаваме

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\varepsilon) &= \int_V \mathcal{L} (u^i, \partial_\mu u^i) d^4x + \int_V \varepsilon \left(h^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i} - h^i \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u^i)} \right) \right) d^4x + \\ &+ \int_V \varepsilon \partial_\mu \left(h^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u^i)} \right) d^4x + \int_V O(\varepsilon^2) d^4x \end{aligned}$$

Третият член в горния израз по теоремата на Гаус - Остроградски се свежда до

$$\int_V \varepsilon \partial_\mu \left(h^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u^i)} \right) d^4x = \varepsilon \int_{\partial V} h^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u^i)} dS_\mu = 0,$$

тъй като допълнителното поле h^i , както вече споменахме, не дава принос по границата на областта, в която интегрираме : $h^i|_{\partial V} =$

0. Първият член не съдържа ε и след вариране ще даде нула, а четвъртият член го пренебрегваме. Така единствено вторият член дава принос към първата вариация на действието

$$\delta\mathcal{I} = \frac{\partial\mathcal{I}}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \int_V \sum_{i=1}^N h^i(x) \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u^i)} \right) \right] d^4x = 0 \quad (4.16)$$

Тъй като по условие всички полета $h^i(x)$, ($i = 1, \dots, N$) са различни от нула, то от вариационния принцип получаваме уравненията на движение на Лагранж - Ойлер за полетата $u^i(x)$

$$\frac{\delta\mathcal{I}}{\delta u^i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u^i)} \right) = 0 \quad (4.17)$$

4.2 Теорема на Ньотер

За описание на физическа система не е достатъчно познаването само на уравненията на движение. Необходимо е също да умеем да изразяваме чрез решенията на тези уравнения основните физически характеристики на системата. Както вече споменахме, такива запазващи се във времето, адитивни *динамически величини* наричаме динамически инварианти (или за краткост *инварианти*). Такива динамични величини можем да получим чрез теоремата на акад. Еми Ньотер.

Теоремата на Ньотер гласи, че *всяко крайно - параметрично непрекъснато преобразование (зависещо от s постоянни параметри) на координатите и полевите функции, зануляващо вариацията на функционала на действието (при условие, че са изпълнени уравненията на движение), съответствува на s динамически инварианта, т.е. s запазващи се във времето комбинации от полеви функции и техните производни.*

За доказателството на теоремата ще разгледаме безкрайно малко преобразование на координатите и полевите функции

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (4.18)$$

$$u_i(x) \rightarrow u'_i(x') = u_i(x) + \delta u_i(x), \quad (4.19)$$

където вариациите δx^μ и $\delta u^i(x)$ се изразяват чрез безкрайно малки линейно независими параметри $\delta\omega_n$ по формулите

$$\delta x^\mu = \sum_{1 < n < s} X_{(n)}^\mu \delta\omega_n \quad (4.20)$$

$$\delta u_i(x) = \sum_n \Psi_{i(n)} \delta\omega_n \quad (4.21)$$

$$\partial_\mu u_i \rightarrow \partial_\mu u'_i(x') = \partial_\mu u_i(x) + \delta \partial_\mu u_i(x) \quad (4.22)$$

Въвеждаме вариацията на формата на функцията в точката x

$$\bar{\delta}u_i(x) = u'_i(x) - u_i(x), \quad (4.23)$$

която с точност до безкрайно малки членове от втори порядък може да се представи и във вида

$$\bar{\delta}u_i(x) = \delta u_i(x) - \partial_\mu u_i \delta x^\mu = \left(\Psi_{i(n)} - \partial_\mu u_i X_{(n)}^\mu \right) \delta \omega_n \quad (4.24)$$

За всяка област V на пространството на Минковски M ($V \subseteq M$) се изисква действието $I_V = \int_V \mathcal{L}(u_i, \partial_\mu u_i) d^4x$ да е инвариант т.е.

$$\int_{V'} \mathcal{L} \left(u'_i(x'), \frac{\partial u'_i(x')}{\partial x'^\mu} \right) d^4x' = \int_V \mathcal{L} \left(u_i(x), \frac{\partial u_i}{\partial x^\mu} \right) d^4x,$$

където V' е образ на V при трансформацията $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$. Условието за инвариантност на действието се изпълнява, когато първата му вариационна производна се занулява.

$$\delta \mathcal{I} = \delta \int \mathcal{L}(x) d^4x = \int \mathcal{L}'(x') dx' - \int \mathcal{L}(x) dx \quad (4.25)$$

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(u'_i(x'), \partial_\mu u'_i(x')) = \mathcal{L}(x) + \delta \mathcal{L}(x),$$

където

$$\delta \mathcal{L}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i} \delta \partial_\mu u_i = \bar{\delta} \mathcal{L}(x) + \frac{d\mathcal{L}}{dx^n} \delta x^n,$$

а

$$\bar{\delta} \mathcal{L}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \bar{\delta} u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i} \bar{\delta} \partial_\mu u_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \bar{\delta} u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i} \partial_\mu \bar{\delta} u_i \quad (4.26)$$

$$\delta \mathcal{I} = \int \left(\bar{\delta} \mathcal{L}(x) + \frac{d\mathcal{L}}{dx^n} \delta x^n \right) dx' + \int \mathcal{L}(x) dx' - \int \mathcal{L}(x) dx$$

Функционалната детерминанта приема вида

$$dx' = dx'_0 dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \frac{\partial(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_0, x_1, x_2, x_3)} dx \approx \left(1 + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu}\right) dx$$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{I} = \int \left(\bar{\delta} \mathcal{L}(x) + \frac{d\mathcal{L}}{\delta x^n} \delta x^n \right) dx + \int \mathcal{L}(x) \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu} dx,$$

откъдето веднага следва

$$\delta \mathcal{I} = \int \left[\bar{\delta} \mathcal{L}(x) + \frac{d}{dx_n} (\mathcal{L}(x) \delta x_n) \right] dx \quad (4.27)$$

От уравнението на движение на Лагранж - Ойлер

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i} \right) \quad (4.28)$$

след елементарно заместване в израза за $\bar{\delta} \mathcal{L}(x)$ достигаме до

$$\bar{\delta} \mathcal{L}(x) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i} \right) \bar{\delta} u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\bar{\delta} u_i) \right\} = \frac{d}{dx^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i} \bar{\delta} u_i \right].$$

И така, за първата вариация на действието окончателно получаваме :

$$\delta \mathcal{I} = \int \frac{d}{dx^\mu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i} \bar{\delta} u_i + \mathcal{L}(x) \delta x^\mu \right\} dx \quad (4.29)$$

Записваме вариацията като сума по всички динамични променливи :

$$\delta \mathcal{I} = - \sum_{n=1}^s \int \partial_\mu \left[\Theta_{(n)}^\mu(x) \right] dx d\omega_n, \quad (4.30)$$

където

$$\Theta_{(n)}^\mu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i} \left(\Psi_{i(n)} - \partial_\nu u_i X_{(n)}^\nu \right) - \mathcal{L}(x) X_{(n)}^\mu \quad (4.31)$$

От условието за зануляване на първата вариационна производна, следва

$$\frac{\delta \mathcal{I}}{\delta \omega} = - \int \partial_\mu \left[\Theta_{(n)}^\mu(x) \right] dx = 0$$

Като използваме произволния избор на интеграционната област, получаваме уравнението за непрекъснатост

$$\frac{d}{dx^\mu} \Theta_{(n)}^\mu(x) = 0 \quad (4.32)$$

След преобразуване на дясната част на (?..?) по теоремата на Гаус - Остроградски можем да получим запазващите се величини, съответстващи на получените повърхнинни интеграли. Като имаме пред вид, че в (?..?) интегрираме в област, неограничено разширяваща се в пространственоподобните направления и ограничена във времеподобните направления от пространственоподобните повърхнини σ_1 и σ_2 и при предположение, че на границата на областта полето практически е равно на нула, то получаваме

$$\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu \Theta_{(n)}^\mu(x) - \int_{\sigma_2} d\sigma_\mu \Theta_{(n)}^\mu = 0 \quad (4.33)$$

Горното уравнение фактически показва, че повърхностните интеграли

$$C_n(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_k \Theta_{(n)}^k = \text{const}(\sigma)$$

не зависят от повърхността σ . В частния случай, когато повърхностите представляват самата $\mathbb{3}$ - плоскост $x^0 = t = \text{const}$, интегрирането се осъществява в тримерното конфигурационно пространство и интегралите

$$C_{(n)}(X^0) = \int d\bar{x} \Theta_{(n)}^0 = \text{const}. \quad (4.34)$$

не зависят от времето.

4.2.1 Тензор на енергията и импулса

При инфинитизимални пространствено - времеви транслации, т.е. трансформации от вида

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} \quad (4.35)$$

където параметърът е еквивалентен на безкрайно малкото преместване, а именно $\delta\omega_n \iff \delta x_{\mu}$, намираме, че $X_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$ и $\Psi_{i\mu} = 0$. Тогава величината $\Theta_{(n)}^{\mu}$ се превръща в тензор от втори ранг

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\nu} u_i} \partial_{\mu} u_i - \mathcal{L}(x) \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (4.36)$$

който се нарича тензор на енергията и импулса.

$$P_{\mu} = \int T_{\mu}^0 d\bar{x} = const. \quad (4.37)$$

$$P_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 u_i} \partial_0 u_i - \mathcal{L}(x) = \mathcal{H} \quad (4.38)$$

При чисти Лоренцови въртения и трансформации от вида (?.??) получаваме

$$\delta x_{\mu} = \omega_{\mu\nu} x^{\nu} \quad (4.39)$$

и тензор на момента на количеството движение

$$M_{\mu\nu}^{\tau} = x_{\mu} T_{\nu}^{\tau} - x_{\nu} T_{\mu}^{\tau} \quad (4.40)$$

От (?.??) следва $\partial_{\tau} M_{\mu\nu}^{\tau} = 0$, откъдето получаваме по аналогия с (?.??), че момента на количеството движение е запазваща се величина

$$M_{\mu\nu} = \int M_{\mu\nu}^0 d\bar{x} = const. \quad (4.41)$$

4.2.2 Съхранение на заряда

$$u_i'(x) = e^{i\Lambda} u_i(x) \quad (4.42)$$

$$u_i^{*'}(x) = e^{-i\Lambda} u_i^*(x) \quad (4.43)$$

$$\delta u_i(x) = i\Lambda u_i(x) \quad (4.44)$$

$$\delta u_i^*(x) = -i\Lambda u_i^*(x) \quad (4.45)$$

От горните трансформации следва, че $X_n^\mu = 0$ и $\Psi_i = iu_i^{(*)}(x)$. Така за векторът на тока получаваме

$$j^\mu = -i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i} u_i(x) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i^*} u_i^*(x) \right) \quad (4.46)$$

Аналогично на момента на количеството движение от (???) получаваме и уравнението за непрекъснатост

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (4.47)$$

следствие на което, можем да запишем и запазващата се величина електрически заряд

$$Q = \int j^0 d\bar{x} = const. \quad (4.48)$$

4.2.3 Скаларно поле

$$\varphi(x) = \varphi^*(x) \quad (4.49)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) \quad (4.50)$$

$$(\square + m^2) \varphi(x) = 0, \quad (4.51)$$

където $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \nabla^2$ е операторът на д'Аламбер.

$$T_\mu{}^\nu = \partial_\mu \varphi \partial^\nu \varphi - \mathcal{L} \delta_\mu^\nu \quad (4.52)$$

$$P_\mu = \int T_\mu^0 d^3x \quad (4.53)$$

$$P_0 = \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \left[(\partial_0 \varphi)^2 + (\nabla \varphi)^2 + m^2 \varphi^2 \right] d^3\bar{x} \quad (4.54)$$

4.2.4 Спинорно поле

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(x) = 0 \quad (4.55)$$

$$i\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + m \bar{\Psi}(x) = 0 \quad (4.56)$$

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi \quad (4.57)$$

$$\Psi'(x) = e^{i\Lambda} \Psi(x) \quad (4.58)$$

$$\bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x) e^{-i\Lambda} \quad (4.59)$$

където $\bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger(x) \gamma^0$ е дираково спрегнатия спинор.

$$T_\mu^\nu = i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi \quad (4.60)$$

$$j^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (4.61)$$

$$P_\mu = i \int \bar{\Psi} \gamma^0 \partial_\mu \Psi d^3x \quad (4.62)$$

$$Q = \int \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi d^3x \quad (4.63)$$

Глава 5

Симетрии

5.1 Преобразувания на симетрия

5.1.1 Унитарни преобразувания

Всяка симетрия във физиката, според теоремата на Ньотер, води до наличието на запазващи се величини. Така, например, в случая на пространственои симетрии хомогенността на пространството на Минковски води до запазване на енергията, а изотропността му - до запазване на момента на импулса и спина:

$$P_\mu \rightarrow p^2 = m^2 \rightarrow m \quad (5.1)$$

$$M_{\mu\nu} \rightarrow W_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\mu\nu} p^\sigma \rightarrow W_\mu W^\mu = S \rightarrow s \quad (5.2)$$

където P_μ е 4-вектора на импулса, m е масата, $M_{\mu\nu}$ е тензора на момента на импулса, а s е спина.

В квантовата механика вероятността за преход от начално състояние $|i\rangle$ в крайно състояние $|f\rangle$ се задава с матричния елемент на S -матрицата $\langle f|S|i\rangle$. Условието за инвариантност при преобразувания на векторите на състоянията $|i\rangle$ и $|f\rangle$ с матрица U - $|i^U\rangle = U|i\rangle$ е оператора U да е унитарен, т.е. $U^+U = 1$:

$$\langle i^U | i^U \rangle = \langle i | U^+ U | i \rangle = \langle i | i \rangle \Leftrightarrow U^+ U = 1. \quad (5.3)$$

Трябва да се има предвид, обаче, че условието за унитарност не ограничава групата на симетрии и тя може да е произволна (неунитарна), но трябва да се работи с унитарните ѝ представяния.

S -матрицата в квантовата механика се задава като функция на Хамилтониана - $S = f(H^n)$, като условието за инвариантност на матричните ѝ елементи при унитарни преобразувания води до съотношенията:

$$\langle f | S | i \rangle = \langle f^U | S | i^U \rangle = \langle f | U^+ S U | i \rangle \Leftrightarrow [S, U] = 0 \quad (5.4)$$

$$S = f(H^n) \Rightarrow [H, U] = 0 \quad (5.5)$$

5.1.2 Типове преобразувания

Преобразуванията запазващи физичните величини се разделят основно на два типа - непрекъснати и дискретни преобразувания.

А. Непрекъснати преобразувания: Непрекъснатите преобразувания се задават с матрица $U = e^{i\epsilon F}$, където оператора F е ермитов и в случая на инфинитезимални преобразувания за U се получава $U = 1 - i\epsilon F$. Операторите F са генератори на групата на симетрия (обикновено група на Ли), като могат да се свържат с наблюдаема за системата величина, т.к. $[S, U] = 0 \Rightarrow [S, F] = 0$, т.е. F е запазваща се величина:

$$F | i \rangle = F_i | i \rangle; F | f \rangle = F_f | f \rangle \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 = \langle f|[S, F]|i \rangle &= \langle f|SF|i \rangle - \langle f|FS|i \rangle = (F_i - F_f) \langle f|S|i \rangle = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow F_i = F_f, \langle f|S|i \rangle \neq 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

т.е. F е константа на движението.

Непрекъснатите пространствени трансформации и съответните закони за запазване могат да се класифицират в следната таблица:

Трансформация	Генератор	U-оператор	Закон за запазване
$\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}$	\vec{p}	$e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}}$	Импулс
$x_\mu \rightarrow x_\mu + a_\mu$	P_μ	$E^{-iP^\mu a_\mu}$	Енергия и импулс
Ротации			
$x_i \rightarrow x'_i = x_i + \omega_{ij}x_j$	\vec{J}	$e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{J}}$	Ъглов момент
$\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_jk$			

В. Дискретни преобразувания Дискретните преобразувания се извършват с унитарен ермитов оператор U , за който е изпълнено

$$U^2 = 1 \Rightarrow U' = \pm 1, \quad (5.7)$$

където U' са собствените стойности на U .

Симетриите на дадена система могат да се разделят на следните групи:

- Пространствени симетрии - $M_{\mu\nu}, P_\mu$
- Вътрешни симетрии - $U(1), SU_I(2), SU_C(3), \dots$
- Непрекъснати симетрии - $U = 1 - i\varepsilon.F$
- Дискретни симетрии - $U^2 = 1$
- Глобални симетрии - $U = 1 - i\varepsilon.F$
- Локални симетрии - $U = 1 - i\varepsilon(x_\mu).F$

5.2 Вътрешни симетрии

Вътрешните симетрии се въвеждат изкуствено във физиката на високи енергии за да може да се излъчат реакции, които не са забранени от ЗЗЕ и ЗЗИ, но въпреки това не се наблюдават. Всяка вътрешна симетрия определя запазващо се квантово число като следствие от теоремата на Ньотер. Запазващите се квантови числа са следните:

5.2.1 Електричен заряд Q .

Измереното време на живот на електрона е $\tau_e > 4,3 \cdot 10^{23} [years]$, което съответства на невъзможност за протичане на реакцията $e^- \rightarrow \gamma \nu_e$, въпреки че тя не е забранена от гледна точка на пространствените симетрии. От този факт се вижда че тази реакция трябва да е забранена от друг вид закон за запазване, т.е. вълновата функция на електрона има инвариантност относно преобразувания, които не са свързани с преобразуванията на пространство-времето. Това са преобразувания от типа:

$$|\psi\rangle \rightarrow e^{iQ\Lambda} |\psi\rangle, \quad (5.8)$$

където Q е оператора на заряда на частицата от групата $U_Q(1)$ и от инвариантността следва, че

$$[Q, H] = [Q, S] = 0, \quad (5.9)$$

където H и S са съответно хамилтониана и S -матрицата. Инвариантността относно преобразуванията от $U_Q(1)$ води до запазване на физическата величина съответстваща на Q и именно тази величина е заряда на частицата.

От квантовата механика е известно че заряда на частиците е квантуван, като съответно за всяка частица може да се запише

$$q = N_q e \quad (5.10)$$

като за различните частици N_q е различно. Например

$$e^- \rightarrow N_q = +1, \quad e^+ \rightarrow N_q = -1, \quad p \rightarrow N_q = +1, \quad n \rightarrow N_q = 0$$

Квантуванте на електричния заряд е проверено експериментално с много голяма точност, като измерените величини са:

$$N_n = (-0,4 + -1, 1) \cdot 10^{-21}$$

$$N_p + N_e < 1,0 \cdot 10^{-21}$$

Заряда е адитивно квантово число

5.2.2 Барионно число B .

Реакциите $p \rightarrow e^+ \gamma$ и $p \rightarrow e^+ \pi^0$ не се забраняват от законите за запазване на енергията, импулса и заряда, но въпреки това те не са наблюдавани експериментално, което води до наличието на ново квантово число - барионен заряд. Барионния заряд се дефинира по следния начин:

$$\begin{aligned} &+1, \text{ за бариони} \\ B = &-1, \text{ антибариони} \\ &0, \text{ за лептони} \end{aligned}$$

като искаме при реакции да е изпълнен закон за запазване на барионното число:

$$\Delta B = B_f - B_i = 0, \quad (5.11)$$

където i означава началното състояние (initial), а f - крайното (final). Преобразуванията на вълновата функция свързани със запазването на барионното число имат същия вид както при запазването на заряда:

$$|\psi\rangle \rightarrow e^{iB\Lambda} |\psi\rangle \quad (5.12)$$

5.2.3 Лептонно число L .

В природата са открити три поколения лептони, които са

$$\begin{array}{ccc} e & \mu & \tau \\ \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \end{array}$$

като по аналогия с барионното число може да се въведе закон за запазване на лептонното число L , което се дефинира по следния начин:

$$\begin{array}{l} +1, \text{ за лептони} \\ L = -1, \text{ антилептони} \\ 0, \text{ за всички останали частици} \end{array}$$

Пример за приложение на закона за запазване на лептонното число са следните реакции:

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$$

или

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$$

където $L(n) = 0$, $L(p) = 0$, $L(e^-) = +1$, $L(\bar{\nu}_e) = -1$.

Ако закона за запазване на лептонното число се прилага за всички групи лептони едновременно то тогава трябва да са забранени реакции от вида $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$, но такива се наблюдават и затова закона за запазване се модифицира като изискването е той да е в сила само за отделните групи лептони. Така се въвеждат три вида лептонни числа:

$$\begin{array}{lll} +1, e^- \ \& \ \nu_e & +1, \mu^- \ \& \ \nu_\mu & +1, \tau^- \ \& \ \nu_\tau \\ L_e = -1, e^+ \ \& \ \bar{\nu}_e & L_\mu = -1, \mu^+ \ \& \ \bar{\nu}_\mu & L_\tau = -1, \tau^+ \ \& \ \bar{\nu}_\tau \\ 0, \text{ за останалите} & 0, \text{ за останалите} & 0, \text{ за останалите} \end{array}$$

които трябва да се запазват поотделно и тогава стават възможни реакции от типа $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$.

Запазването на лептонното число е свързано с унитарни преобразувания от групата $U_L(1)$:

$$|\psi\rangle \rightarrow e^{iL\Lambda} |\psi\rangle. \quad (5.13)$$

5.2.4 Странност S .

Частичите участващи в силни взаимодействия се наричат адрони, като при силните взаимодействия отново възникват разрешени и забранени реакции, които не могат да се свържат с познат закон за запазване. Така например експериментално се определя, че:

$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$ е наблюдаема реакция.

$\pi^- + p \rightarrow K^- + \Sigma^+$ е ненаблюдаема реакция.

$\pi^- + p \rightarrow K^- + p$ е ненаблюдаема реакция.

$\pi^- + p \rightarrow n + K^+ + K^-$ е наблюдаема реакция.

За да могат да се обяснят тези наблюдения в силните взаимодействия се въвежда ново адитивно квантово число - странност, която се дефинира по следния начин:

$$S(\pi) = 0; S(K) = +1; S(\bar{K}) = -1; S(p) = S(n) = 0$$

$$S(\Sigma^{+, -, 0}) = S(\Lambda^0) = -1; S(\Theta^{0, -}) = -2$$

Закона за запазване на странността се дефинира във вида $\Delta S = 0$ и е изпълнен в силните взаимодействия.

Понякога вместо странност се въвежда друго адитивно квантово число, наречено **хиперзаряд Y** , което се задава във вида $Y = B + S$ и се запазва, когато се запазват барионното число и странността. Хиперзаряда е свързан с преобразувания от групата $U_Y(1)$, като преобразуването на вълновите функции става по следния начин:

$$|\psi\rangle \rightarrow e^{iY\Lambda} |\psi\rangle \quad (5.14)$$

Въпреки въвеждането на хиперзаряда са възможни реакции които не го запазват, като например реакциите $\Lambda^0 \rightarrow p\pi^-$ и $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$, за които старността не се запазва, но времето за протичане на тези реакции е $\tau \sim 10^{-10}\text{s}$, докато типичните времена за силните взаимодействия са $\sim 10^{-23}$. Очевидно че странността се запазва при силни и електромагнитни взаимодействия, докато при слабите ($\tau \sim 10^{-10}$) се нарушава тази симетрия.

Класификацията на адитивните квантови числа и съответните закони за запазване може да се направи по следния начин:

Квантово число	SI	EMI	WI
Q	да	да	да
B	да	да	да
S или Y	да	да	не
Charm	да	да	не
Beauty	да	да	не
Truth	да	да	не

където SI,EMI и WI означават съответно силни взаимодействия (Strong Interactions), електромагнитни взаимодействия (ElectroMagnetic Interactions) и слаби взаимодействия (Weak Interactions).

Адитивните квантови числа Charm, Beauty и Truth се въвеждат по същият начин, по който въведохме останалите и съответстват на закони за запазване, изпълнени само при силните и електромагнитните взаимодействия.

Квантовите числа, от горната таблица различни от Q и B се наричат още flavour-и.

5.2.5 Изоспин.

Ако протона и неутрона се разглеждат в рамките на силните взаимодействия, то те могат да се обединят в една частица - нуклон - с две възможни състояния - протон или неутрон, т.к.

$$\sigma_{SI}(pp) \approx \sigma_{SI}(pn) \approx \sigma_{SI}(nn) \quad (5.15)$$

Квантовото число по което се различават двете частици се нарича изоспин I , като за p изоспина е $I = \frac{1}{2}$, а за n - $I = -\frac{1}{2}$ и изоспиновата симетрия се нарушава от електромагнитното взаимодействие, което нарушаване води до разлика в масите на протона и неутрона:

$$m_p - m_n = -1,2 \text{ MeV} \sim 0,1\% m_p$$

Групата на изоспиновата симетрия е $SU_I(2)$ с генератори $\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$, които удовлетворяват следните комутационни съотношения: $[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk}I_k$ (генераторите на $SU_I(2)$ $I_i = \frac{1}{2}\tau_i$, където τ_i са матриците на Паули). Оператора на Казимир за $SU_I(2)$ е I^2 : $[I^2, I_i] = 0$, като за собствените стойности на I^2 и I_3 е изпълнено:

$$I^2|I^2, I_3 \rangle = I(I+1)|I^2, I_3 \rangle; I_3|I^2, I_3 \rangle = I_3|I^2, I_3 \rangle, \quad (5.16)$$

където $I = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ е полуцяло число, а за всяко I I_3 заема $2I+1$ стойности от $-I$ до I . Възможно е вместо I_1, I_2 и I_3 да се използват операторите $I_+ = I_1 + iI_2$ и $I_- = I_1 - iI_2$, които са съответно повишаващ и понижаващ оператор на изоспина:

$$I_+p = 0; I_+n = p; I_-p = n; I_-n = 0 \quad (5.17)$$

където p и n са собствени вектори на $I_3 = \frac{1}{2}\tau_3$ - $I_p = \frac{1}{2}p$ и $I_3n = -\frac{1}{2}n$.

В зависимост от собствената стойност на I^2 I имаме различни

представяния на $SU_I(2)$, като на $I = 0$ съответства синглет, на $I = \frac{1}{2}$ - дублет, на $I = 1$ - триплет и т.н. Типични примери за дублетното и триплетното състояние са съответно протон-неутрон и π -мезоните:

$$I = \frac{1}{2} \Rightarrow |p\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, |n\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$I = 1 \Rightarrow |\pi^+\rangle = |1, 1\rangle, |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle, |\pi^-\rangle = |1, -1\rangle$$

Между заряда, изоспина и хиперзаряда съществува следната връзка наречена формула на Гел-Ман Нишиджима:

$$Q = \frac{q}{e} = I_3 + \langle Q \rangle = I_3 + \frac{1}{2}Y \quad (5.18)$$

Груповият елемент на преобразуванията от изоспиновата група има вида $U_I = e^{-i\vec{\alpha}\vec{I}}$, където $\vec{\alpha} = \omega\vec{n}$ и от инвариантността, следва че $[S, U_I] = 0 = [H_S, U_I]$. Ако се разглежда U_I като инфинитезимално преобразувание $U_I = 1 - i\vec{\alpha}\cdot\vec{I}$, то веднага се вижда че $[S, I] = 0 = [H_S, I]$ и тогава $\Delta|I^2\rangle = 0$. От условието масовата част на Хамилтониана да комутира с I директно следва че всички частици от един мултиплет имат равни маси, т.е. ако симетрията $SU_I(2)$ е точна, то p , n , π^+ , π^- и π^0 имат еднакви маси.

С помощта на изоспиновата симетрия може да се решават конкретни проблеми и като пример ще разгледаме реакции от типа

$$\pi^+p \rightarrow \pi^+p, \quad \pi^0n \rightarrow \pi^0n, \quad \pi^-p \rightarrow \pi^-p$$

. Ако означим амплитудата на разсейване с F , то ще имаме:

$$\langle \pi^-p | F | \pi^-p \rangle = \frac{1}{2}F_{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}F_{\frac{1}{2}}, \quad \langle \pi^0n | F | \pi^0n \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}F_{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3}F_{\frac{1}{2}} \quad (5.19)$$

$$\langle \pi^+ p | F | \pi^+ p \rangle = F_{\frac{3}{2}}$$

. Очевидно има две независими амплитуди и може да въведем:

$$\sigma_{\pi^+} = \rho |F_{\frac{3}{2}}|^2 = \sigma^{(+)} \quad (5.20)$$

$$\sigma_{\pi^-} = [\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) + \sigma(\pi^0 n \rightarrow \pi^0 n)] = \sigma^{(-)} + \sigma^{(0)} = \rho \left[\frac{1}{3} |F_{\frac{3}{2}}|^2 + \frac{2}{3} |F_{\frac{1}{2}}|^2 \right]$$

където ρ е кинетичен фактор. Ако е изпълнено $F_{\frac{3}{2}} \gg F_{\frac{1}{2}}$ то за отношенията на сеченията имаме

$$\sigma^{(+)} : \sigma^{(-)} : \sigma^{(0)} = 9 : 1 : 2, \quad (5.21)$$

а експериментално измерената стойност е $(122 \pm 8) : (12.8 \pm 1.10) : (25.6 \pm 1, 3)$.

Окончателно, адитивните квантови числа могат да се подредят по това за кое от взаимодействията са изпълнени закони за запазването им и за кое - не:

SI	EMI	WI
$\Delta I^2 = 0$	$\Delta I_3 = 0$	$\Delta Q = 0$
$\Delta(Q, B, Y) = 0$	$\Delta Y = 0$	ΔB
$\Delta I_3 = 0$	$\Delta B = 0$	

В случая на електромагнитно поле имаме $[H_{em}, I] \neq 0$, но $[H_{em}, I_3] = 0$, т.е. симетрията е нарушена от $SU(2)$ до $U(1)$.

Като пример за закони за запазване на квантовите числа в случая на слаби взаимодействия могат да се разгледат реакции от типа:

$$\Lambda^0 \rightarrow p\pi^- ; n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$$

където се запазват единствено Q и B .

5.3 Дискретни симетрии

5.3.1 Пространствени отражения. Орбитална четност

Преобразуванията на пространствено отражение се дефинират чрез равенството

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = -\vec{x} \quad (5.22)$$

като на пространственото отражение съответства унитарен оператор на четността P :

$$P\psi(\vec{x}, t) = \psi(-\vec{x}, t), \quad P^2 = 1$$

собствените стойности, на които очевидно са $+ - 1$. Ако оператора на четността комутира с хамилтониана и S -матрицата - $[P, H] = 0 = [S, P]$ то четността се запазва, напр. в слабите взаимодействия $[H_W, P] = 0$. Действието на оператора на четността върху различните величини може да е различно в зависимост от тензорната им природа:

$$P\vec{x} = -\vec{x}; \quad P\vec{p} = -\vec{p}; \quad P\vec{x} \cdot \vec{p} = \vec{x} \cdot \vec{p}$$

, но

$$P\vec{L} = P(\vec{x} \times \vec{p}) = \vec{L}; \quad P\vec{J} = \vec{J}; \quad P\vec{J} \cdot \vec{p} = \vec{J} \cdot \vec{p}$$

Ако L е орбиталния момент на системата: $L\psi = l(l+1)\psi$, то имайки предвид вида на вълновата функция

$$\psi(\vec{x}) = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (5.23)$$

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}$$

и вида на отраженията в сферични координати:

$$\vec{x} \rightarrow -\vec{x} \Leftrightarrow r \rightarrow r, \quad \theta \rightarrow \pi - \theta, \quad \phi \rightarrow \pi + \phi \quad (5.24)$$

може да определим как се преобразува вълновата функция, а именно

$$\begin{aligned} P_l^m(\cos\theta) &\rightarrow P_l^m(-\cos\theta) = (-1)^{l-m} P_l^m(\cos\theta) \\ e^{im\phi} &\rightarrow e^{im(\phi+\pi)} = (-1)^m e^{im\phi} \\ Y_{lm}(\theta, \phi) &\rightarrow (-1)^l Y_{lm}(\theta, \phi) \end{aligned}$$

Очевидно собствените стойности на орбиталния момент задават четността на вълновата функция и образуват квантово число наречено орбитална четност

$$\psi(\vec{x}, t) = (-1)^l \psi(\vec{x}, t) \quad (5.25)$$

5.3.2 Вътрешна(собствена) четност

За система от частици е удобно да се въведе орбитална четност т.к. се работи с орбиталния момент, докато в случая на раждане или аниhilация се приписва вътрешна (intrinsic) четност. Така например в случая на фотон може да въведем електромагнитното поле във вида

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{\varepsilon} f(x)$$

където $f(x)$ е скаларна функция, а ε се нарича поляризация на фотона. Както е известно от курсовете по Квантова Механика и КТП взаимодействието на материята с електромагнитното поле се описва чрез замяната

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}(\vec{x})$$

откъдето при действие с оператора на четността получаваме

$$P\vec{p} \rightarrow \vec{p} \Rightarrow \vec{A}(\vec{x}) = -\vec{A}(-\vec{x})$$

$$P\vec{A}(\vec{x})P^{-1} = -\vec{A}(-\vec{x}) \Rightarrow P\varepsilon \rightarrow -\varepsilon \quad (5.26)$$

Очевидно поведението на поляризацията на фотона определя вътрешната му четност.

По същия начин за всяка частица a в състояние $|a, \vec{p}\rangle$ може да се въведе вътрешна четност η_a^p като:

$$P|a, \vec{p}\rangle = \eta_a^p |a, \vec{p}\rangle \quad (5.27)$$

Нека разгледаме реакция от типа $a + b \rightarrow c + d$ и означим началното и крайното състояние съответно с $|i\rangle$ и $|f\rangle$, като $|i\rangle = |a\rangle |b\rangle$ |отн.движение> и $|i\rangle \sim R(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$. Ако четността се запазва в реакцията, то $|i\rangle$ и $|f\rangle$ са собствени състояния на P :

$$P|i\rangle = \eta_i^p |i\rangle; \quad P|f\rangle = \eta_f^p |f\rangle \quad (5.28)$$

и от конкретната реакция $a + b \rightarrow c + d$ може да запишем

$$\eta_i^p = \eta_a^p \eta_b^p (-1)^l; \quad \eta_f^p = \eta_c^p \eta_d^p (-1)^{l'} \quad (5.29)$$

Очевидно от уравнение (1.29) и от запазването на четността следва следния мултипликативен закон за запазване на вътрешната четност:

$$\eta_a^p \eta_b^p (-1)^l = \eta_c^p \eta_d^p (-1)^{l'}. \quad (5.30)$$

Четността не се запазва в слабите взаимодействия, а само в силните и електромагнитните. Изобщо казано H_W и P нямат общи собствени функции и тогава се въвежда т.нар. амплитуда на смесване на четността или степен на незапазване на четността y :

$$|\psi\rangle = |\psi_{regular}\rangle + |\psi_{irregular}\rangle \quad (5.31)$$

като първия член отговаря на $\eta = 1$, а втория - $\eta = -1$. Стойността $|y|^2 = 1$ съответства на максимално нарушение на закона за запазване на четността. Стойностите на y за различните видове взаимодействия са:

За адронни взаимодействия $|y|^2 < 10^{-13}$

За ЕМІ $|y|^2 < 10^{-14}$

За слаби взаимодействия $|y|^2 = 1$

Вътрешната четност за протона и неутрона е съответно $\eta(p) = \eta(n) = +1$.

Вътрешните четности на частици могат да се определят от реакции, в които участват частици с известна четност. Така например за π^0 и π^- имаме:

За π^0 :

При реакция с напречно поляризиран фотон $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ (за които при вълнови вектори \vec{k}_1 и \vec{k}_2 и поляризации $\vec{\varepsilon}_1$ и $\vec{\varepsilon}_2$ е изпълнено $\vec{k}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_1 = 0$, $\vec{k}_2 \cdot \vec{\varepsilon}_2 = 0$ и $\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 = 0$) само векторът $\vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ е независим, като $\vec{k}' = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0$ в система на центъра на масите на π^0 и съответно има само един инвариант - $\vec{k} \cdot (\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2)$, откъдето $\eta_{\pi^0} = -1$.

За π^- :

За реакцията $\pi^- + d \rightarrow n + n$ имаме $\eta_{\pi^-} \eta_d (-1)^l = \eta_n \eta_n (-1)^{l'}$, като в случая на захват в $l = 0$ $\eta_{\pi^-} \eta_d = (-1)^{l'}$. Деутерият е обикновено в състояние 3S_1 като $J^P = 1^+ \Rightarrow J = 1$ за $|i\rangle = J_{final} = +1$.

В случаите $S = 1$ и $S = 0$ имаме следните възможни състояния:

$S = 1 : l' = 2, 1, 0 \Rightarrow {}^3D_1, {}^3P_1, {}^3S_1$

$S = 0 : l' = 1 \Rightarrow {}^1P_1$.

Прилагайки принципа на Паули имаме, че $|f\rangle$ е антисиметрично състояние, откъдето знаейки че $S = 1$ е симетрично, а $S = 0$ е антисиметрично виждаме, че трябва орбиталната част в първия случай да е антисиметрична (l' е нечетно), а във втория - симетрична (l' е четно) \Rightarrow единственото възможно състояние е $|f\rangle = {}^3P_1$. Като знаем, че $\eta_d = +1 \Rightarrow \eta_{\pi^-} = -1$. За π^- - $J^P = 0^-$, т.е. тя е псевдоскаларна частица.

5.3.3 Обръщане на времето

Операцията на обръщане на времето се състои в замяната на $t \rightarrow -t$ и $\vec{x} \rightarrow \vec{x}$ като при тази замяна динамичните величини се променят както следва: $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, $\vec{L} \rightarrow -\vec{L}$, $\sigma \rightarrow -\sigma$. Операторът на обръщане на времето е $t \rightarrow -t$, но при действието му за комутатора $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ получаваме $T[q_i, p_j] = -i\hbar\delta_{ij}$, откъдето очевидно T не е канонично преобразуване и съответно оператора не е унитарен. За да се преодолее това е удобно да се въведе антиунитарен оператор на обръщане на времето, привеждащ комплекснозначна функция на t в комплексно спрегнатата ѝ от $-t$: $T(C) \rightarrow C^*(-t)$; $q_i \rightarrow Tq_iT^{-1} = q_i$, $p_j \rightarrow Tp_jT^{-1} = -p_j$ и тогава преобразуването е канонично, т.к. $T[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$. Антиунитарността на оператора на обръщане на времето води до съгласуването му с алгебрата на групата $SU_i(2)$, т.к. $TJT^{-1} = -J \Rightarrow [J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$ и $SU_i(2)$ не се нарушава. Инвариантността относно обръщането на времето може да се определи по следния начин: Ако хамилтониана на системата е $H = H_0 + V \Rightarrow TH_0T^{-1} = H_0, TVT^{-1} = v$, то за матричния елемент на прехода от състояние a в състояние b ще имаме $M = \langle b|M|a \rangle = f(V), TMT^{-1} = M^+$, т.е. ако означим началното и крайното състояние съответно с $|i \rangle = |\alpha, \vec{p}_i, m_i \rangle$ и $|f \rangle = |\beta, \vec{p}_f, m_f \rangle$, където $m_{i,f}$ са третите компоненти на спина в съответното състояние, то при действие с оператора T имаме $T|i \rangle = |i^t \rangle = |\alpha, -\vec{p}_i, -m_i \rangle, T|f \rangle = |f^t \rangle = |\beta, -\vec{p}_f, -m_f \rangle$ и от инвариантността следва, че сеченията за следните два процеса са равни $\langle \beta, \vec{p}_f, m_f|M|\alpha, \vec{p}_i, m_i \rangle = \langle f|T^{-1}TMT^{-1}T|i \rangle = \langle f^t|M^+|i^t \rangle^* = \langle i^t|M|f^t \rangle = \langle \alpha, -\vec{p}_i, -m_i|M|\beta, -\vec{p}_f, -m_f \rangle$, което може да се провери експериментално.

5.3.4 Принцип на детайлния баланс

От теорията са известни следните формули за сеченията на процеси от типа $a + b \rightarrow c + d$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(a + b \rightarrow c + d) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{m_N^2}{E_{cm}^2} \frac{p_{cd}}{p_{ab}} \frac{1}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)} \sum_{spin} |F_{ab \rightarrow cd}|^2 \quad (5.32)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(c + d \rightarrow a + b) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{m_N^2}{E_{cm}^2} \frac{p_{ab}}{p_{cd}} \frac{1}{(2s_c + 1)(2s_d + 1)} \sum_{spin} |F_{cd \rightarrow ab}|^2 \quad (5.33)$$

откъдето при P и T симетрия имаме $\sum_{spin} |F_{ab \rightarrow cd}|^2 = \sum_{spin} |F_{cd \rightarrow ab}|^2$ и тогава е изпълнен т.нар. принцип на детайлния баланс:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(a + b \rightarrow c + d) = \frac{(2s_c + 1)(2s_d + 1)}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)} \frac{p_{cd}^2}{p_{ab}^2} \frac{d\sigma}{d\Omega}(c + d \rightarrow a + b) \quad (5.34)$$

Като пример за приложението на този принцип може да служи реакцията от типа $p + p \rightarrow \pi^+ + d$, $s_p = \frac{1}{2}$, $s_d = 1$, откъдето следва:

$$\sigma(p + p \rightarrow \pi^+ + d) = \frac{3}{4} (2s_{pi} + 1) \frac{p_{\pi}^2}{p_p^2} \sigma(\pi^+ + d \rightarrow p + p) \quad (5.35)$$

5.3.5 Зарядово спрягане

Зарядовото спрягане е операция, която на всяка частица съпшоставя античастица, ксто действието на оператора на зарядовото спрягане е $U_c : |particle\rangle \rightarrow |antiparticle\rangle$ (например $U_c |\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle$, $U_c |p\rangle = |\bar{p}\rangle$) или по-общо казано $U_c |q, p, s\rangle = | -q, p, s\rangle$. Ако Q е оператора на електрическия заряд - $Q|q, p, s\rangle = q|q, p, s\rangle$, то

имаме $U_c Q|q, p, s \rangle = q| -q, p, s \rangle$ и $QU_c|q, p, s \rangle = -q| -q, p, s \rangle$ откъдето

$$[U_c, Q] \neq 0 \quad (5.36)$$

т.е. U_c и Q нямат общи собствени състояния.

В общия случай за всички адитивни квантови числа оператора на зарядово спрягане изменя знака им - $U_c|q, I_3, B, Y, L \rangle = | -q, -I_3, -B, -Y, -L \rangle$ и $[U_c, Q_i] \neq 0$, където $Q_i = I_3, B, Y, L$. Собствените стойности на U_c се определят от $U_c^2|Q_i \rangle = |Q_i \rangle \Rightarrow U_c^2 = 1 \Rightarrow u_c = \pm 1$, т.е. зарядовото спрягане е дискретно преобразуване. Очевидно състояния с различни от нула квантови числа не могат да са собствени състояния за U_c , а единствено състояния с $q = 0, I_3 = 0, B = 0, Y = 0, L = 0$ могат да са такива и по тази причина зарядовата четност се дефинира като $\eta_c : U_c|B = 0 \rangle = \eta_c|B = 0 \rangle \Rightarrow \eta_c = \pm 1$ и тя е мултипликативно квантово число във всеки процес, в който C -четността се запазва (C е вътрешна симетрия). Ако $[U_c, H] = 0$ или $[U_c, S] = 0$, то казваме че съответното взаимодействие е инвариантно относно зарядово спрягане. За трите взаимодействия имаме следните поведения относно зарядовото спрягане:

Слаби взаимодействия:

В слабите взаимодействия C -четността се нарушава като първи Ву и Янг наблюдават нарушението в бета разпади на базата на спиралността $H_\nu = 2\frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = -1$, $H_{\bar{\nu}} = 1$ на неутрината - ако зарядовата четност не се нарушаваше от слабите взаимодействия трябваше да е изпълнено $H_\nu = H_{\bar{\nu}}$.

Силни взаимодействия Проверката на запазването на C -четността при силните взаимодействия може да се извърши на базата на следното разглеждане :ако имаме реакции от типа $\bar{p} + p \rightarrow \pi^+ + H$ и $\bar{p} + p \rightarrow \pi^- + \bar{h}$, където $h, \bar{h} - B = 0, Q = \pm$, то при инва-

риантност относно зарядово спрягане ще имаме $\langle \bar{p}p|S|\pi^+h \rangle = \langle \bar{p}p|U_c^{-1}U_c S U_c^{-1}U_c|\pi^+h \rangle = \langle p\bar{p}|S|\pi^-h \rangle$, където $U_c S U_c^{-1} = S$, т.е. π^+ с π^- трябва да имат еднакви спектри. От експеримента е получено следното съотношение между запазващата се и запазващата се амплитуди при силните взаимодействия

$$\text{mod } \frac{C\text{-nonconservingamplitude}}{C\text{-conservingamplitude}} \leq 0,01$$

Електромагнитни взаимодействия В електромагнитните взаимодействия зарядовото спрягане обръща знака на заредените токове $U_c j_\mu^{em} = -j_\mu^{em}$ и т.к. $dalmabertian A_\mu = j_\mu^{em} \Rightarrow U_c A_\mu = -A_\mu$ за фотона имаме $U_c \gamma = -\gamma \Rightarrow \eta_c(\gamma) = -1$. Ако в електромагнитните взаимодействия се нарушаваше С-четността, то щеше да има сечение отлично от нула за реакции от типа $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ и $\eta^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma$, т.к. е установено $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \Rightarrow \eta_c(\pi^0) = 1$ и $\eta^0 \rightarrow \gamma\gamma \Rightarrow \eta_c(\eta^0) = 1$, но такива реакции не са наблюдавани.

Зарядовата четност може да се използва за определяне на възможните разпади на позитроний на фотони: за $e^+ - e^-$ при орбитален момент l и спинов момент s имаме

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = (-1)^l \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1), \quad \psi(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = (-1)^{s+1} \psi(\vec{s}_2, \vec{s}_1),$$

откъдето при зарядово спрягане $Q \rightarrow -Q \Rightarrow (-1)^l (-1)^{s+1} \eta_c = -1 \Rightarrow \eta_c = (-1)^{l+s} (-1)^n$, т.е. реакциите с позитроний имат следния вид:

$$\begin{array}{ll} l=s=0 & {}^1S_0 \rightarrow \gamma\gamma \quad \text{разрешен} \\ & {}^1S_0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma \quad \text{забранен} \\ l=0, s=1 & {}^3S_1 \rightarrow \gamma\gamma \quad \text{забранен} \\ & {}^3S_1 \rightarrow \gamma\gamma\gamma \quad \text{разрешен} \end{array}$$

Аналогичен резултат се получава за двойки $p - \bar{p}$ и $q - \bar{q}$, докато за $\pi^+ - \pi^-$ при $B = Y = Q = 0$ от обобщения принцип на Паули следва съществуването само на симетрични състояния $\Rightarrow (-1)^l \eta_c = 1 \Rightarrow \eta_c = (-1)^l$.

5.3.6 G-четност

При силните взаимодействия има зарядова и изоспинова симетрия, като от тях може да се построи нов тип преобразуване - $G \rightarrow U_c + (\pi I_2) \Rightarrow G = e^{i\pi I_2} C$. Относно G-преобразувания единствено силните взаимодействия са инвариантни - $[G, H_{SI}] = 0 \neq [G, H_{EM}] \neq [G, H_{WI}]$. Действието на G върху π мезоните и нуклоните се определя по следния начин:

- За $\pi^{\pm,0}$:
 $e^{i\pi I_2} |\pi_i\rangle = (-1)^i |\pi_i\rangle$, където $|\pi^{\pm}\rangle = |\pi_1\rangle \pm |\pi_2\rangle$, $|\pi^0\rangle = |\pi_3\rangle$, т.е. действието на $e^{i\pi I_2}$ върху π мезоните е $e^{i\pi I_2} |\pi^{\pm,0}\rangle = -|\pi^{\mp,0}\rangle$. За действието на G следователно получаваме $G|\pi^{\pm,0}\rangle = |\pi^{\pm,0}\rangle$, т.е. G-четността за π мезоните е $G(\pi) = -1$
- За нуклоните:
 Нуклоните имат изоспин $I = \frac{1}{2} \Rightarrow |N_R\rangle = e^{i\tau_2 \frac{\pi}{2}} |N\rangle = i\tau_2 |N\rangle$, откъдето получаваме действието на $e^{i\pi I_2}$ върху p и n : $e^{i\pi I_2} |p\rangle = |n\rangle$, $e^{i\pi I_2} |n\rangle = |p\rangle$. Действието на G върху p и n е: $G|p\rangle = |\bar{n}\rangle$, $G|n\rangle = -|\bar{p}\rangle$, т.е. те не са собствени състояния на G - само състояния с $B = Y = 0I$ могат да са собствени на G.

G-четността е $G = \eta_c (-1)^I$, като за фермион-фермионна система $G = (-1)^{l+s+I}$, а за $\pi^+ - \pi^-$ - $G = (-1)^{l+I} = 1$

Глава 6

Кварк-партонен модел

6.1 Лептон-нуклонно разсейване

6.1.1 Еластично разсейване

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left[\frac{G_E^2 + \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2}{1 + \frac{Q^2}{4M^2}} + \frac{Q^2}{4M^2} 2G_M^2 tg^2\theta \right] \quad (6.1)$$

$$G(Q^2) = f(Q^2) = \left(\frac{1}{1 + \frac{Q^2}{4M^2}} \right) \quad M_{Q'}^2 = 0,71 \left(\frac{GeV^2}{c^2} \right) \quad (6.2)$$

Hofstadter, 1955 \Rightarrow р има размер

6.1.2 Дълбоко нееластично разсейване

$$Q^2 = M^2 - W^2 + 2M\nu, \quad \nu = E_0 - E, \quad Q^2 = 4EE_0 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (6.3)$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\nu} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M [W_2(\nu, Q^2) + 2W_1(\nu, Q^2) tg^2(\theta/2)] \quad (6.4)$$

Бьоркеновски Скеилинг (Bjorken Scaling)

$$W_i = f(\omega), \quad \omega = \frac{2M\nu}{Q^2} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} F_1(\nu/Q^2) &= 2MW_1(Q^2, \nu) \\ F_2(\nu/Q^2) &= 2MW_2(Q^2, \nu) \end{aligned} \Rightarrow Q^2, \nu \rightarrow \infty$$

Brown, Richter, Taylor - 1968; SLAC $E_e = 20\text{GeV}$

R. Feynman - Parton model

$$\frac{(2\nu/Q^2)W_2 - W_1}{2W_1} \xrightarrow{Q^2, \nu \rightarrow 0} 0 \quad S = 1/2 \quad (6.6)$$

$$\frac{(2\nu/Q^2)W_2 - W_1}{2W_1} \xrightarrow{Q^2, \nu \rightarrow 0} \infty \quad S = 0 \quad (6.7)$$

Partons \equiv Quarks

6.2 Кварков модел

6.2.1 SU(3) - класификация на адроните. Кварки.

1. Унитарна симетрия

$SU(N)$, $\det U = +1$

$$U = e^{iH} \quad H = H^+$$

$H = \alpha^i F_i$ F^i – генератори $\Rightarrow U = \exp(i\alpha^K F_K) \Rightarrow Tr(F_k) = 0$
 Независими $N^2 - 1$ λ_k , $k = 1, 2, \dots, N^2 - 1$

$$Tr \lambda_k = 0 \quad (6.8)$$

$$Tr \lambda_i \lambda_k = 2\delta_{ik} \quad (6.9)$$

$$F_k = \frac{1}{2} \lambda_k \quad (6.10)$$

6.2.2 Група $SU(2)$

$$\lambda_i \equiv \sigma_i \quad (6.11)$$

$$F_k = \frac{1}{2} \sigma_i \quad (6.12)$$

$$[F_i, F_j] = i\varepsilon_{ijk} F_k \quad (6.13)$$

вярно е за матрици $(2I + 1) \times (2I + 1)$ за представяне със спин $I = 1, 3/2, 2, \dots$

Фундаментално представяне:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

ковариантни
контравариантни

$$\Psi_i = U_i^j \Psi_j \quad (6.15)$$

$$\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}^1, \bar{\varphi}^2) \quad (6.16)$$

$$\bar{\varphi}^{j'} = \bar{\varphi}^i U_i^{j'\dagger} \quad (6.17)$$

$$\varphi_i = \varepsilon_{ijk} \bar{\varphi}^j \quad (6.18)$$

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}^2 \\ -\bar{\varphi}^1 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

представяния - симетрични и антисиметрични

$$\Psi_i \eta_j = \frac{1}{2}(\Psi_i \eta_j + \Psi_j \eta_i) + \frac{1}{2}(\Psi_i \eta_j - \Psi_j \eta_i) \quad (6.20)$$

$$J = 1 : \begin{cases} J_3 = +1 & \Psi_1 \eta_1 \\ J_3 = 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1 \eta_2 + \Psi_2 \eta_1) \\ J_3 = -1 & \Psi_2 \eta_2 \end{cases} \quad (6.21)$$

6.2.3 Група SU(3)

$N = 3 \longrightarrow 8$ матрици

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_k = \frac{1}{2} \lambda_k \quad (6.22)$$

$$[F_i, F_j] = i f_{ij}^k F_k \quad (6.23)$$

От уравнението на Якоби:

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] \quad (6.24)$$

следва:

$$f_{ij}^l f_{lk}^m + f_{ki}^l f_{lj}^m + f_{jk}^l f_{li}^m = 0 \quad (6.25)$$

$$F_i, F_j = \frac{1}{3} \delta_{ij} + d_{ijk} F^k \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned}
I_{\pm} &= F_1 \pm iF_2, & U_{\pm} &= F_6 \pm iF_7, & V_{\pm} &= F_4 \mp iF_5, \\
I_3 &= F_3, & U_3 &= -\frac{1}{2}F_3 + \sqrt{\frac{3}{4}}F_8, & V_3 &= -\frac{1}{2}F_3 - \sqrt{3}F_8
\end{aligned}$$

$$I_3 + U_3 + V_3 = 0 \quad (6.27)$$

$$\frac{[I_+, I_-]}{2} = 2I_3 \quad \Rightarrow \quad SU_I(2)$$

6.2.4 Непреводими представяния на групата SU(3)

$$SU(3) \supset SU(2) \times U(1)$$

$$I_+, I_-, I_3 \implies SU_I(2)$$

$$Y = +\frac{2}{\sqrt{3}}F_8 \implies U_y(1)$$

два диагонално оператора I_3 и Y
 Дефиниция за Q в SU(3):

$$Q = F_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}F_8 \quad (6.28)$$

$$\implies \boxed{Q = I_3 + \frac{1}{2}Y} \quad (6.29)$$

Гелман-Нишиджилс фундаментално представяне

$$q_i \equiv \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

полеви оператор, които ражда u , d и s кварките
 $\bar{u}|0\rangle = u|0\rangle$ $\bar{d}|0\rangle = d|0\rangle$ $\bar{s}|0\rangle = s|0\rangle$

$$q^i = q_i^* = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u \\ d \\ s \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

$$\bar{q} = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}) \quad q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

$$F_1^1 - F_2^2 = 2F_3^3 \quad (6.33)$$

$$F_1^1 + F_2^2 + F_3^3 = 0 \quad (6.34)$$

$$F_1^1 + F_2^2 \equiv -F_3^3 = +\frac{2}{\sqrt{3}}F_8 \quad (6.35)$$

$$2F_1^1 = 2F_3^3 + F_2^2 = 2F_3 + \frac{2}{\sqrt{3}}F_8 - F_1^1 \quad (6.36)$$

$$F_1^1 = F_3 + \frac{2}{\sqrt{3}}F_8 \quad (6.37)$$

$$\implies \boxed{Q = I_3 + \frac{1}{2}Y} \quad (6.38)$$

$$[F_A, q] = -\frac{\lambda_A}{2}q \quad (6.39)$$

$$[F_A, \bar{q}] = \bar{q}\frac{\lambda_A}{2} \quad (6.40)$$

	I	I_3	Y	Q
$ u\rangle$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$ d\rangle$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$ s\rangle$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

$$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} u \\ -d \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

$$I_3 = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \quad (6.42)$$

$$I_3 = Q - \frac{1}{2}Y = -\frac{2}{3} + \frac{11}{23} = -\frac{4}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \quad (6.43)$$

$$I_3^U = -\frac{1}{2} \quad (6.44)$$

6.2.5 Мезони

$$q \quad s = \frac{1}{2}, B_q = \frac{1}{3} \quad (6.45)$$

$$q_i|0\rangle : B = \frac{1}{3} \quad \text{кварк} \quad (6.46)$$

$$q^i|0\rangle : B = -\frac{1}{3} \quad \text{антикварк} \quad (6.47)$$

$$q^i q_j = (q^i q_j - \frac{1}{3} \delta_j^i q^k q_k) + \frac{1}{3} \delta_j^i q^k q_k = P_j^i \quad \text{октет} \quad (6.48)$$

$$\bar{3} \otimes 3 = 8 \oplus 1 \quad (6.49)$$

Състояние и кварково съдържание	$ D, Y, I, I_3\rangle$
$P_1^2\rangle = \pi^+\rangle = u\bar{d}\rangle$	$ \frac{\pi_1+i\pi_2}{\sqrt{2}}\rangle : - 8, 0, 1, 1\rangle$
$ \frac{P_1^1-P_2^2}{\sqrt{2}}\rangle = \pi^0\rangle = \frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}\rangle$	$ \pi_3\rangle : 8, 0, 1, 0\rangle$
$P_2^1\rangle = \pi^-\rangle = d\bar{u}\rangle$	$ \frac{\pi_1-i\pi_2}{\sqrt{2}}\rangle : 8, 0, 1, -1\rangle$
$P_1^3\rangle = K^+\rangle = u\bar{s}\rangle$	$ \frac{\pi_4+i\pi_5}{\sqrt{2}}\rangle : 8, 1, \frac{1}{2}, \text{frac12}\rangle$
$P_2^3\rangle = K^0\rangle = d\bar{s}\rangle$	$ \frac{\pi_6+i\pi_7}{\sqrt{2}}\rangle : 8, 1, \frac{1}{2}, -\text{frac12}\rangle$
$P_3^2\rangle = \bar{K}^0\rangle = s\bar{d}\rangle$	$ \frac{\pi_6+i\pi_7}{\sqrt{2}}\rangle : 8, -1, \frac{1}{2}, \text{frac12}\rangle$
$P_3^1\rangle = K^-\rangle = s\bar{u}\rangle$	$ \frac{\pi_4-i\pi_5}{\sqrt{2}}\rangle : 8, -1, \frac{1}{2}, -\text{frac12}\rangle$
$ \frac{3}{\sqrt{6}}P_3^3\rangle = \eta_8\rangle = \frac{n\bar{n}+d\bar{d}-2s\bar{s}}{\sqrt{6}}\rangle$	$\pi_8 : 8, 0, 0, 0\rangle$

P - Полеви оператор за псевдоскаларни мезони

$$P_j^i|0\rangle \equiv |P_j^i\rangle = (q^i q_j - \frac{1}{3}\delta_j^i q^k q_k)|0\rangle \quad (6.50)$$

$$\begin{array}{ll} \rho^+ \rho^0 \rho^- & I = 1, Y = 0 \\ K *^+ K *^0 & I = \frac{1}{2}, Y = 1 \\ \bar{K} *^0 K *^- & i = \frac{1}{2}, Y = -1 \\ \omega_8 & I = 0, Y = 0 \end{array}$$

6.2.6 Бариони

$$B = 1 \implies 3q \quad (6.51)$$

$$q_j q_k = \frac{1}{2}(q_j q_k + q_k q_j) + \frac{1}{2}(q_j q_k - q_k q_j) = \frac{1}{\sqrt{2}}S_{jk} + \frac{1}{\sqrt{2}}A_{jk} \quad (6.52)$$

$$\begin{array}{ccc} 9 & 6 & 3 \end{array}$$

T^i може да се представи като:

$$\begin{aligned}
T^i &= \varepsilon^{ijk} A_{jk} \\
A_{jk} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} T^i \\
A_{jk} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (q_j q_k - q_k q_j) \\
&\implies 3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}
\end{aligned}$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \otimes 3) + (\bar{3} \otimes 3) \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned}
T^i q_j &= (T^i q_j - \frac{1}{3} \delta_j^i T^k q_k) + \frac{1}{3} \delta_j^i T^k q_k \\
&\implies \bar{3} \otimes 3 = 8 \oplus 1
\end{aligned}$$

Октетен оператор за бариони

$$\bar{B}_j^i = (T^i q_j - \frac{1}{3} \delta_j^i T^k q_k) \quad (6.54)$$

където:

$$T^i = \varepsilon^{ilm} A_{lm} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \varepsilon^{ilm} (q_l q_m - q_m q_l) \quad (6.55)$$

За сингулярно представяне

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} T^k q_k = \frac{1}{2\sqrt{3}} \varepsilon^{klm} A_{lm} q_k = \frac{1}{2\sqrt{6}} \varepsilon^{klm} (q_l q_m - q_m q_l) q_k \quad (6.56)$$

$$6 \times 3 \implies S_{ij} q_k \quad (6.57)$$

$$6 \times 3 = 10 \oplus 8 \quad (6.58)$$

декуплет:

октет:

Състояние 8	Кварки	Q	I	I_3	Y
$ p\rangle = \bar{B}_1^3 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [u, d]u\rangle$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$ n\rangle = \bar{B}_2^3 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [u, d]d\rangle$	0	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	1
$ \Sigma^+\rangle = \bar{B}_1^2 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [u, s]u\rangle$	1	1	1	0
$ \Sigma^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{B}_1^1 - B_2^2) 0\rangle$	$\frac{1}{2}[d, s]u + [u, s]d\rangle$	0	1	0	0
$ \Sigma^-\rangle = \bar{B}_2^1 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [d, s]d\rangle$	-1	1	-1	0
$ \Lambda^0\rangle = -\frac{3}{\sqrt{6}}\bar{B}_3^3 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [u, d]s - [d, s]u - [s, u]d\rangle$	0	0	0	0
$ \Xi^-\rangle = \bar{B}_3^1 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [d, s]s\rangle$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
$ \Xi^0\rangle = \bar{B}_3^2 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [s, u]s\rangle$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1

$$\bar{B}_r^l = \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon^{lmn}S_{rn}q_m \quad B_l^l = 0 \quad (6.59)$$

$$\implies 3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \oplus \bar{3}) \otimes 3 = (6 \otimes \bar{3}) \oplus (\bar{3} \otimes 3) = 10 \oplus 8' \oplus 1 \quad (6.60)$$

6.2.7 Бариионни състояния

Октет

$$\bar{B}_j^i|0\rangle = |B_j^i\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}[\varepsilon^{ilm}(q_l q_m - q_m q_l)q_j - \frac{1}{3}\delta_j^i \varepsilon^{klm}(q_l q_m - q_m q_l)q_k]|0\rangle \quad (6.61)$$

За 8':

$$\bar{B}_j^i|0\rangle = |B_j^i\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon^{ikl}S_{jl}q_k|0\rangle \quad (6.62)$$

Барииони с $J^p = \frac{1}{2}^+$

Аналогично за 8' Познатите барииони с $J^p = \frac{1}{2}^+$ като 3×3 матрици:

$$B_j^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda^0 \end{pmatrix} \quad (6.63)$$

$$\bar{B}_j^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda}^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Sigma}^0 & \bar{\Sigma}^- & \bar{\Xi}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda}^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Sigma}^0 & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{p} & \bar{n} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda}^0 \end{pmatrix} \quad (6.64)$$

Синглет

$$\Lambda_1^0 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon^{klm} (q_l q_m - q_m q_l) q_k |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |[d, s]u + [s, u]d + [u, d]s\rangle \quad (6.65)$$

Декуплет 10

$$|T_{ijk}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \{S_{ij}q_k + S_{jk}q_i + S_{ki}q_j\} |0\rangle \quad J_p = \frac{3}{2}^+ \quad (6.66)$$

6.2.8 Непреводими представяния на групата SU(3)

Рецепта:

1. Конструираме тензор $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ 2. Симетрични $i_1 \dots i_p$ и $j_1 \dots j_q$ 3. Изваждаме Tr така че да е изпълнено:

$$T_{ii_2 \dots i_p}^{ij_2 \dots j_q} = 0 \quad (6.67)$$

Линеино независимите компоненти на T формират непреводимото представяне на SU(3).

Размерност: независимите компоненти на T. Симетричен тензор с p долни и q горни индекси има

Представяне	D
(p, q)	D(p, q)
(0, 0)	1
(1, 0)	3
(0, 1)	3
(1, 1)	8
(3, 0)	10
(2, 2)	27

$$B(p, q) = \frac{(p+2)(p+1)(q+2)(q+1)}{4} \quad (6.68)$$

но от Tr следва че имаме $B(p-1, q-1)$ условия \longrightarrow симетрично безследов тензор има

$$D(p, q) = B(p, q) - B(p-1, q-1) = (p+1)(q+1) \left(\frac{p+q}{2} + 1 \right) \quad (6.69)$$

6.2.9 Разцепване по маси в SU(3)

SU(3) не е точна симетрия (частиците от един и същи мултиплет имат различни маси)

$$H = H_0 + H_1 \quad (6.70)$$

$$[F_j^i, H_0] = 0 \longleftarrow SU(3)_{inv} \quad (6.71)$$

$$[F_j^i, H_1] \neq 0 \quad (6.72)$$

Ако изберем H_1 такъв че:

$$[I, H_1] = 0 \quad [Y, H_1] = 0 \quad (6.73)$$

Това е само в случай на отсъствие на електромагнитно взаимодействие.

За да се изпълнят горните изисквания:

$$H_1 \sim T_3^3 \sim \lambda_8 \quad (6.74)$$

масов член за кварка:

$$H_q = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s \quad (6.75)$$

Ако $SU(3)$ е ОК, то $m_u = m_d = m_s$. Ако $SU_I(2)$ е ОК, то $m_u = m_d \neq m_s$

$$H_q = \bar{m}(\bar{u}u + \bar{d}d) + m_s \bar{s}s + (m_u - m_d) \cdot \frac{\bar{u}u - \bar{d}d}{2} = \frac{2\bar{m} + m_s}{3}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s) + \frac{\bar{m} - m_s}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}u - \bar{d}d) \quad (6.76)$$

където:

$$\bar{m} = \frac{m_u + m_d}{2} \quad (6.77)$$

$$\frac{2\bar{m} + m_s}{3} = \frac{m_u + m_d + m_s}{3} \equiv m_q \quad (6.78)$$

$$\frac{(\bar{m} - m_s)}{\sqrt{3}} = \frac{m_u + m_d - 2m_s}{s\sqrt{3}} \equiv \frac{\lambda}{2} \quad (6.79)$$

тогава:

$$H_q = m_q \bar{q}q + \lambda \bar{q} \frac{\lambda_8}{2} q + (m_u - m_d) \bar{q} \frac{\lambda_3}{2} q \quad (6.80)$$

Показва че за произволно представяне на $SU(3)$ (р, q)

$$\langle (p, q)I, Y | T_3^3 | (p, q)I, Y \rangle = a + bY + c \left[\frac{Y^2}{4} - I(I+1) \right] \quad (6.81)$$

а, b и c иобщо казано зависят от (p, q) но не и от I и Y \longrightarrow

$$m = m_0 + \Delta m = a + bY + c \left[\frac{Y^2}{4} - I(I+1) \right] \quad (6.82)$$

За 8 и 10 на SU(3):

$$H_1 \sim \bar{q} \frac{\lambda_8}{2} q = q_i \left(\frac{\lambda_8}{2} \right)_j^i q^j = \left(\frac{\lambda_8}{2} \right)_j^i O_i^j = (T_8)_j^i Q_i^j \quad (6.83)$$

+

$$O_j^i = q^i q_j - \frac{1}{3} \delta_j^i q^k q_k \quad (\text{октетен оператор}) \quad (6.84)$$

$$T_8 = \frac{\lambda_8}{2} \longleftarrow H_1 = O_3^3$$

$$\Delta m = \delta \langle A | H_1 | A \rangle = \lambda \langle A | O_3^3 | A \rangle \quad (6.85)$$

За барионен октет се получават т. нар. масови формули на Гел-Ман Окубо:

$$\frac{m_N + m_\Xi}{2} = \frac{3m_\Lambda + m_\Sigma}{4} \quad (6.86)$$

За M октет:

$$m_M^2 = \frac{3m_{\eta 8}^2 + m_M^2}{4} \quad (6.87)$$

За 10

$$I = \frac{Y}{2} + 1 \quad (6.88)$$

$$\begin{array}{l|l|l} \rho^+ \rho^0 \rho^- & I = 1 & Y = 0 \\ K^{*+} K^{*0} & i = \frac{1}{2} & Y = 1 \\ \bar{K}^{*0} K^{*-} & I = 0 & Y = 1 \end{array}$$

$$m = a' + b'Y \quad (6.89)$$

$$m_\Omega - m_{\Xi^*} = m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} = m_{\Sigma^*} - m_\Delta \quad (6.90)$$

Аналогично за M10

$$m_{k^*}^2 = \frac{3m_{\omega 8} + m_\rho^2}{4} \quad (6.91)$$

$$m_\rho^2 = m_0^2 \quad (6.92)$$

$$m_{k^*}^2 = m_0^2 + \lambda O_{\mathbb{D}} \quad (6.93)$$

$$m_{\omega 8}^2 = m_0^2 + \frac{4}{3} \lambda O_{\mathbb{D}} \quad (6.94)$$

Когато SU(3) е нарушена ω_1 и ω_8 Октет $J_p = 1^-$
синглет ω_1

$$M^2 = \begin{pmatrix} m_8^2 & m_{18}^2 \\ m_{18}^2 & m_1^2 \end{pmatrix} \quad (6.95)$$

$$U^T M^2 U = \begin{pmatrix} m_\phi^2 & 0 \\ 0 & m_\omega^2 \end{pmatrix} \quad (6.96)$$

където:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6.97)$$

$$m_\varphi^2 + m_\omega^2 = m_8^2 + m_1^2 \quad (6.98)$$

$$m_\varphi^2 - m_\omega^2 = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(m_8^2 + m_1^2) + 4 \sin \theta \cos \theta m_{18}^2 \quad (6.99)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2m_{18}^2}{m_8^2 - m_\omega^2} \quad (6.100)$$

$$\tan^2 \theta = \frac{m_\varphi^2 - m_8^2}{m_8^2} = \frac{3m_\varphi^2 - 4m_{K^*}^2 + m_\rho^2}{4m_{K^*}^2 - m_\rho^2 - 3m_\omega^2} \quad (6.101)$$

$$\tan \theta \approx 0,84 \quad \theta \approx 40^\circ -$$

Ако вземем $\tan \theta \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$ и $\theta \approx 35,3^\circ$

$$|\varphi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|\omega_1\rangle = -|s\bar{s}\rangle \quad (6.102)$$

$$|\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\omega_8\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|\omega_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\bar{u} + d\bar{d}\rangle \quad (6.103)$$

$$\implies m_\omega^2 = m_\rho^2 \quad m_\varphi^2 - m_\omega^2 = 2(m_{K^*}^2 - m_\rho^2) \quad (6.104)$$

Ако φ е $s\bar{s} \implies \varphi \rightarrow \rho\pi$ Правило на Okubo - Zweig - Iizuko (OZI - правило)

6.3 ЦВЯТ

$$u \quad c \quad t \quad Q = +2/3$$

$$d \quad s \quad b \quad Q = -1/3$$

$$M \equiv q\bar{q} \quad B \equiv qqq$$

$$\begin{aligned}
\pi^+ &= u\bar{d} & K^+ &= u\bar{s} & K^0 &= d\bar{s}\pi^0 = (u\bar{u} - \frac{d\bar{d}}{\sqrt{2}}) \\
D^+ &= c\bar{d} & D^0 &= c\bar{u} & D_s^+ &= c\bar{s}\dots \\
B^+ &= u\bar{b} & B^0 &= d\bar{b} & B_s^0 &= s\bar{b} & B_c^+ &= c\bar{b}\dots \\
p &= uud & n &= udd & \Sigma^+ &= uus & \Sigma^0 &= uds \\
\Sigma_c^+ &= uds & \Sigma_c^{++} &= uuc & \Xi &= usc & \Xi_c^0 &= dsc\dots \\
\Xi_{cc}^+ &= dcc & \Xi_{cc}^{++} &= usc & \Omega_{cc}^+ &= scc\dots
\end{aligned}$$

Проблем: основно състояние $L = 0$

$$\Delta^{++} \quad J = \frac{3}{2} \quad \Delta^{++} = u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow$$

Ново квантово число: цвят (colour)

$$q^\alpha, \alpha = 1, 2, 3 \quad r, y, b$$

$$\Delta^{++} = \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} |u_\alpha^\uparrow u_\beta^\uparrow u_\gamma^\uparrow\rangle \quad (6.105)$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} |q_\alpha q_\beta q_\gamma\rangle \quad M = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{\alpha\beta} |q_\alpha \bar{q}_\beta\rangle \quad (6.106)$$

Конфайнмент. Експериментални указания за съществуването на цвят:

6.3.1 Указания за цвят

$$R_{e^+e^-} \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \longrightarrow hadrons)}{\sigma(e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (6.107)$$

$$\begin{aligned}
e^+e^- &\longrightarrow \gamma^*, & Z^* &\longrightarrow hadrons \\
\gamma &< E \ll M_z
\end{aligned}$$

$$R_{e^+e^-} \approx N_c \sum_{f=1}^{N_f} Q_f^2 = \begin{cases} \frac{2}{3}N_c = 2 : u, d, s \\ \frac{10}{9}N_c = \frac{10}{3} & (N_f = 4 : u, d, s, c) \\ \frac{11}{9}N_c = \frac{11}{3} & (N_f = 5 : u, d, s, c, b) \end{cases} . \quad (6.108)$$

τ -разпади: $2 + N_c$ възможни приноса

$$\begin{aligned} N_c &\longrightarrow \tau^- \longrightarrow \nu_\tau \tilde{d} u \\ \tilde{d} &\equiv \cos \theta_c d + \sin \theta_c s \\ B_{\tau \rightarrow l} &\equiv B_r(\tau^- \longrightarrow \nu_\tau l^- \bar{\nu}_l) \approx \frac{1}{2 + N_c} = \frac{1}{5} = 20\% \\ R_\tau &\equiv \frac{\Gamma(\tau^- \longrightarrow \nu_\tau + hadrons)}{\Gamma(\tau^- \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e)} \approx N_c = 3 \end{aligned}$$

Експеримента дава следните резултати:

$$\begin{aligned} B_{\tau \rightarrow e} &= (18,01 \pm 0,18)\% \\ B_{\tau \rightarrow \mu} &= (17,65 \pm 0,24)\% \\ R_\tau &= \frac{(1 - B_{\tau \rightarrow e} - B_{\tau \rightarrow \mu})}{B_{\tau \rightarrow e}} = 3,56 \pm 0,04 \end{aligned}$$

също за разпади на W^\pm и $Z \longrightarrow N_c = 3$

$\pi^0 \longrightarrow \gamma\gamma$

$$\begin{aligned} A_\mu^3 &\equiv (\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u - \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 d) \\ \Gamma(\pi^0 \longrightarrow \gamma\gamma) &= \frac{N_c^2}{3} \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{64\pi^3 f_\pi^2} = 7,73eV \end{aligned}$$

$f_\pi = 92,4MeV$ от $\pi^- \longrightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$

$$\Gamma^{exp} = 7,7 \pm 0,6eV$$

6.4 Дълбоко нееластично електронно-протонно разсейване

$$e^- p \longrightarrow e^- X$$

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{\pi\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} EE'} \left\{ W_2(Q^2, \nu) + 2W_1(Q^2, \nu) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (6.109)$$

Приемаме протона за точкова частица:

$$W_1(Q^2, \nu) = \frac{Q^2}{4M_p^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M_p}\right) \quad (6.110)$$

$$W_2(Q^2, \nu) = \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M_p}\right)$$

Предположение: точкови $s = \frac{1}{2}$

$$p_i^\mu = \xi_i p^\mu \quad m_i = \xi M_p \quad \gamma \longrightarrow p_i \implies$$

$$W_1^{(i)}(Q^2, \nu) = \frac{e_i^2 Q^2}{4m_i^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i}\right) = \frac{e_i^2}{2M_p} \delta(\xi_i - x) \quad (6.111)$$

$$W_2^{(i)}(Q^2, \nu) = e_i^2 \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i}\right) = e_i^2 \frac{x}{\nu} \delta(\xi_i - x)$$

$$x = \frac{Q^2}{2M_p\nu} = \frac{Q^2}{Q^2 + W^2 - M_p^2}$$

$$W^2 \equiv P_x^2$$

при $Q^2 \rightarrow \infty, \nu \rightarrow \infty$, но x е крайно

$$W_1(Q^2, \nu) = \sum_i \int_0^1 d\xi f_i(\xi_i) W_1^{(i)}(Q^2, \nu) = \frac{1}{M_p} \sum_i e_i^2 f_i(x) \equiv \frac{1}{M_p} F_1(x) \quad (6.112)$$

$$W_2(Q^2, \nu) = \sum_i \int_0^1 d\xi f_i(\xi_i) W_2^{(i)}(Q^2, \nu) = \frac{x}{\nu} \sum_i e_i^2 f_i(x) \equiv \frac{1}{\nu} F_2(x) \quad (6.113)$$

Бьоркенопвски скейлинг. Отношение на Callan - Gross:

$$F_2(x) = 2xF_1(x) \quad (6.114)$$

ако $s = 0 \rightarrow F_1(x) = 0$

Ние предположихме, че партоните са свободни. Асимптотична свобода. $q \longleftrightarrow \bar{q}$. С увеличаване на разстоянието се увеличава и енергията. Когато $E > 2mg \rightarrow q'\bar{q}'$

Защо $SU_c(3)$?

Цвят \equiv заряд за силните взаимодействия. γ, Z, W^\pm

1. Цвета е точна симетрия G_c

2. $N_c = 3 \Rightarrow q \rightarrow 3$ от G_c 3. $q \not\equiv \bar{q} \Rightarrow 3 \not\equiv \bar{3} \Rightarrow$ комплексно представяне

4. Конфайнмънт

5. Асимптотична свобода

4 групи с 3 представяния:

$$SU(3) \text{ или } SO(3) \approx SU(2) \approx S_p(1) \Rightarrow SU_c(3)$$

$$q\bar{q}3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$$

$$qqq : 3 \oplus 3 \oplus 3 = 1 + 8 + 8 + 10$$

qq и qqqq: няма синглети

(6.115)

Глава 7

Калибровъчни теории

7.1 Групови симетрии

Симетриите играят решаваща роля във физиката на елементарните частици. Ако съществува симетрия S , при която изучаваната от нас физична система е инвариантна относно трансформации дадени от S или еквивалентно, когато Хамилтоняна на тази система H е инвариантен, т.е.:

$$SHS^\dagger = H \quad (7.1)$$

Понякога съвкупността от независими симетрии на системата генерира алгебрична структура на групата, то тогава се казва, че съществува група на симетрия.

Съществуват различни типове начини на класификация на различните симетрии. Ако се обърне внимание на типа на параметрите определящи симетричните преобразувания, то може да се направи следната класификация:

1. Дискретни симетрии

Параметрите на групата на симетрията могат да бъдат взети само като дискретни стойности. Примери за дискретни симетрии във физиката на елементарните частици могат да се дадат

например: Четност P , Зарядовото спрягане C и Инверсията на времето T . От друга страна, от СРТ-теоремата следва, че всички взаимодействия трябва да бъдат инвариантни относно обща трансформация дадена чрез трите дискретни симетрии P , C и T по отделно (слабите взаимодействия могат да нарушават C , P и CP симетриите).

2. Непрекъснати симетрии

В този случай параметрите на групата на симетрия могат да бъдат взети като непрекъснати стойности. Типични примери за такива симетрии са въртенията, $R(\theta)$, където ротационния ъгъл θ може да взема непрекъснати стойности. Има различни типове непрекъснати симетрии, например:

- (а) *Пространствено-времеви*: Симетрии, които действат върху пространство-времето. Типични примери са трансляциите, ротациите и др.
- (б) *Вътрешни симетрии*: Симетрии, които действат върху вътрешните квантови числа. Типични примери са $SU(2)$ - изоспинова симетрия, $U(1)$ - симетрия на барионното число и др. Обикновено тези симетрии са дадени от групата на Ли.

7.2 Класификация на вътрешните симетрии

Има два класа вътрешни симетрии:

1. Глобална симетрия

Непрекъснатите параметри трансформация независещи от пространство-времевите координати, например: $SU(2)$ - изоспинова симетрия, $SU(3)$ - ароматна симетрия, $U(1)_B$ - симетрия на барионното число, $U(1)_L$ - лептонна симетрия и др.

2. Локална (калибровъчна) симетрия

Непрекъснатите параметри на трансформацията зависят от пространство-времето координати. Например: $U(1)_e$ -електромагнитна симетрия, $U(2)_L$ -слаба изоспинова симетрия, $U(1)_Y$ -слаба симетрия на хиперзаряда, $U(3)_C$ -цветова симетрия и др.

Съществуват две значими теореми, които се прилагат и в двата случая по-горе съответно и имат важно физическо значение:

Теорема на Еми Ньотер

Ако Хамилтониянът (или Лангранжианът) на дадена физична система притежаваща глобална симетрия, то тогава трябва да се запазват тока и заряда.

Примери:

$U(1)$ - симетрията са глобални ротации с дадена фаза, например:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha}\Psi \quad (7.2)$$

представяват въртения на полето Ψ с фаза α и това е така за всички пространство-времеви точки, т.е. наличие на глобална фаза. Групата на симетрия $U(1)$ е съвкупност от комплексни числа с модул равен на единица. Като примери могат да се дадат гореспоменатите $U(1)_B$ и $U(1)_L$ групи на глобална симетрия. Съхранените токове са барионния и лептония ток съответно, а съхранените заряди са барионните и лептонните числа съответно.

Калибровъчен принцип за калибровъчни теории

Нека Ψ представлява физична система във физиката на елементарните частици, чиято динамика се описва с Лангранжиана \mathcal{L} , който е инвариантен относно глобалната симетрия G . Оказва се, че когато разгледа симетрията G локално, тогава теорията на свободно поле е вече теория на взаимодействието. При разглеждането на физични системи, на които им действат локални групи на симетрия, изискването за инвариантност на теорията под локални трансформации

води до въвеждането на нови векторни бозонни полета, т. нар. калибровъчни полета, които взаимодействат с полето Ψ по калибровъчно инвариантен начин. Броят на калибровъчните полета и специфичния вид на калибровъчно инвариантните взаимодействия зависят от особеностите на групата на симетрия G . По-специално, броят на калибровъчните бозонни полета е равен на броя на генераторите на групата G .

Примери:

Локалният случай на по-горния пример:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha(x)}\Psi \quad (7.3)$$

с фаза α , която е функция на пространство-времева точка $x \equiv x_\mu$ и респективно имаме едно калибровъчно инвариантно поле. Най-простият случай на $U(1)$ има един генератор и съответно едно калибровъчно поле, което обменя на бозон и действа върху преносителя на взаимодействието.

Други примери са: $SU(2)$ с три генератора и три калибровъчни бозонни полета съответно и $SU(3)$ с осем генератора и осем калибровъчни бозона. Общият случай е $SU(N)$, който има $N^2 - 1$ генератора, респективно същия брой калибровъчни бозона.

Калибровъчният принцип е много важен аспект от физиката на елементарните частици и играе много важна роля в построяването на Стандартния Модел (СМ).

Квантовите теории на полето, които са базирани на съществуването на конкретна калибровъчна симетрия се наричат Калибровъчни теории. Вече беше споменато, че $U(1)_{em}$, $SU(2)_L$, $U(1)_Y$ и $S(3)_C$ са калибровъчни симетрии. Калибровъчната теория базирана на $U(1)_{em}$ е Квантовата електродинамика. Калибровъчната теория базирана на $S(3)_C$ е Квантовата Хромодинамика, а $SU(2)_L \times U(1)_Y$ - е на Електрослаба теория. СМ е калибровъчна теория базирана на обща

калибровъчна симетрия на фундаменталните взаимодействия във физиката на елементарните частици, $S(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.

7.3 Калибровъчна теория за абелева група на симетрия

Квантовата електродинамика (Quantum Electrodynamics - QED) е най-успешната калибровъчна теория в Физиката на елементарните частици. QED е експериментално проверена до много високо ниво на точност.

В този параграф QED ще бъде показана като приложение на калибровъчния принцип и съответните му физични изводи.

Нека имаме следната физична система: свободно дираковско поле $\Psi(x)$ със спин $s = \frac{1}{2}$, маса m и електричен заряд Q_e . Съответният Лангранжиан описващ дираковския фермион $\Psi(x)$ е:

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\Psi}(x)(i\partial^\mu\gamma_\mu - m)\Psi(x), \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi^{(1)} \\ \Psi^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (7.4)$$

където $\bar{\Psi}(x)$ е комплексно спрегнатото поле на $\Psi(x)$, а уравнението на движение е дираковското уравнение:

$$(i\partial^\mu\gamma_\mu - m)\Psi(x) = 0. \quad (7.5)$$

Лангранжианът (7.4) е инвариантен под действието на глобални ¹ $U(1)$ трансформации, които действат върху полетата и тяхните производни както следва:

$$\Psi'(x) = e^{iQ\theta}\Psi(x), \quad (7.6)$$

$$\bar{\Psi}'(x) = e^{-iQ\theta}\bar{\Psi}(x), \quad (7.7)$$

¹Под глобални трансформации се разбира, когато параметъра (параметрите) на дадена група не зависят от точката на пространство-времето (x^μ), където $\mu = 0, 1, 2, 3$.

където $Q\theta$ е глобалната фаза, а θ е непрекъснатия параметър на $U(1)$ -групата.

От теоремата на Нютер, глобалната $U(1)$ -инвариантност на $\mathcal{L}(x)$ от (7.4) означава запазване на електромагнитния ток, J^μ , и запазване на електричния заряд - eQ :

$$J^\mu(x) = \bar{\Psi}(x)\gamma_\mu eQ\Psi(x) \quad (7.8)$$

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0, \quad eQ = \int d^3x J_0(x) \quad (7.9)$$

В случай на локални $U(1)$ -трансформации, т.е. когато параметъра на групата зависи от точката на пространство-времето (x^μ), фермионните полета и тяхните производни се преобразуват по следния начин:

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= U(x)\Psi(x), \quad U(x) = e^{iQ\theta(x)} \\ \bar{\Psi}'(x) &= U^{-1}(x)\bar{\Psi}(x), \quad U^{-1}(x) = e^{-iQ\theta(x)}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \bar{\Psi}'(x) &= e^{iQ\theta(x)} \partial_\mu \bar{\Psi}(x) + iQ(\partial_\mu \theta(x)) e^{iQ\theta(x)} \bar{\Psi}(x) \\ \partial_\mu \Psi'(x) &= e^{iQ\theta(x)} \partial_\mu \Psi(x) - iQ(\partial_\mu \theta(x)) e^{iQ\theta(x)} \Psi(x) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Следователно при локални $U(1)$ -преобразувания Лангражиана на свободно фермионно поле с маса не е инвариантен. С помощта на калибровъчния принцип може да се реши проблема с неинвариантността на \mathcal{L} от израза (7.4) като се въведе едно калибровъчно векторно бозонно поле $A_\mu(x)$, което взаимодейства с полето $\Psi(x)$ и се преобразува правилно под действието на $U(1)$ -калибровъчни трансформации:

$$\vec{A}'_\mu(x) = \vec{A}_\mu(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\theta}(x) \quad (7.12)$$

Тук под правилни трансформации се подразбира компенсиране на допълнителния член възникнал в резултат на $\partial_\mu\theta \neq 0$ по такъв начин, че пълният Лангранжиан да бъде калибровъчно инвариантен. Най-икономичният начин да се построи този калибровъчно инвариантен $\mathcal{L}(x)$ е като се замести нормалната производна ∂_μ чрез ковариантната производна D_μ :

$$D_\mu = (\partial_\mu - ieQA_\mu(x))\Psi(x), \quad (7.13)$$

където се преобразува ковариантно, т.е. по същия начин както $\Psi(x)$:

$$(D_\mu\Psi)'(x) = (\partial_\mu - ieQA'_\mu(x))e^{ieQ\theta(x)}\Psi(x) \quad (7.14)$$

$$= [\partial_\mu - ieQ(A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x))]e^{ieQ\theta(x)}\Psi(x) \quad (7.15)$$

$$= e^{ieQ\theta(x)}[\partial_\mu - ie\vec{A}_\mu]\Psi(x) \equiv e^{ieQ\theta(x)}(D_\mu\Psi)(x) \quad (7.16)$$

Искаме A_μ да бъде истинско физическо поле, поради което въвеждаме кинетичен член на калибровъчното поле в термини на тензора електромагнитното поле:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (7.17)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (7.18)$$

където $F_{\mu\nu}$ е електромагнитния тензор.

Пълният Лангранжиан е Лоренц и $U(1)$ калибровъчно инвариантен и е известен като Лангранжиан на QED:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= \bar{\Psi}(x)[iD^\mu\gamma_\mu - m]\Psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\Psi}(x)[(\partial_\mu - ieQA_\mu)\gamma_\mu - m]\Psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Забележка: Ако на векторното поле $A_\mu(x)$ му се препише масов член, т.е. $\frac{1}{2}m^2 A_\mu(x)A^\mu(x)$, то тогава ще се наруши инвариантността

на $\mathcal{L}(x)$. От тук следва и теоретичното потвърждение, че γ -квантът е безмасов ($m_\gamma = 0$), което е експериментално потвърдено.

Следва да се отбележат следните свойства на лангранжиана (7.19):

1. Фотонът е безмасова частица, така че членът $A_\mu A^\mu$ не е калибровъчно инвариантен.
2. Минималното взаимодействие на фотона с електрона се съдържа в ковариантната производна $D_\mu \Psi(x)$, която може да бъде построена на основата на трансформационните свойства на електронното поле. С други думи, взаимодействието на фотона с кое да е материално поле определя неговите свойства при преобразувания на групата на симетрия. Обикновено това се нарича универсиалност. Други калибровъчно-инвариантни взаимодействия (от по-висок порядък), както $\bar{\Psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\Psi(x)F^{\mu\nu}$, са отхвърлени вследствие на изискването за пренормируемост.
3. Лангранжианът (7.19) не съдържа израза съответстващо на самодействието на калибровъчните полета, тъй като фотона не притежава заряд (или $U(1)$ квантово число), т.е. без материално поле теорията се явява теория на свободно поле.

Резултатът е, че с помощта на калибровъчната $U(1)$ -група на симетрия на свободно дираковско поле се получи описание на електромагнитното поле, чийто преносител на взаимодействието (фотона) се дава чрез калибровъчното векторно поле A_μ .

За неабелевите калибровъчни теории притежават първите две свойства, но не притежават последното. При отсъствие на самодействие на калибровъчното поле се построява такава неабелева теория, която е силно нелинейна и води това, че притежава ред свойства отличаващи се от абелевите теории.

7.4 Неабелева калибровъчна теория на Янг и Милс

През 1954г. Янг и Милс разпространили принципа на калибровъчната симетрия върху неабелеви групи.

Нека, например, вземем $SU(2)$ -групата:

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}}\Psi(x), \quad (7.20)$$

където $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ са параметрите на $SU(2)$ -групата, $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ са матриците на Паули удовлетворяващи следните комутационни съотношения:

$$\frac{1}{2}[\tau_i, \tau_j] = \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (7.21)$$

а $\Psi(x)$ е изоспинов дублет:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi(1) \\ \Psi(2) \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

Лангранжианът на свободно поле е:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(x)[i\gamma\partial_\mu - m]\Psi(x), \quad (7.23)$$

който е инвариантен относно глобални $SU(2)$ преобразувания, когато параметрите на групата на симетрия θ_i не зависят от пространствено-времевите координати. При локални преобразувания ($\theta_i = \theta_i(x)$) имаме следните трансформационни закони:

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = U(\theta)\Psi(x), \quad U(\theta) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}}. \quad (7.24)$$

Лангранжианът на свободно поле 7.23 не е инвариантен, понеже членът с производната се преобразува както следва:

$$\bar{\Psi}(x)\partial_\mu\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x)\partial_\mu\Psi'(x) = \bar{\Psi}(x)\partial_\mu\Psi(x) + \bar{\Psi}(x)U^{-1}(\theta)[\partial_\mu U(\theta)]\Psi(x), \quad (7.25)$$

т.е. възниква още един допълнителен член при локалните трансформации. Искане се \mathcal{L}_0 да бъде инвариантен в случай на $\vec{\theta} = \vec{\theta}(x)$. За целта се въвежда ковариантната производна, която е построена по следния начин:

$$D_\mu \Psi(x) = (\partial_\mu - ig \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu}{2}) \Psi(x), \quad (7.26)$$

където g е константата на взаимодействието. Трансформационният закон на ковариантната производна е точно както и на изоспиновия дублет, т.е

$$D_\mu \Psi(x) \rightarrow (D_\mu \Psi)'(x) = U(\theta)(D_\mu \Psi)(x), \quad (7.27)$$

а $A_\mu^i(x)$, $I = 1, 2, 3$ са три векторни калибровъчни полета, чийто трансформационен закон е:

$$A_\mu^i(x) = U(\theta) A_\mu^i U^{-1}(\theta) - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\theta)] U^{-1}(\theta) \quad (7.28)$$

при условие, че е в сила $A_\mu = \frac{1}{2} \tau^i A_i$. За да се докаже (7.28) нека разгледаме параметъра на групата в околност около единичния елемент ($\theta(x) \ll 1$), т.е. при инфинитезимални преобразувания имаме:

$$U(\theta) \approx 1 - \frac{i}{2} \vec{\tau} \cdot \theta(x). \quad (7.29)$$

Тогава трансформационният закон за калибровъчните полета е:

$$(A_\mu^i)'(x) = A_\mu^i(x) + \epsilon^{ijk} \theta^j A_\mu^k - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^i, \quad (7.30)$$

където $\epsilon^{ijk} \theta^j A_\mu^k$ е присъединеното представяне на групата на преобразуване. От калибровъчните полета може да се получи антисиметричен тензор от втори ранг:

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g \epsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k \quad (7.31)$$

или имайки предвид $F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\tau^i F_{\mu\nu}^i$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \quad (7.32)$$

или

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu]. \quad (7.33)$$

Трансформационният закон на антисиметричния тензор от втори ранг $F_{\mu\nu}$ е:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = U(\theta)F_{\mu\nu}U^{-1}(\theta), \quad (7.34)$$

т.е. за разлика от абелевия случай $F_{\mu\nu}$ се преобразува като триплет, а не по тривиалния начин. Следователно калибровъчно инвариантния лагранжиан за $SU(2)$ -групата е:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} + i\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu D_\mu\Psi(x) - \bar{\Psi}(x)\Psi(x), \quad (7.35)$$

като се има в предвид, че $Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ е инвариантен.

7.5 Калибровъчна теория за произвола група на симетрия

В този параграф ще бъде направено обобщение за група с по-висока размерност.

Нека имаме проста група на Ли, чийто генератори образуват следната алгебра:

$$[F^a, F^b] = if^{abc}F^c, \quad (7.36)$$

където f^{abc} са напълно антисиметрични функции. Предполага се, че $\Psi(x)$ принадлежи на представяне, в което генераторите са представени с матриците T^a , т.е.:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c. \quad (7.37)$$

В този случай ковариантната производна има вида:

$$D_\mu \Psi(x) = (\partial_\mu - igT^a A_\mu^a), \quad (7.38)$$

а тензора от втори ранг се прествя по следния начин:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (7.39)$$

или

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \quad (7.40)$$

Лангранжианът е

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + i\bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m), \quad (7.41)$$

Добавя се лангранжиана на взаимодействието:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = -g\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu \bar{T}\Psi(x)\bar{A}_\mu \quad (7.42)$$

$$j_\mu^a = -g\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu T^a \Psi(x), \quad (7.43)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} \sim -gf^{abc}\partial_\mu A_\nu^a A^{b\mu} A^{c\mu} - \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\mu^c A^{d\mu} A^{e\nu} \quad (7.44)$$

Вижда се, че $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ съдържа трилинейни и четирилинейни членове по A^a_μ , които съответстват на самодействията на неабелевите калибровъчни полета. Те възникват от нелинейните членове в $F_{\mu\nu}^a$. Калибровъчните полета A^a_μ се преобразуват като генераторите на калибровъчните полета. Неабелевият случай се различава от абелевия по свойството универсалност: за абелеви калибровъчни теории няма ограничение за силата между калибровъчните полета и другите полета, докато за неабелевия калибровъчна теория има ограничения - например:

Нека имаме дублет $\Psi(x)$ с константа g , като полето взаимодейства с друг дублет $\Phi(x)$ с константа N_g , то тогава в комутационно

съотношение, обезпечаващо калибровъчната инвариантност, всеки генератор се умножава с N и се получават $N^2 = N$, т.е. $N = 1$. Следователно в неабелевите теории нормировките на генераторите са фиксирани от комутаторите, т.е. мащабът на g не може да бъде произволен.

И накрая като обобщение имаме, че ако групата е проста, то тогава имаме една константа на взаимодействие и ако групата на симетрия е произведение от групи, то всяка от тях има независима константа на взаимодействие.

Глава 8

Силни взаимодействия

8.1 Асимптотична свобода

Вътрешната структура на протона може да се изследва, чрез следния процес на разсейване: $e^-p \rightarrow e^-p$. Сечението за разсейване се задава по следния начин:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{\pi\alpha^2 \cos^2\frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4\frac{\theta}{2} EE'} \left\{ \frac{|G_E(Q^2)|^2 + \frac{Q^2}{4M_p^2} |G_M(Q^2)|^2}{1 + \frac{Q^2}{4M_p^2}} + \frac{Q^2}{2M_p^2} |G_M(Q^2)|^2 \tan^2\frac{\theta}{2} \right\}, \quad (8.1)$$

където E и E' са съответно енергиите на налитания електрон преди и след разсейването, отчетени в системата на покой на протона, θ е ъгъла на разсейване, M_p е масата на протона и Q^2 е квадрата на придадения импулс, чрез фотона, пренесъл взаимодействието.

$$Q^2 \equiv -q^2 = 4EE' \sin^2\frac{\theta}{2}, \quad (8.2)$$

където $q^\mu \equiv (k_e - k'_e)^\mu$

G_E и G_M са съответно електричния и магнитния форм фактори, описващи електромагнитната структура на протона. Те трябва да са

равни на единица за точкоподобни обекти със спин $\frac{1}{2}$. Тяхната експериментално измерена стойност се апроксимира добре с диполната форма

$$G_M(Q^2)/\mu_p \approx G_E(Q^2) \approx \left(1 + \frac{Q^2}{0.7 \text{ GeV}^2}\right)^{-2}, \quad (8.3)$$

където $\mu_p = 2.79$ е магнитния момент на протона (в единици на протонен магнетон на Бор). Следователно протона е протяжен обект с размер от порядъка на 1 fm. При много ниски енергии ($Q^2 \ll 1 \text{ GeV}^2$), фотона, който пренася взаимодействието не може да “получи” достатъчно информация за структурата на протона. В този случай $G_{M,E}(Q^2) \approx G_{M,E}(0) = 1$ и протона външно се държи, като точкоподобна частица. При по-високи енергии, фотона е чувствителен към по-малки разстояния и крайния размер на протона дава принос към форм факторите, което води до подтискане на сечението за еластичното разсейване при големи Q^2 , т.е. при големи ъгли.

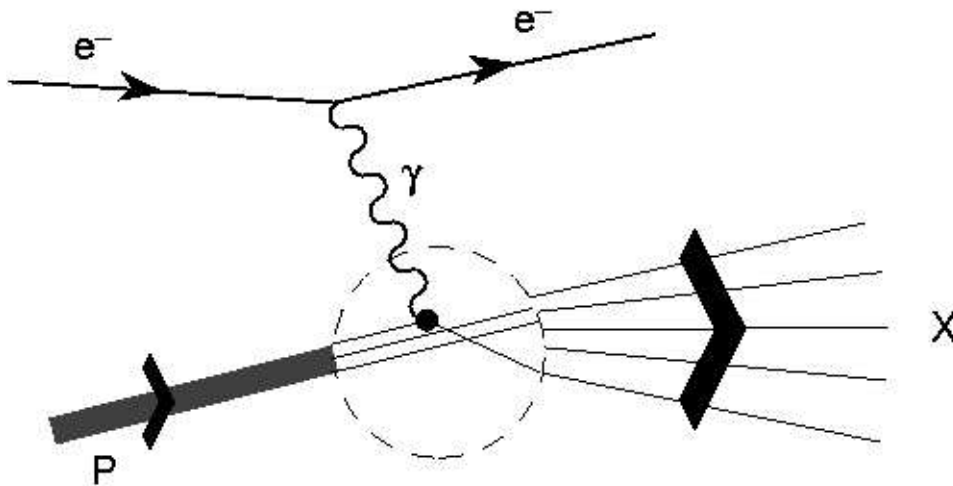
$$q^2 = M^2 - M^{*2} + 2M\nu, \nu = E_0 - E \quad (8.4)$$

M^* - ефективна маса

$$\nu \equiv \frac{(P \cdot q)}{M_p} = \frac{Q^2 + W^2 - M_p^2}{2M_p} = E - E' \quad (8.5)$$

По “дълбоко” изследване на протонната структура може да се осъществи, като се увеличи енергията на сблъска. Тогава нееластичното¹ разсейване $e^-p \rightarrow e^-X$ започва да доминира. Получаваме допълнителна кинематична променлива $W^2 \equiv P_X^2$, характеризираща масата на финалните адрони, като сумирайки инклузивно приноса от всички получени в крайна състояние адрони. Разсейването

¹нееластично взаимодействие - когато началните частици не се съхраняват.



Фигура 8.1: Дълбоко нееластично разсейване. Началните частици не се запазват.

обикновено се представя в термини на квадрата на придадения импулс (Q^2) и на

$$\nu \equiv \frac{(P \cdot q)}{M_p} = \frac{Q^2 + W^2 - M_p^2}{2M_p} = E - E' \quad (8.6)$$

където P^μ е четириимпулса на протона, а ν е обменената енергия в системата на покой на протона. В еднофотонна апроксимация неполяризираното диференциално сечение се задава от

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{\pi\alpha^2 \cos^2\frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4\frac{\theta}{2} EE'} \left\{ W_2(Q^2, \nu) + 2W_1(Q^2, \nu) \tan^2\frac{\theta}{2} \right\}. \quad (8.7)$$

$$q^2 = 4EE_0 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (8.8)$$

θ - ъгъл на разсейване ??? Да сложим ли картинка ???

Протонната структура, тогава се характеризира с две измерими величини. Наричат се *структурни функции* на протона и се бележат W_1 и W_2 .

За точкоподобни протони и еластичното разсейване !!! [...] !!! те съответно са:

$$W_1(Q^2, \nu) = \frac{Q^2}{4M_p^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M_p}\right), \quad W_2(Q^2, \nu) = \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M_p}\right). \quad (8.9)$$

При малки стойности на Q^2 се получават няколко резонанса, които бързо изчезват с увеличаване на Q^2 . При големи стойности на Q^2 се наблюдава поведение, което ни навежда на мисълта, че вътре в протона има точкоподобни обекти.

За да се получи идея за възможното поведение на структурните функции, може да се направи модел на протона, предполагащ, че той (протона) се състои от няколко точкоподобни обекти със спин $\frac{1}{2}$, това са така наречените *партони*. Всеки от тях носи дадена част ξ_i от импулса на протона, т.е. $p_i^\mu = \xi_i P^\mu$. Това означава, че ние пренебрегваме напречния импулс на партоните² и $m_i = \xi M_p$. Взаимодействието на фотона с партона i дава принос към структурната функция по следния начин:

$$W_1^{(i)}(Q^2, \nu) = \frac{e_i^2 Q^2}{4m_i^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i}\right) = \frac{e_i^2}{2M_p} \delta(\xi_i - x), \quad (8.10)$$

$$W_2^{(i)}(Q^2, \nu) = e_i^2 \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i}\right) = e_i^2 \frac{x}{\nu} \delta(\xi_i - x), \quad (8.11)$$

където e_i е електричният заряд на партона и

$$x \equiv \frac{Q^2}{2M_p \nu} = \frac{Q^2}{Q^2 + W^2 - M_p^2}. \quad (8.12)$$

Следователно структурните функции зависят само от отношението x , което също така фиксира и частите от импулса ξ_i . По-нататък

²Тези приближения са естествени, тъй като напречните твижения са пренебрежимо малки спрямо надлъжния импулс на партоните.

ние може да предположим, че в границата $Q^2 \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow \infty$ и фиксирано x , протонните структурни функции могат та се оценят, чрез сумата от партонне, пренебрегвайки взаимодействия между партоните. Означавайки с $f_i(\xi_i)$ вероятността партона i да има ξ_i част от импулса на протона имаме:

$$W_1(Q^2, \nu) = \sum_i \int_0^1 d\xi_i f_i(\xi_i) W_1^{(i)}(Q^2, \nu) = \frac{1}{2M_p} \sum_i e_i^2 f_i(x) \equiv \frac{1}{M_p} F_1(x), \quad (8.13)$$

$$W_2(Q^2, \nu) = \sum_i \int_0^1 d\xi_i f_i(\xi_i) W_2^{(i)}(Q^2, \nu) = \frac{x}{\nu} \sum_i e_i^2 f_i(x) \equiv \frac{1}{\nu} F_2(x). \quad (8.14)$$

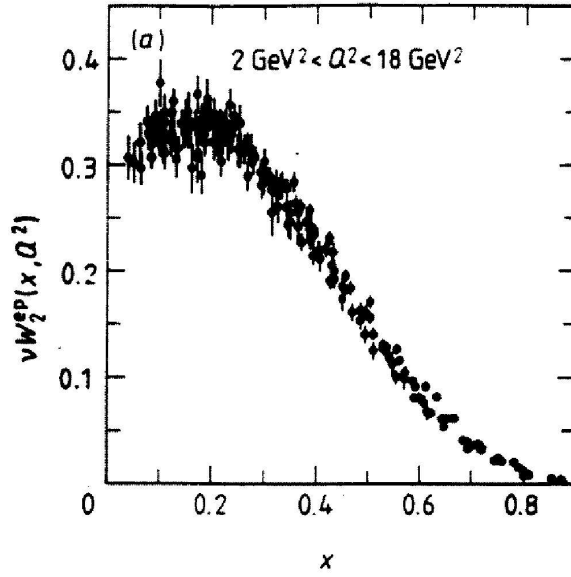
Този прост партонен модел води до така наречения *Бьоркеновско скейлинг*, т.е. структурните функции на протона зависят **само** от кинематичната променлива x . Получава се също и съотношението на Каллан-Грос

$$F_2(x) = 2xF_1(x), \quad (8.15)$$

което е следствие от предположението, че партоните са със спин $\frac{1}{2}$. Лесно се проверява, че партони със спин 0 биха довели до $F_1(x) = 0$.

Измерените стойност за $\nu W_2(Q^2, \nu)$ са показани на фиг. 8.2, като функция на x , за различни стойности на Q^2 между 2 и 18 GeV². Групирането на експерименталните точки по кривата показва, че Бьоркеновския скейлинг се изпълнява в много добро приближение. Фиг. 8.3 показва, че зависимостта на Каллен-Грос е също добре подвърдена от експерименталните данни, поткрепяйки хипотезата за партони с полуцял спин.

Изненадващ резултат е, че се потвърди нашата хипотеза за съществуването на **свободни**, точкоподобни партони в протона, въпреки, че кварките би трябвало да бъдат “затворени” от много слини “цветни” сили.

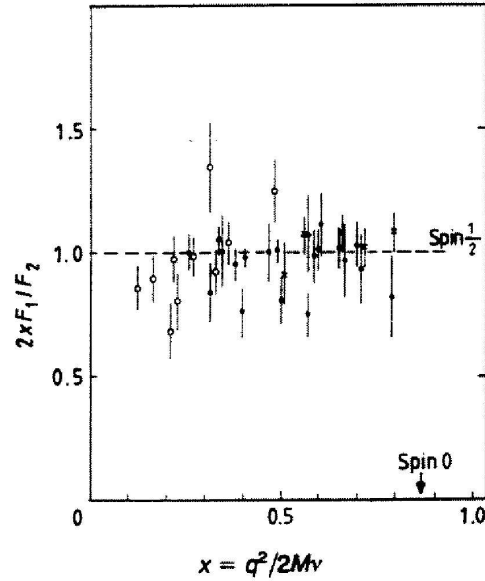


Фигура 8.2: Експериментални данни за νW_2 , като функция на x , за различни стойности на Q^2 .

Бьоркеновия скейлинг предполага, че силните взаимодействия дрябва да притежават свойството *асимптотична свобода*: силата им намалява с намаляване на разстоянието, т.е. колкото са по-близо два кварка, толкова по-слабо си взаимодействат и при $Q^2 \rightarrow \infty$, кварките се държат като свободни частици. Това предположение се потвърждава от емпиричните наблюдения. На фиг. 8.8 се вижда, че описанието със (асимптотично) свободни кварки на отношението $R_{e^+e^-}$ ³ е по-добро при по-високи енергии.

Следователно, взаимодействието между двойка кварк-антикварк ($q\bar{q}$) наподобява на обикновен “ластик”, ако се опитаме да отделим кварка от антикварка, силата която ги свързва се увеличава. В един момент енергията на връзката става по-голяма от $2m_{q'}$ и то-

³ $R_{e^+e^-} \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$



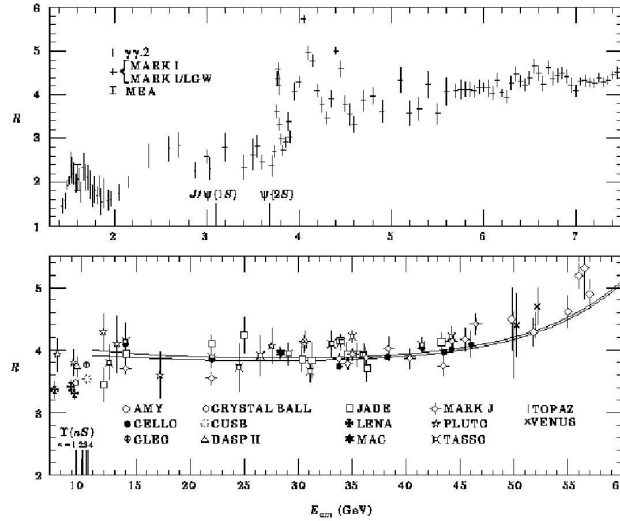
Фигура 8.3: Отношението $2xF_1/F_2$ в зависимост от x , за различни стойности на Q^2 ($1.5 \text{ GeV}^2 < Q^2 < 16 \text{ GeV}^2$).

гава енергетечно по-изгодно става раждането на нова двойка кварк - антикварк ($q'\bar{q}'$), тогава връзката се “разкъсва” и се образуват две мезонни системи - $q\bar{q}'$ и $q'\bar{q}$. Увеличавайки още енергията, ние образуваме повече и повече мезони, но кварките винаги остават “затворени” в синглетни, безцветни свързани състояния. Ако някой се опита да доближи два кварка на много близко разстояние, “еластичната” връзка, става все по-слаба и по-слаба и кварките се държат като свободни частици.

8.2 Цвят и глюони

Да разгледаме вълновата функция на $\Psi_{\Delta^{++}}$ на частицата Δ^{++} :

$$\Psi_{\Delta^{++}} = \Psi_{spin} \times \Psi_{SU(3)} \times \Psi_{space}, \quad (8.16)$$



Фигура 8.4: Измерване на $R_{e^+e^-}$. Двете непрекъснати линии са QCD фит.

където Ψ_{spin} отчита спина, $\Psi_{SU(3)}$ и Ψ_{space} . Проверяваме $S = 3/2$, $L=0$, $(-1)^4$.

Гел-Ман въвежда квантово число - цвят.

Стигаме до проблем свързан с Ферми-Дирак статистиката. Доколкото фундаменталното състояние на композитна система се очаква да има $L = 0$, Δ^{++} бариона ($J = \frac{3}{2}$) отговаря на $u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow$, със проекции спинове на трите кварка в една и съща посока ($s_z = +\frac{1}{2}$) и всички относителни ъглови моменти равни на нула. Вълновата функция е симетрична и следователно Δ^{++} се подчинява на неправилна статистика.

Възникналия проблем може да се преодолее, като се предположи наличието на ново квантово число - *цвет*, така, че всеки вид кварк да има $N_C = 3$ различни цветове: q^α , $\alpha = 1, 2, 3$??? (червен, жълт, виолетов)???. Това всъщност е направено от Гел-Ман, именно той въвежда квантовото число "цвет". Тогава Δ^{++} може да се интерпретира, като асиметрично състояние

$$\Delta^{++} = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} |u_\alpha^\uparrow u_\beta^\uparrow u_\gamma^\uparrow\rangle \quad (8.17)$$

(забележете, че поне 3 цвята са необходими да направят Δ^{++} антисиметрично състояние).

В тази картина барионите и мезоните се описват от цветни синглетни комбинации.

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} |q_\alpha q_\beta q_\gamma\rangle, \quad M = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{\alpha\beta} |q_\alpha \bar{q}_\beta\rangle. \quad (8.18)$$

С цел да се избегне съществуването на ненаблюдавани допълнителни състояния с цвят различен от нула, се налага да се постуира, че всички асимптотични състояния са безцветни, т.е. синглети при ротация в цветно пространство. Това предположение е известно, като *хипотеза за конфайнмънта*, защото води до невъзможност за наблюдение на свободни кварки: доколкото кварките носят цвят, те са затворени в цветни синглетни свързани състояния. Екзотични състояния, като qq и $qqqq$ също се забраняват от този постулат.

Кварките не са само елегантна математическа схема за класифициране на адроните. Съществуват силни експериментални доказателства за съществуването на кварките. На фиг. 8.5 е показано типично $Z \rightarrow \text{hadrons}$ събитие на ускорителя LEP.

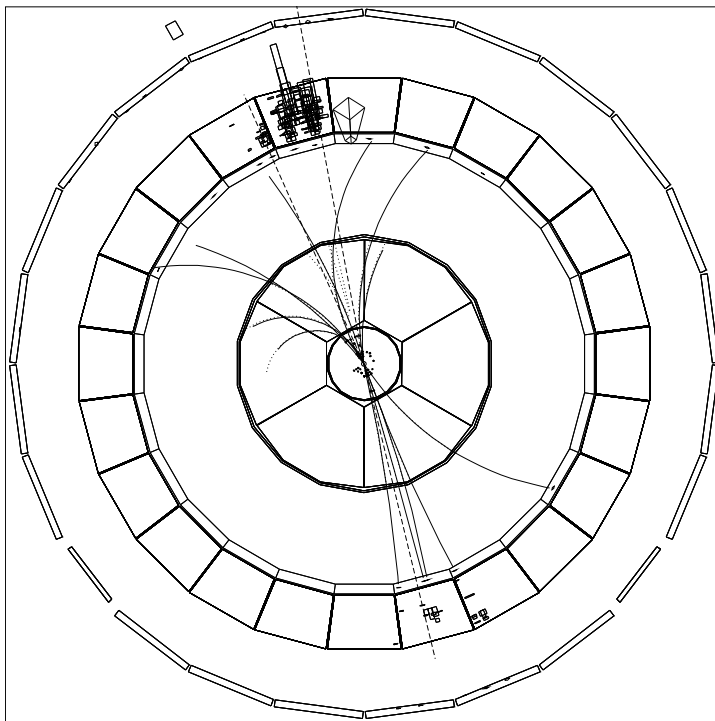
Въпреки, че в крайно състояние има много адрони, те се оказват “колимирани” в 2 *струи* от частици, както се очаква от двучастичния разпад $Z \rightarrow q\bar{q}$, където двойката $q\bar{q}$ *адронизира*.

$$\Psi_{\Delta^{++}} = \Psi_{spin} \times \Psi_{SU(3)} \times \Psi_{space} \times \Psi_{colour}, \quad (8.19)$$

$SU_f(3) \rightarrow \text{flavor}$ (аромат)

При 6 кварка $SU_f(6)$

$SU_c(3)$ - три цвята



Фигура 8.5: Двуструино събитие от адронен разпад на Z бозон, регистрирано от експеримента DELPHI на ускорителя LEP в ЦЕРН (Женева).

Адроните са безцветни обекти

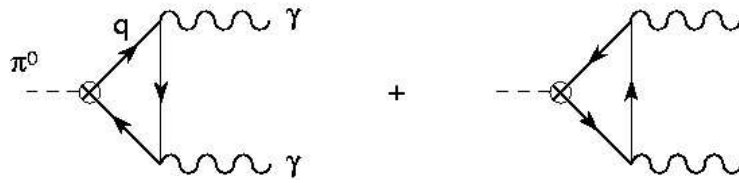
$$\Psi_i \times \Psi_j \times \Psi_k \times \epsilon^{ijk} = \Psi$$

Адрона не носи цвят. Цвета е скрито квантово число. Кварките са цветни.

8.3 Експериментални указания за съществуването на цвят

Да разгледаме следните два процеса:

- Разпад $\Pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ (електомагнитен процес)



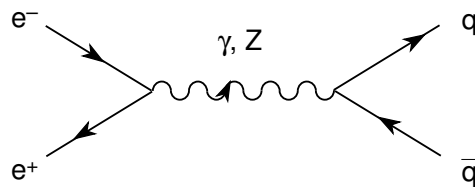
Фигура 8.6: Триъгълни кваркови примки, генериращи разпада $\Pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$.

Вероятност за разпад (ширина) $\Gamma(\Pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = 7,73\left(\frac{N_c}{3}\right)^2 eV$

Експериментално измерената $\Gamma(\Pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = 7.7 \pm 0.6 eV$, т.е. имаме $N_c = 3$. Хубавото на този разпад е, че е асоцииран с *аномалия*: глобалната ароматна симетрия е нарушена от квантови ефекти (триъгълни диаграми). Тогава може да се покаже, че $\Gamma(\Pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ не се корегира от силните взаимодействия.

- Директен тест на явантовото число цвят може да се осъществи, като се изследва отношението

$$R_{e^+e^-} \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}. \quad (8.20)$$



Фигура 8.7: Файнманова диаграма за процеса $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$.

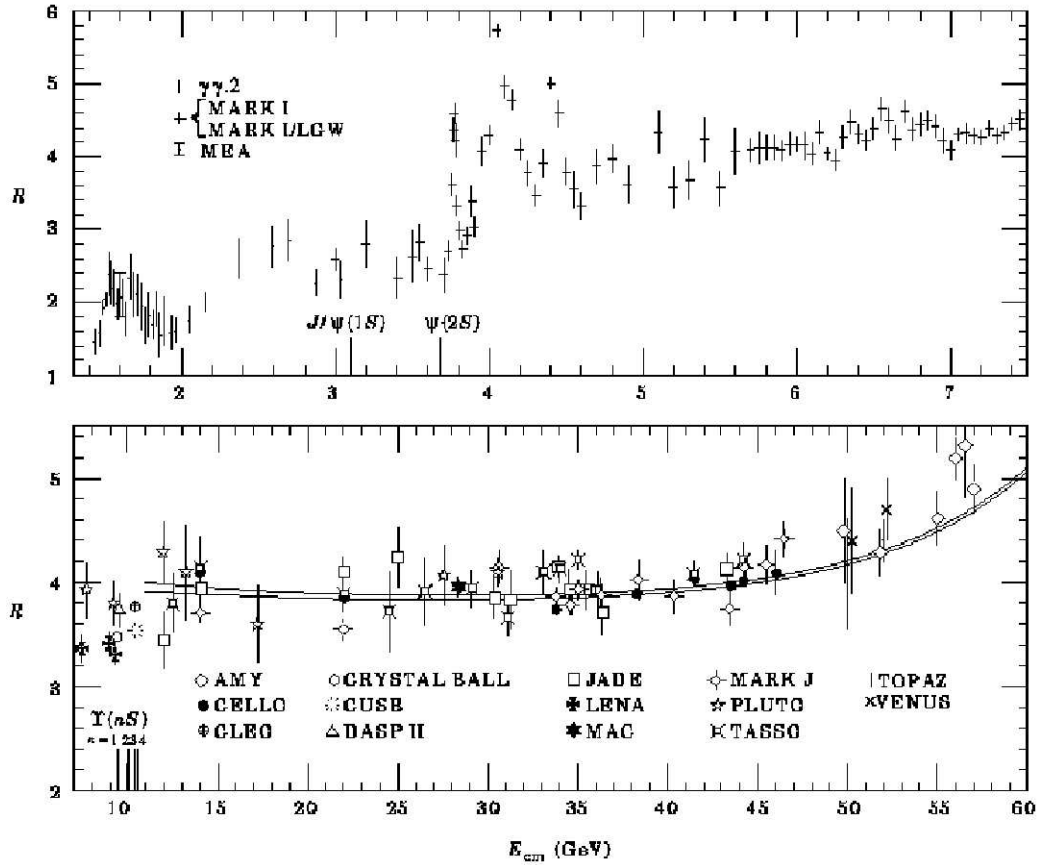
Раждането на адрони в случая се извършва посредством $e^+e^- \rightarrow$

$\gamma^*, Z^* \rightarrow q\bar{q} \rightarrow \text{hadrons}$. Доколкото кварките не се срещат в свободно състояние, вероятността да адронизират е 1. Следователно сумата по всички възможни кварки в крайно състояние ще даде пълното инклузивно сечение за раждане на адрони. При енергии под Z пика, сечението се доминира от обмяна на γ ; тогава съотношението $R_{e^+e^-}$ се задава от сумата на квадрата на електрическия заряд на кварките:

$$R_{e^+e^-} \approx N_C \sum_{f=1}^{N_f} Q_f^2 = \begin{cases} \frac{2}{3}N_C = 2, & (N_f = 3 : u, d, s) \\ \frac{10}{9}N_C = \frac{10}{3}, & (N_f = 4 : u, d, s, c) \\ \frac{11}{9}N_C = \frac{11}{3}, & (N_f = 5 : u, d, s, c, b) \end{cases} . \quad (8.21)$$

Експерименталните стойности за отношението $R_{e^+e^-}$ са представени на фиг. 8.8. Простата форма на 8.21 не може да обясни сложната структура около различните “кваркови прагове”, а дава само правилната средна стойност на сечението, далеч от праговете, ако отчетем, че $N_C = 3$. Съответствието е по-добро при по-високи енергии. Забележете, че силните взаимодействия не се взимат под внимание, отчита се само хипотезата за конфайнмънта.

Адронните разпади на τ лептона също дават допълнително указание, че $N_C = 3$, но ней няма да се спираме подробно на това.



Фигура 8.8: Резултати за $R_{e^+e^-}$. Двете непрекъснати линии са QCD фитове.

8.4 Квантова хромодинамика (QCD)

8.5 Квантова хромодинамика

8.5.1 Лагранжиан на квантовата хромодинамика

Нека означим с q_f^α кварково поле с цвят α и аромат f . За по-опростен запис на уравненията ще използваме векторно означение в цветното

пространство:

$$q_f = \begin{pmatrix} q_f^1 \\ q_f^2 \\ q_f^3 \end{pmatrix} \quad (8.22)$$

Тогава свободният лагранжиан може да се запише като

$$\mathcal{L}_0 = \sum_f \bar{q}_f (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) q_f. \quad (8.23)$$

Той е инвариантен относно произволни глобални $SU_c(3)$ трансформации в цветното пространство

$$q_f^\alpha \rightarrow (q_f^\alpha)' = U_\beta^\alpha q_f^\beta. \quad (8.24)$$

$SU_c(3)$ матриците могат да се запишат като

$$U = \exp\left\{-ig_s \frac{\lambda^a}{2} \theta_a\right\}, \quad (8.25)$$

където λ^a ($a = 1, 2, \dots, 8$) са генераторите на фундаменталното представяне на $SU_c(3)$ алгебрата, а θ_a са произволни параметри. Матриците λ^a са безследови и удовлетворяват комутационните съотношения

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc} \lambda^c, \quad (8.26)$$

като f^{abc} са структурните константи на $SU_c(3)$, които са реални и напълно антисиметрични.

Както в случая на квантовата електродинамика, изискваме лагранжианът да е инвариантен и относно *локални* $SU_c(3)$ преобразувания, $\theta_a = \theta_a(x)$. За да е изпълнено това изискване, трябва да се промени кварковата производна до ковариантен обект. Тъй като сега имаме 8 независими параметри, са нужни 8 различни калибровъчни бозона $G_a^\mu(x)$, т.нар. глюони:

$$D^\mu q_f \equiv \left[\partial^\mu - ig_s \frac{\lambda^a}{2} G_a^\mu(x)\right] q_f = [\partial^\mu - ig_s G^\mu(x)] q_f \quad (8.27)$$

В случая използваме по-компактното означение на матриците,

$$[G^\mu(x)]_{\alpha\beta} \equiv \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{\alpha\beta} G_a^\mu(x) \quad (8.28)$$

Трансформационните свойства на калибровъчните полета са фиксирани от изискването $D^\mu q_f$ да се трансформира по същия начин както q_f :

$$D^\mu \longrightarrow (D^\mu)' = U D^\mu U^\dagger; \quad G^\mu \longrightarrow (G^\mu)' = U G^\mu U^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial^\mu U) U^\dagger. \quad (8.29)$$

При инфинитезимално $SU_c(3)$ преобразуване,

$$\begin{aligned} q_f^\alpha &\longrightarrow (q_f^\alpha)' = q_f^\alpha - ig_s \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{\alpha\beta} \delta\theta_a q_f^\beta, \\ G_a^\mu &\longrightarrow (G_a^\mu)' = G_a^\mu - \partial^\mu(\delta\theta_a) + g_s f^{abc} \delta\theta_b G_c^\mu. \end{aligned} \quad (8.30)$$

За да построим калибровъчно-инвариантен кинетичен член на лагранжиана за глюоните, въвеждаме съответните полета:

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu}(x) &\equiv \frac{i}{g_s} [D^\mu, D^\nu] = \partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu - ig_s [G^\mu, G^\nu] \equiv \frac{\lambda^a}{2} G_a^{\mu\nu}(x), \\ G_a^{\mu\nu}(x) &= \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu. \end{aligned} \quad (8.31)$$

При калибровъчно преобразуване

$$G^{\mu\nu} \longrightarrow (G^{\mu\nu})' = U G^{\mu\nu} U^\dagger \quad (8.32)$$

и цветната следа $Tr(G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a$ остава инвариантна.

Като приложим подходяща нормировка за глюонния кинетичен член, накрая получаваме $SU_c(3)$ -инвариантния лагранжиан на квантовата хромодинамика:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} \equiv -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + \sum_f \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f \quad (8.33)$$

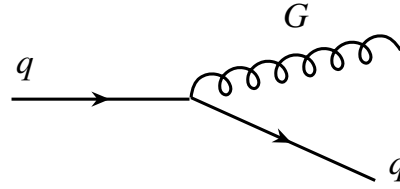
Удобно е лагранжианът да се раздели на няколко различни части:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{QCD}} = & -\frac{1}{4}(\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu)(\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) + \sum_f \bar{q}_f^\alpha (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) q_f^\alpha \\
& + g_s G_a^\mu \sum_f \bar{q}_f^\alpha \gamma_\mu \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{\alpha\beta} q_f^\beta \\
& - \frac{g_s}{2} f^{abc} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e.
\end{aligned} \tag{8.34}$$

Първият ред на уравнение 8.34 съдържа кинетични членове за полетата, които пораждаат съответните пропагатори. Цветното взаимодействие между кварки и глюони е дадено на втория ред; то включва $SU_c(3)$ матриците λ^a . Поради неабелевия характер на групата на цвят, членът $G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a$ поражда самодействията на глюони от трета и четвърта степен, дадени на третия ред от уравнението.

Лагранжианът на квантовата хромодинамика има прост вид благодарение на свойствата на цветна симетрия. Всички взаимодействия се описват чрез една единствена константа g_s , наречена константа на силното взаимодействие. Появата на самодействия на калибровъчните полета представлява нов ефект, несъществуващ в случая на квантовата електродинамика. Можем да очакваме, че именно тези нови самодействия ще обяснят свойства като асимптотична свобода и конфайнмент, които не се срещат в квантовата електродинамика.

Без да се правят точни пресмятания, от \mathcal{L}_{QCD} вече могат да се извлекат качествени физически резултати: кварките могат да излъчват глюони. В най-нисък порядък по g_s , доминиращ е процесът на излъчване на един глюон. Следователно, адронният разпад на Z бозона ще включва освен $Z \rightarrow q\bar{q}$ разпади, също така и $Z \rightarrow q\bar{q}G$ събития. Във втория случай експериментално се наблюдават три адронни струи.



Фигура 8.9: Диаграма на излъчване на един глюон от кварк.

8.5.2 Квантуване

G_a^μ има 4 степени на свобода (вектор и скалар), а са ни нужни само две. Затова може да се фиксира калибровката:

$$\mathcal{L}_{GF} \equiv -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu G_\mu^a)(\partial_\mu G_a^\mu) \quad (8.35)$$

където $\partial_\mu G_a^\mu = 0$ и ξ е калибровъчен параметър.

Пропагаторът е:

$$\langle 0 | T[G_a^\mu(x)G_b^\nu(y)] | 0 \rangle = i\delta_{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (8.36)$$

Нека разгледаме взаимодействието $q\bar{q} \rightarrow GG$.

$$T = J^{\mu\mu'} \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \varepsilon_{\mu'}^{(\lambda')} \quad (8.37)$$

$$P \sim \frac{1}{2} J^{\mu\mu'} (J^{\nu\nu'})^+ \sum_\lambda \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \varepsilon_\nu^{(\lambda)*} \sum_{\lambda'} \varepsilon_{\mu'}^{(\lambda')} \varepsilon_{\nu'}^{(\lambda')*} \quad (8.38)$$

като $P_T \neq P_c$.

отново следват диаграми!!!!

В квантовата хромодинамика $\partial^\mu A_\mu = 0, \Rightarrow \square\Theta = 0 = \partial^\mu J_\mu = 0$. Следователно $k_\mu J^{\mu\mu'} = k'_{\mu'} J^{\mu\mu'} = 0$ и надлъжната поляризация изчезва.

В случай, че $\partial_\mu G_a^\mu = 0$, се получава $k_\mu J^{\mu\mu'} \neq 0$.

Духове:

$$\mathcal{L}_{FP} = -\partial_\mu \bar{\Phi}_a D^\mu \Phi_a, \quad (8.39)$$

където $D^\mu \Phi_a \equiv \partial^\mu \Phi_a - g_s f^{abc} \Phi_b G_c^\mu$. Тогава $\{\Phi_a, \Phi_b\} = 0$.

диаграма!!!!

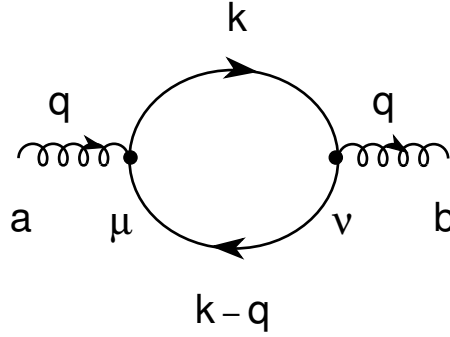
8.5.3 Квантови примки

В най-нисък порядък по g_s (дървесно приближение), всички амплитуди на разсейване се пресмятат лесно: $q\bar{q} \rightarrow GG, qq \rightarrow qq, Gq \rightarrow Gq$ и така нататък. За жалост това не ни помага да разберем физическия свят от адрони. Първо, ние виждаме адрони, а не кварки и глюони. Второ, от експерименталните данни знаем, че големината на ядрените взаимодействия се мени с енергията: взаимодействията са много силни (конфайнмент) при малки енергии, но кварките имат поведение на почти свободни частици при високи енергии. Следователно константата g_s зависи от енергията. Ако квантовата хромодинамика е добра теория, тя трябва да осигури динамичен мащаб чрез квантовите ефекти.

Регуляризация на интегралите по примките

Пресмятането на пертурбативни поправки към диаграмите в дървесно приближение води до разходящи интерграли от квантовите

примки. Затова е необходимо тези интеграли да се регуляризират и да се получат крайни физически резултати.



Фигура 8.10: Диаграма на собствената енергия на глюона.

Да разгледаме диаграмата на собствената енергия на глюона на фиг. 8.10. Приносът ѝ в импулсното пространство може лесно да се пресметне, използвайки стандартните файнманови правила:

$$i\Pi_{ab}^{\mu\nu}(q) = -g_s^2 \delta_{ab} T_F \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu k \gamma^\nu (k - q)]}{k^2 (k - q)^2} \quad (8.40)$$

Резултатът е пропорционален на g_s^2 , защото има два върха $q\bar{q}G$ и има тривиален $SU_C(3)$ фактор, $T_F = \frac{1}{2}$, и двац от цветната следа $\frac{1}{4} \text{Tr}(\lambda^a, \lambda^b) = \delta^{ab} T_F$.

Проблемът се появява при интегриране по импулса, което води до разходящи резултати: $\int \frac{d^4 k}{k^2} \rightarrow \infty$. Възможни са много начини за регуляризиране на разходимостта чрез предефиниране на интеграла. Една възможност е въвеждането на Cut-off параметър M , такъв, че се интегрират само импулси $k < M$. Тогава интегралът е растяща функция на M . По-удобен е методът на размерна редукция: изчисленията се правят в размерност $D = 4 + 2\varepsilon$. При $\varepsilon \neq 0$ интегралът е добре дефиниран:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\alpha (k-q)^\beta}{k^2 (k-q)^2} = \frac{-i}{6(4\pi)^2} \left(\frac{-q^2}{4\pi} \right)^\varepsilon \Gamma(-\varepsilon) \left(1 - \frac{5}{3}\varepsilon \right) \left\{ \frac{q^2 g^{\alpha\beta}}{2(1+\varepsilon)} + q^\alpha q^\beta \right\} \quad (8.41)$$

Ултравioletовата разходимост на примката се проявява при $\varepsilon \rightarrow 0$, чрез полюса на гама-функцията,

$$\Gamma(-\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (8.42)$$

където $\gamma_E = 0.577215\dots$ е константата на Ойлер.

Разходимостта се премахва чрез регуляризиращите параметри $M \rightarrow \infty$ или $\varepsilon \rightarrow 0$. Тъй като предаденият импулс q^2 има размерност, удобно е да се въведе параметър μ с размерност на енергия, и да се разпише

$$\left(\frac{-q^2}{4\pi} \right)^\varepsilon \Gamma(-\varepsilon) = \mu^{2\varepsilon} \left(\frac{-q^2}{4\pi\mu^2} \right)^\varepsilon \Gamma(-\varepsilon) = -\mu^{2\varepsilon} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi + \ln(-q^2/\mu^2) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\} \quad (8.43)$$

Изразът в горното уравнение не зависи от μ , но по този начин се получава безразмерна величина $(-q^2/\mu^2)$ в логаритъма.

Приносът на примката от фиг. 8.10 може да се изчисли като

$$\begin{aligned} \Pi_{ab}^{\mu\nu} &= \delta_{ab} (-q^2 g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu) \Pi(q^2), \\ \Pi(q^2) &= -\frac{4}{3} T_F \left(\frac{g_s \mu^\varepsilon}{4\pi} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi + \ln(-q^2/\mu^2) - \frac{5}{3} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\} \end{aligned} \quad (8.44)$$

Поради ултравioletовата разходимост, уравнение (8.44) не дава търсения принос на собствената енергия. То обаче показва как този ефект се мени с промяна на енергетичния мащаб. Ако знаем стойността на $\Pi(q^2)$ при фиксиран предаден импулс q_0^2 , можем да я

определим при всеки друг мащаб:

$$\Pi(q^2) = \Pi(q_0^2) - \frac{4}{3}T_F \left(\frac{g_s}{4\pi}\right)^2 \ln(q^2/q_0^2). \quad (8.45)$$

Можем да разделим израза за приноса на собствената енергия на безсмислен разходящ член и краен член, съдържащ зависимостта от q^2 ,

$$\Pi(q^2) \equiv \Delta\Pi_\varepsilon(\mu^2) + \Pi_R(q^2/\mu^2). \quad (8.46)$$

Това разделение не е еднозначно, тъй като членовете, зависещи от q^2 , могат да се разделят по няколко начина. Съществуват три схеми на дефиниране:

$$\Delta\Pi_\varepsilon(\mu^2) = \begin{cases} -\frac{T_F g_s^2}{3\pi 4\pi^2} \mu^{2\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \ln(4\pi) - \frac{5}{3}\right] & (\mu\text{-схема}), \\ -\frac{T_F g_s^2}{3\pi 4\pi^2} \mu^{2\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} & (\overline{\text{MS}}\text{-схема}), \\ -\frac{T_F g_s^2}{3\pi 4\pi^2} \mu^{2\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E - \ln(4\pi)\right] & (\text{MS}\text{-схема}), \end{cases} \quad (8.47)$$

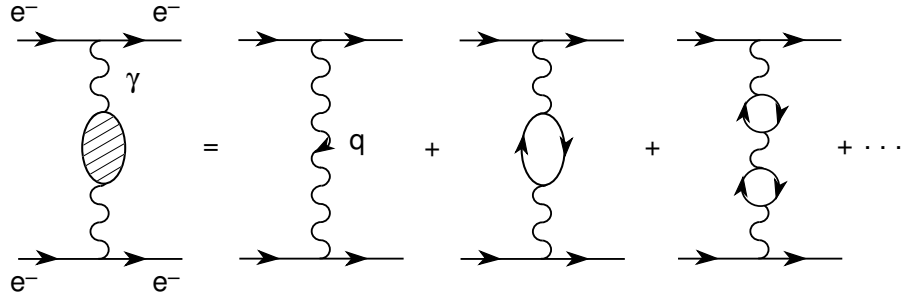
$$\Pi_R(q^2/\mu^2) = \begin{cases} -\frac{T_F g_s^2}{3\pi 4\pi^2} \ln(-q^2/\mu^2) & (\mu\text{-схема}), \\ -\frac{T_F g_s^2}{3\pi 4\pi^2} \left[\ln(-q^2/\mu^2) + \gamma_E - \ln(4\pi) - \frac{5}{3}\right] & (\overline{\text{MS}}\text{-схема}), \\ -\frac{T_F g_s^2}{3\pi 4\pi^2} \left[\ln(-q^2/\mu^2) - \frac{5}{3}\right] & (\text{MS}\text{-схема}). \end{cases} \quad (8.48)$$

При μ -схемата се използва стойността на $\Pi(-\mu^2)$ за намиране на разходящата част. MS и $\overline{\text{MS}}$ са съкращения от ????????????????

Пренормировка

Една квантово полева теория се нарича *пренормируема*, ако всички ултравиолетови разходимости в нея могат да бъдат погълнати чрез преопределяне на изходните полета и взаимодействия.

Да разгледаме електромагнитното взаимодействие между два електрона. При наличие на една примка, приносът на собствената енергия на фотона (квантова електродинамика) се дава от уравнение



Фигура 8.11: Принос на собствената енергия на фотона към e^-e^- разсейване.

(8.44), но вземайки $T_F \rightarrow 1$ и $g_s \rightarrow e$. Съответната амплитуда на разсейване има вида

$$T(q^2) \sim -J^\mu J_\mu \frac{e^2}{q^2} \{1 - \Pi(q^2) + \dots\}, \quad (8.49)$$

където с J^μ е означен електромагнитният фермионен ток.

В най-нисък порядък $T(q^2) \sim \alpha/q^2$ при $\alpha = e^2/(4\pi)$. Разходящата поправка, предизвикана от квантовите примки, може да се погълне чрез преопределяне на константата:

$$\frac{\alpha_0}{q^2} \{1 - \Delta\Pi_\varepsilon(\mu^2) - \Pi_R(q^2/\mu^2)\} \equiv \frac{\alpha_R(\mu^2)}{q^2} \{1 - \Pi_R(q^2/\mu^2)\}, \quad (8.50)$$

$$\alpha_R(\mu^2) = \alpha_0 \left\{ 1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \mu^{2\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} + C_{\text{scheme}} \right] + \dots \right\}, \quad \alpha_0 \equiv \frac{e_0^2}{4\pi}, \quad (8.51)$$

където с e_0 е означена *чистата* константата на взаимодействие от лагранжиана на квантовата електродинамика; тя обаче не е пряко наблюдаема. Преопределяйки (8.50), амплитудата на разсейване става крайна и дава точно предсказание за сечението на разсейване, което от своя страна може да се сравни с експерименталните данни. Всъщност мерим *пренормираната* константа на взаимодействие α_R .

Пренормирането (8.50) е смислено само ако се направи еднозначно - така, че всички ултравиолетови разходимости от всички възможни процеси на разсейване да се унищожават чрез едно и също предефиниране на константата и полетата. Положителната черта на калибровъчните теории като квантовата електродинамика и квантовата хромодинамика е, че калибровъчната симетрия гарантира пренормируемостта на теорията.

Пренормираната константа $\alpha_R(\mu^2)$ зависи от произволния мащаб μ на избраната схема на пренормировка [константата C_{scheme} означава различните крайни членове в уравнение (8.47)]. Квантовите примки въвеждат зависимост от мащаба по един много изтънчен начин. И $\alpha_R(\mu^2)$ и пренормираната поправка към собствената енергия $\Pi_R(q^2/\mu^2)$ зависят от μ , но физическата амплитуда на разсейване е естествено независеща от μ : ($Q^2 \equiv -q^2$)

$$\begin{aligned} T(q^2) &\sim -4\pi J^\mu J_\mu \frac{\alpha_R(\mu^2)}{q^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha_R(\mu^2)}{3\pi} \left[\ln \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right) + C'_{scheme} \right] + \dots \right\} = \\ &= 4\pi J^\mu J_\mu \frac{\alpha_R(Q^2)}{Q^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha_R(Q^2)}{3\pi} C'_{scheme} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (8.52)$$

Величината $\alpha(Q^2) \equiv \alpha_R(Q^2)$ се нарича квантово електродинамично *бягащо взаимодействие*. Обикновената константа на фината структура $\alpha = 1/137$ се дефинира чрез класическата формула на Томсън, затова тя отговаря на много ниски енергии $Q^2 = -m_e^2$. Ясно е, че стойността на α при експериментите във физиката на високите енергии не е същата [$\alpha(M_Z^2)_{\overline{MS}} = 1/129$]. Зависимостта на $\alpha(Q^2)$ от енергията се регулира от т.нар. β -функция:

$$\mu \frac{d\alpha}{d\mu} \equiv \alpha \beta(\alpha); \quad \beta(\alpha) = \beta_1 \frac{\alpha}{\pi} + \beta_2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + \dots \quad (8.53)$$

В еднопримково приближение β -функцията се свежда до първия

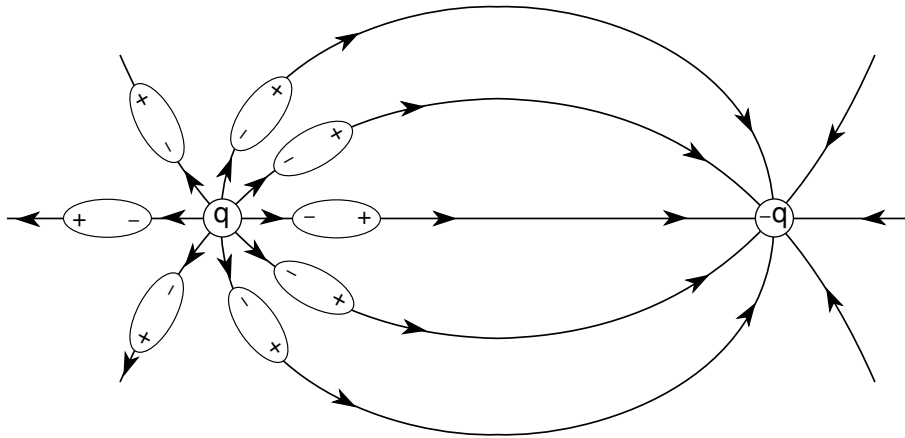
коэффициент, който е фиксиран от уравнение (8.51):

$$\beta_1^{\text{QED}} = \frac{2}{3}. \quad (8.54)$$

Тогава диференциалното уравнение от първи ред (8.53) може лесно да се реши и резултатът е:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1 - \frac{\beta_1 \alpha(Q_0^2)}{2\pi} \ln(Q^2/Q_0^2)}. \quad (8.55)$$

Тъй като $\beta_1 > 0$, бягащото взаимодействие на квантовата електродинамика расте с увеличаване на енергията: $\alpha(Q^2) > \alpha(Q_0^2)$ ако $Q^2 > Q_0^2$; т.е. електромагнитният заряд намалява на големи разстояния. Това може да се разбере интуитивно като ефект на екраниране от виртуалните e^+e^- двойки, породени чрез квантови ефекти около заряда. Физическият вакуум в квантовата електродинамика има поведение на поляризирана диелектрична среда.



Фигура 8.12: Електромагнитно екраниране на заряд в биполарна среда.

Полагайки $\mu^2 = Q^2$ в уравнение (8.52), се унищожават всички зависимости от $\ln(Q^2/\mu^2)$ от всички порядъци по α . Бягащото взаимодействие (8.55) събира всички водещи логаритмични поправки,

т.е.

$$\alpha(Q^2) = \alpha(\mu^2) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\beta_1 \alpha(\mu^2)}{2\pi} \ln(Q^2/\mu^2) \right]^n. \quad (8.56)$$

Логаритмичните членове от по-висок порядък отговарят на приноса на произволен брой примки на собствената енергия, вложени в пропагатора на промеждутъчен фотон на фиг. 8.11 $[1 - \Pi_R(q^2/\mu^2) + (\Pi_R(q^2/\mu^2))^2 + \dots]$.

Уравнение (8.53) може да се запише като:

$$\frac{d\alpha}{\alpha\beta} = \frac{d\mu}{\mu} \quad (8.57)$$

Тъй като в еднопримково приближение β се свежда само до първия си коефициент, $\beta = \frac{\beta_1}{\pi}\alpha$, при заместване в уравнението получаваме:

$$\frac{d\alpha}{\frac{\beta_1}{\pi}\alpha^2} = \frac{d\mu}{\mu} \quad (8.58)$$

Тогавя горното уравнение се свежда до израз с разделени променливи $\frac{d\alpha}{\alpha^2} = \frac{\beta_1 d\mu}{\pi \mu}$, който можем веднага да интегрираме. Резултатът е:

$$-\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha_0} = \frac{\beta_1}{\pi} \ln \frac{\mu}{\Lambda} \quad (8.59)$$

Чрез прегрупиране на изразите

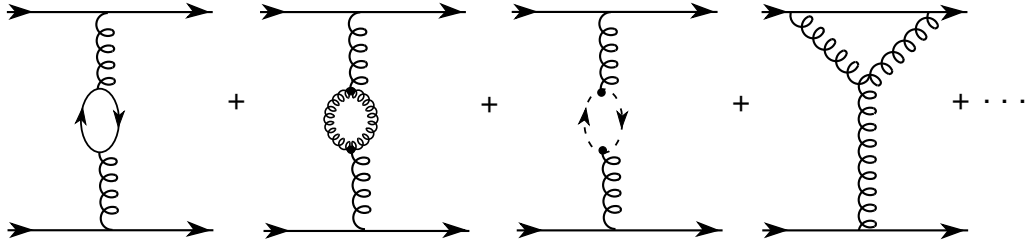
$$\frac{1}{\alpha_0} \left[1 - \frac{\beta_1}{\pi} \alpha_0 \ln \frac{\mu}{\Lambda} \right] = \frac{2}{\alpha}, \quad (8.60)$$

стигаме до крайния резултат за пренормираната константа на взаи-

модействието:

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\beta_1}{\pi} \alpha_0 \ln \frac{\mu}{\Lambda}} \quad (8.61)$$

Бягащо взаимодействие в квантовата хромодинамика



Фигура 8.13: Файнманови диаграми, допринасящи за пренормирането на силното взаимодействие. Пресечената линия показва духовата поправка.

Пренормирането на константата на квантовата хромодинамика протича по подобен начин. Поради неабелевия характер на $SU_C(3)$ съществуват допълнителни поправки от самодействието на глюоните. След пресмятане на съответните едно-примкови диаграми на фиг. 8.13, се получава стойността на първия коефициент на β -функцията:

$$\beta_1 = \frac{2}{3} T_F N_f - \frac{11}{6} C_A = \frac{2N_f - 11N_C}{6}. \quad (8.62)$$

Положителният принос, пропорционален на N_f , е породен от примки $q-\bar{q}$ и отговаря на квантово електродинамичния резултат (с изключение на множителя T_F). Самодействията на глюоните дават отрицателния принос, пропорционален на N_C . Този втори член дава обяснение на напълно различното поведение на квантовата хромодинамика: $\beta_1 < 0$ ако $N_f \leq 16$. Съответното бягащо взаимодействие

на квантовата хромодинамика,

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{1 - \frac{\beta_1 \alpha_s(Q_0^2)}{2\pi} \ln(Q^2/Q_0^2)}, \quad (8.63)$$

намалява при малки разстояния, т.е.

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} \alpha_s(Q^2) = 0. \quad (8.64)$$

Следователно, за $N_f \leq 16$ квантовата хромодинамика притежава нужното свойство на асимптотична свобода. Калибровъчните самодействия на глюоните *размазват* QCD зарядите и предизвикват ефект на *анти-екраниране*. Този ефект не съществува в квантовата електродинамика, тъй като фотоните нямат електричен заряд. Само неабелеви калибровъчни теории, в които промеждутъчните калибровъчни бозони имат самодействие, притежават това свойство на анти-екраниране.

Въпреки че квантовите ефекти водят до зависимост от енергията, трябва да се определи енергетичен мащаб, спрямо който даден Q^2 е голям или малък. Една възможност е да се избере мащаб, при който α_s става силно взаимодействие (т.е. $\alpha_s \sim 1$), където вече не може да се използва теория на пертурбациите. По-точно определение може да се даде от решението на диференциалното уравнение за β -функцията (8.53). В еднопримково приближение се получава

$$\ln \mu + \frac{\pi}{\beta_1 \alpha_s(\mu^2)} = \ln \Lambda, \quad (8.65)$$

където $\ln \Lambda$ е просто интеграционна константа. Следователно

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{2\pi}{-\beta_1 \ln(\mu^2/\Lambda^2)}. \quad (8.66)$$

По този начин заменяме безразмерния параметър g_s с размерния мащаб Λ . Броят параметри на QCD теорията остава същият (1 за

безмасови кварки), но квантовите ефекти пораждат енергетичната скала. Въпреки че ур. (8.63) създава впечатление, че зависимостта от енергията на $\alpha_s(\mu^2)$ включва два параметъра, μ_0^2 и $\alpha_s(\mu_0^2)$, само комбинацията (8.65) е от значение, както е показано в (8.66).

Когато $\mu \gg \Lambda$, $\alpha_s(\mu^2) \rightarrow 0$, така че се възстановява асимптотичната свобода. При понижаване на енергията бягащото взаимодействие нараства; за $\mu \rightarrow \Lambda$, $\alpha_s(\mu^2) \rightarrow \infty$ и теория на пертурбациите става неприложима. Мащабът Λ показва кога силното взаимодействие blows up???? Уравнение (8.66) подсказва, че при ниски енергии е възможно наличието на конфайнмент в квантовата хромодинамика, но не дава доказателства за това, тъй като теория на пертурбациите престава да е валидна при $\mu \rightarrow \Lambda$.

Висши поправки

Висшите поправки по теория на пертурбациите са много по-важни в квантовата хромодинамика, отколкото в квантовата електродинамика, тъй като константата на взаимодействие е много по-голяма (при ниски енергии). За нещастие и пресмятанията са много по-сложни технически. Въпреки трудностите, много величини са вече пресметнати с точност до $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ или дори до $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$. β -функцията е пресметната в приближение до три примки; получените стойности на коефициентите при по-висок порядък в $\overline{\text{MS}}$ схема са:

$$\beta_2 = -\frac{51}{4} + \frac{19}{12}N_f; \quad \beta_3 = \frac{1}{64} \left[-2857 + \frac{5033}{9}N_f - \frac{325}{27}N_f^2 \right]. \quad (8.67)$$

Ако $N_f \leq 8$, $\beta_2 < 0$ ($\beta_3 < 0$ за $N_f \leq 5$), което допълнително допринася за поведението на асимптотична свобода.

Зависимостта на бягащото взаимодействие от енергията при по-

висок порядък се дава от:

$$\alpha_s(\mu^2) = \alpha_s(\mu_0^2) \left\{ 1 - \frac{\beta_1 \alpha_s(\mu_0^2)}{2\pi} \ln(\mu^2/\mu_0^2) - \frac{\beta_2}{2} \left(\frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{\pi} \right)^2 \ln(\mu^2/\mu_0^2) + \dots \right\}^{-1}, \quad (8.68)$$

или в термини на Λ ,

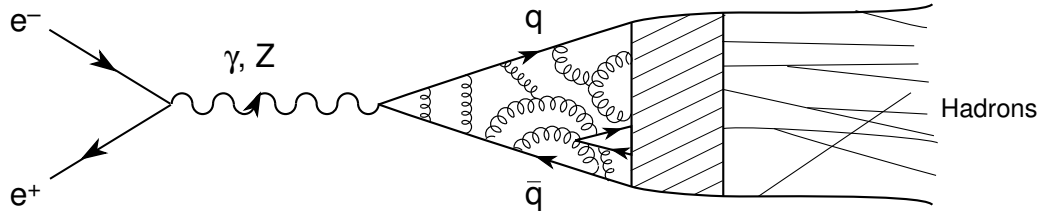
$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{2\pi}{(-\beta_1) \ln(\mu^2/\Lambda^2)} \left\{ 1 - \frac{\beta_2}{\beta_1 (-\beta_1) \ln(\mu^2/\Lambda^2)} \ln \left[\frac{1}{2} \ln(\mu^2/\Lambda^2) \right] + \dots \right\}. \quad (8.69)$$

При сравняване на различни QCD fits?? с данните, трябва да се има предвид, че всяка дадена стойност на α_s се отнася за определен избор на мащаб и пренормировъчна схема. Нещо повече, получените числови стойности са различни, ако се работи в leading (LO), next-to-leading (NLO) or next-to-next-to-leading (NNLO) order.??? Въпреки че параметърът Λ не зависи от мащаба, той е зависим от схемата. Например:

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^2 = \frac{e^{\gamma_E}}{4\pi} \Lambda_{\text{MS}}^2. \quad (8.70)$$

Нещо повече, $\Lambda_{\text{LO}} \neq \Lambda_{\text{NLO}} \neq \Lambda_{\text{NNLO}}$. Всъщност в NLO могат да се дадат различни дефиниции на Λ в зависимост от начина на избиране на интеграционната константа при решаване на диференциалното уравнение за β -функцията. Тъй като в MS и $\overline{\text{MS}}$ схемите коефициентите на β -функцията зависят от N_f , Λ има различни стойности при промяна на броя аромати. В NLO, връзката между мащабите Λ за три и четири аромата се дава от:

$$\Lambda_4 \approx \Lambda_3 \left(\frac{\Lambda_3}{m_c} \right)^{2/25} \left[\ln(m_c^2/\Lambda_3^2) \right]^{-107/1875}. \quad (8.71)$$

Фигура 8.14: $e^+e^- \rightarrow \gamma^*, Z^* \rightarrow$ адрони.

8.5.4 Пертурбативна квантова хромодинамика

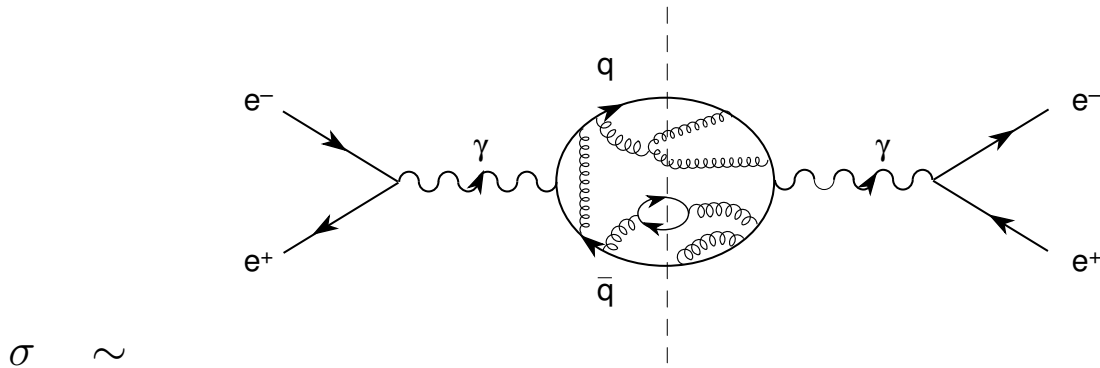
$e^+e^- \rightarrow$ адрони

Инклузивното раждане на адрони от аниhilацията на e^+e^- е процес, който може да се използва за даване на оценка на предсказанията на квантовата хромодинамика. Раждането на адрони се осъществява чрез основния механизъм $e^+e^- \rightarrow \gamma^*, Z^* \rightarrow q\bar{q}$, като крайната $q\bar{q}$ двойка взаимодейства чрез QCD сили; т.е. кварките обменят и излъчват глюони (и $q'\bar{q}'$ двойки) по всички възможни начини.

При високи енергии, когато α_s е малка, могат да се използват пертурбативни техники за изследване на различни подпроцеси: $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}, q\bar{q}G, q\bar{q}GG, \dots$. Но все още не е ясен начинът, по който кварките и глюоните адронизират. Качествено погледнато, от $q\bar{q}$ тока се раждат кварки и адрони при много малки разстояния, $x \sim 1/\sqrt{s}$. След това те продължават да излъчват допълнително меки глюони с намаляване на енергията. При по-големи разстояния, $x \sim 1/\Lambda$, взаимодействието става много силно и настъпва процес на адронизация. Тъй като липсва строго описание на механизма на конфайнмент, не могат да се дадат точни предсказания за различните ексклузивни процеси, например $e^+e^- \rightarrow 16\pi$. Но може да се направи доста точно предсказание за инклузивното раждане на адрони като цяло:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) = \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q} + q\bar{q}G + q\bar{q}GG + \dots). \quad (8.72)$$

Подробностите на крайната адронизация нямат връзка с инклузивната сума, защото вероятността за адронизация е просто единица поради нашето допускане за конфайнмент.



Фигура 8.15: Диаграмата показва връзката между цялото сечение за раждане на адрони и функцията $\Pi^{\mu\nu}(q)$. Капката $q\bar{q}$ съдържа всички възможни QCD корекции. Пресечената вертикална линия показва, че капката е разделена по всички възможни начини така, че лявата и дясната страна да отговарят съответно на амплитудата на раждане T и на нейната комплексно спрегната T^\dagger за дадено междинно състояние.

Много под Z пика раждането на адрони е доминирано от процеси на обмяна на γ . Следователно можем да пресметнем сечението на подпроцесите $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow q\bar{q}, q\bar{q}G, \dots$ (в даден ред по α_s) и да вземем сбора им. Технически е много по-лесно да се пресметне квантово хромодинамичното T -произведение на два електромагнит-

ни тока [$J_{\text{em}}^\mu = \sum_f Q_f q_f \gamma^\mu q_f$]:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) \equiv i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T (J_{\text{em}}^\mu(x) J_{\text{em}}^\nu(0)^\dagger) | 0 \rangle = (-g^{\mu\nu} q^2 + q^\mu q^\nu) \Pi_{\text{em}}(q^2). \quad (8.73)$$

Както е показано на фиг. 8.15, поглътящата част на обекта (т.е. имажинерната част, която произлиза от обрязването - слагане на повърхността или *on shell* - на пропагаторите на обменените промеждутъчни кварки и глюони по всички възможни начини) отговаря просто на сбора от квадратите на модулите на различните амплитуди на раждане. Точната връзка с цялото сечение е:

$$R_{e^+e^-} \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 12\pi \text{Im}\Pi_{\text{em}}(s). \quad (8.74)$$

Пренебрегвайки малките (далеч от прага) корекции, породени от ненулевите маси на кварките, отношението $R_{e^+e^-}$ се дава от пертурбативен ред от степени на $\alpha_s(s)$:

$$\begin{aligned} R_{e^+e^-} &= \left(\sum_{f=1}^{N_f} Q_f^2 \right) N_C \left\{ 1 + \sum_{n \geq 1} F_n \left(\frac{\alpha_s(s)}{\pi} \right)^n \right\} \\ &= \left(\sum_{f=1}^{N_f} Q_f^2 \right) N_C \left\{ 1 + F_1 \frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} + \left[F_2 + F_1 \frac{\beta_1}{2} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right] \left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[F_3 + F_2 \beta_1 \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) + F_1 \left(\frac{\beta_2}{2} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) + \frac{\beta_1^2}{4} \ln^2 \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right) \right] \left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(\alpha_s^4) \right\} \end{aligned} \quad (8.75)$$

Вторият израз формулира ясно как бягащото взаимодействие $\alpha_s(s)$ представлява безкрайна сума на логаритмични членове от висок порядък.

Дотук пресмятането е направено до α_s^3 и дава резултат (в $\overline{\text{MS}}$

схема):

$$\begin{aligned}
 F_1 &= 1, \\
 F_2 &= 1.986 - 0.115N_f, \\
 F_3 &= -6.637 - 1.200N_f - 0.005N_f^2 - 1.240 \frac{\left(\sum_f Q_f\right)^2}{3 \sum_f Q_f^2}.
 \end{aligned} \tag{8.76}$$

Интересна е зарядовата зависимост на третия член, която се дължи на приноса на три промеждутъчни глюона (с отделна кваркова линия за всеки електромагнитен ток на фиг. 8.15).

За 5 аромата имаме:

$$R_{e^+e^-}(s) = \frac{11}{3} \left\{ 1 + \frac{\alpha_s(s)}{\pi} + 1.411 \left(\frac{\alpha_s(s)}{\pi} \right)^2 - 12.80 \left(\frac{\alpha_s(s)}{\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(\alpha_s^4) \right\}. \tag{8.77}$$

Пертурбативната неопределеност на това предсказание е от порядък α_s^4 , тъй като коефициентът F_4 е неизвестен. Тя включва и неопределеностите, свързани с избора на мащаб и схема на пренормиране. Въпреки че общата сума на пертурбативния ред не зависи от пренормировъчните условности, различен избор на мащаб и/или схема би довел до (макар и малки) разлики в числените предсказания за обрязания ред.

Числените стойности на α_s и коефициентите F_n ($n \geq 2$) зависят от избраната схема (също и β_n за $n \geq 3$). Например във втори

порядък⁴, връзката между MS и $\overline{\text{MS}}$ схема е:

$$\alpha_s^{\text{MS}} = \alpha_s^{\overline{\text{MS}}} \left\{ 1 + \frac{\beta_1}{2} [\ln(4\pi) - \gamma_E] \frac{\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}}{\pi} + \dots \right\}, \quad (8.78)$$

$$F_2^{\text{MS}} = F_2^{\overline{\text{MS}}} - F_1 \frac{\beta_1}{2} [\ln(4\pi) - \gamma_E] = 7.359 - 0.441 N_f. \quad (8.79)$$

Разликата между двете схеми очевидно е ефект от по-висок порядък. При $N_f = 5$, MS схемата дава коефициент от втори порядък $F_2^{\text{MS}} = 5.156$, който е 3.6 пъти по-голям от $F_2^{\overline{\text{MS}}}$. Следователно пертурбативният ред е по-сходящ при избора на $\overline{\text{MS}}$ схема.

Теоретичното предсказание за $R_{e^+e^-}(s)$ над прага $b\bar{b}$ е сравнено на фиг. 8.16 с измерените данни, като са взети предвид масовите поправки от електрослаби (от обмяна на Z) процеси. Двете криви отговарят на $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(N_f=5)} = 60$ MeV (долна крива) и 250 MeV (горна крива). Нарастването при високи енергии се дължи на опашката на Z пика. Глобалният fit към всички данни между 20 и 65 GeV дава

$$\alpha_s(34 \text{ GeV}) = 0.146 \pm 0.030. \quad (8.80)$$

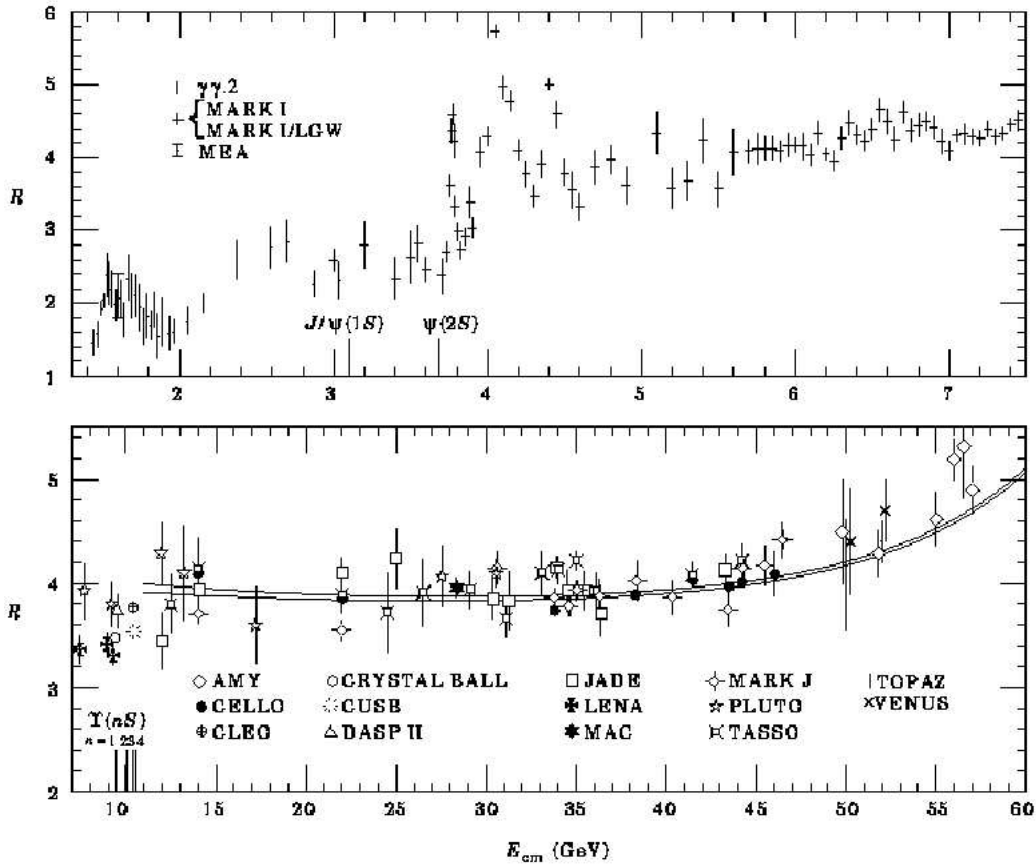
Адронната ширина на Z бозона може да се анализира по същия начин:

$$R_Z \equiv \frac{\Gamma(Z \rightarrow \text{адрони})}{\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-)} = R_Z^{EW} N_C \left\{ 1 + \sum_{n \geq 1} \tilde{F}_n \left(\frac{\alpha_s(M_Z^2)}{\pi} \right)^n + \mathcal{O} \left(\frac{m_f^2}{M_Z^2} \right) \right\}. \quad (8.81)$$

Глобалният фактор

$$R_Z^{EW} = \frac{\sum_f (v_f^2 + a_f^2)}{v_e^2 + a_e^2} (1 + \delta_{EW}) \quad (8.82)$$

⁴Всъщност, във втори порядък схемата се определя напълно от един единствен параметър. Следователно зависимостта от схемата и мащаба е една и съща в този порядък. Връзките в уравнения (8.78) и (8.79) са еквивалентни на смяна на мащаба: $\mu_{\overline{\text{MS}}}^2 = (4\pi/e^{\gamma_E}) \mu_{\text{MS}}^2$.



Фигура 8.16: Измервания на $R_{e^+e^-}$. Двете непрекъснати криви са QCD fits.

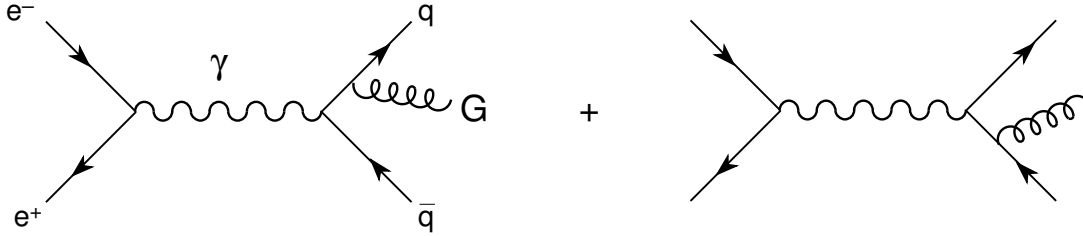
съдържа амплитудата на електрослабия разпад $Z \rightarrow \sum_f q_f \bar{q}_f$. Тъй като присъстват и векторната и аксиално-векторната константа, коефициентите на QCD-поправките \tilde{F}_n се различават от F_n за $n \geq 2$. Например аксиалната константа на Z поражда двупримковия принос $Z \rightarrow t\bar{t} \rightarrow GG \rightarrow q\bar{q}$ (чрез триъгълни кваркови диаграми), който липсва във векторния случай; това води до допълнителна поправка $\mathcal{O}(\alpha_s^2 m_t^2 / M_Z^2)$.

За да се определи α_s от R_Z , е нужно да се направи глобален анализ на данните от LEP и SLC, вземайки предвид електрослабите поправки от висок порядък. Последната стойност на α_s , докладвана

от LEP Electroweak Working Group, е:

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.125 \pm 0.005 \pm 0.002. \quad (8.83)$$

$e^+e^- \rightarrow$ струи



Фигура 8.17: Поправки към $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ от процесите на излъчване на глюон.

В най-нисък порядък по константата на силното взаимодействие раждането на адрони при взаимодействията на e^+e^- протича чрез $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$. Следователно при високи енергии крайните адронни състояния трябва да имат предимно двуструйна структура, което е в съгласие с емпиричните наблюдения. При $\mathcal{O}(\alpha_s)$ излъчването на твърд глюон от кварк предизвиква преход $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}G$, водещ до триструйна конфигурация. За безмасови кварки диференциалното разпределение на крайното състояние от три тела се дава от:

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2} = \frac{2\alpha_s}{3\pi} \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}, \quad (8.84)$$

където

$$\sigma_0 \equiv \frac{4\pi\alpha^2}{3s} N_C \sum_{f=1}^{N_f} Q_f^2 \quad (8.85)$$

е сечението $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ от най-нисък порядък. Кинематиката се определя чрез инвариантите $s \equiv q^2$ и $s_{ij} \equiv (p_i + p_j)^2 = (q - p_k)^2 \equiv$

$s(1 - x_k)$ ($i, j, k = 1, 2, 3$), където p_1, p_2 и p_3 са импулсите съответно на кварк, антикварк и глюон, а q е сумарният импулс на e^+e^- . За дадено s има само две независими кинематични променливи, понеже

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2. \quad (8.86)$$

В система на център на масите [$q^\mu = (\sqrt{s}, \vec{0})$], $x_i = E_i/E_e = 2E_i/\sqrt{s}$.

Уравнение (8.84) е разходящо, когато x_1 или x_2 клонят към 1. Тази разходимост е много различна от ултравиолетовите, които разгледахме преди в интегралите на примките. В сегашния случай самата дървесна амплитуда става сингулярна в граничната област на фазовото пространство. Проблемът се корени в инфрачервеното поведение на пропагаторите на промеждутъчните кварки:

$$\begin{aligned} x_1 \rightarrow 1 & \iff (p_2 + p_3)^2 = 2(p_2 \cdot p_3) \rightarrow 0; \\ x_2 \rightarrow 1 & \iff (p_1 + p_3)^2 = 2(p_1 \cdot p_3) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (8.87)$$

Съществуват две отделни кинематични конфигурации, които водят до *инфрачервени разходимости*:

1. **Колинеарен глюон:** Четириимпусът на глюона е успореден на четириимпулса на кварка или антикварка. Това се нарича също *масова сингулярност*, тъй като разходимост няма да има ако или глюонът или кваркът имат маса ($p_3 \parallel p_2$ означава, че $s_{23} = 0$ ако $p_2^2 = p_3^2 = 0$).

2. **Мек глюон:** $p_3 \rightarrow 0$.

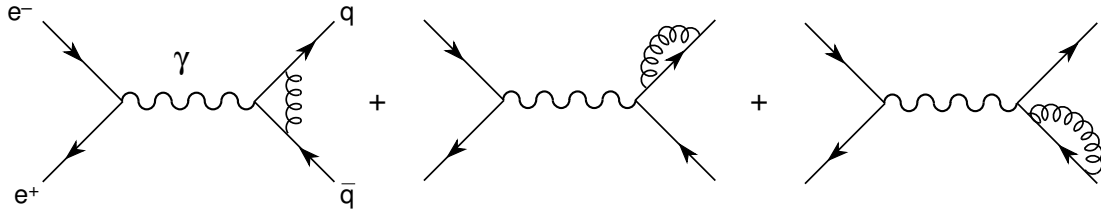
И в двата случая крайните адронни състояния ще се наблюдават като конфигурация от 2 струи, понеже не може да се раздели системата qG или $\bar{q}G$. Поради крайната разделителна способност на всички детектори не е възможно (дори по принцип) да се отделят онези двуструйни събития, породени от основния процес $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$,

от $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}G$ събития с колинеарен или мек глюон. За да се раздели триструйно събитие, е нужно глюонът да има енергия и ъгъл на отделяне (спрямо кварка или антикварка) по-големи от разрешението на детектора. Наблюдаваното сечение за три струи никога няма да включва проблематичния район $x_{1,2} \rightarrow 1$; следователно то ще бъде крайно, въпреки че стойността му зависи от детекторната разделителна способност и/или точната дефиниция на *струя* (т.е. σ зависи на избраните граници на интегриране).

От друга страна двуструйната конфигурация ще включва и $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ и $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}G$ с ненаблюдаем глюон. Важният въпрос тогава е инфрачервеното поведение на сумата от двете амплитуди. Обмяната на виртуални глюони между кварките поражда поправка $\mathcal{O}(\alpha_s)$ към амплитудата на $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$:

$$T[e^+e^- \rightarrow q\bar{q}] = T_0 + T_1 + \dots \quad (8.88)$$

където T_0 е приносът от най-нисък порядък (дървесно приближение), T_1 е поправката $\mathcal{O}(\alpha_s)$ и т.н. Интерференцията на T_0 и T_1 поражда принос $\mathcal{O}(\alpha_s)$ към сечението на $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$.



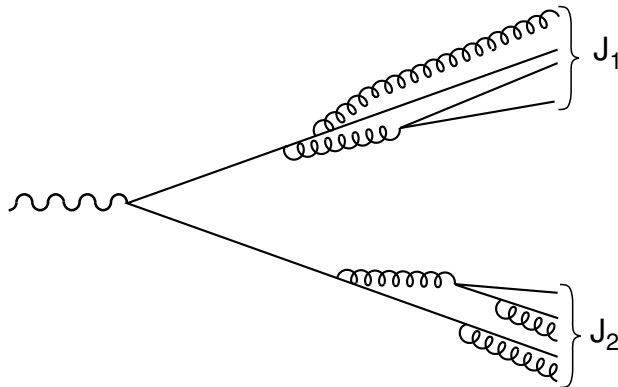
Фигура 8.18: Еднопримкови глюонни поправки към $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$.

Вече знаем, че примковите диаграми имат ултравиолетови разходимости, които трябва да се пренормират. В допълнение те имат и инфрачервени разходимости, свързани с колинеарни и меки конфигурации на виртуалния глюон. Може изрично да се провери, че инфрачервената разходимост $\mathcal{O}(\alpha_s)$ на $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})$ точно съкращава

разходимостта в $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}G)$, така че сумата е добре дефинирана:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) + \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}G) + \dots = \sigma_0 \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \dots \right). \quad (8.89)$$

Това е точно инклузивният резултат, за който стана въпрос в 8.5.4. Това забележително съкращаване на инфрачервената разходимост всъщност е общ резултат (Теорема на Bloch–Nordsieck и Kinoshita–Lee–Nauenberg): за достатъчно инклузивни сечения се съкращават и колинеарните и меките инфрачервени разходимости.



Фигура 8.19: Двуструйна конфигурация.

Пълното адронно сечение е недвусмислено дефинирано, но все още е нужно точно определение на понятието струя, за да можем да класифицираме дадено събитие като дву-, три-, ..., или n -струйна конфигурация. Такова определение трябва да няма инфрачервени разходимости и да не зависи от подробностите на непертурбативната фрагментация на адрони. Популярен пример за дефиниция на струя е т. нар. JADE алгоритъм, който използва cut на инвариантната маса:

$$3 \text{ струи} \quad \iff \quad s_{ij} \equiv (p_i + p_j)^2 > ys \quad (\forall i, j = 1, 2, 3). \quad (8.90)$$

Очевидно и теоретичните предсказания, и експерименталните измервания зависят от възприетата дефиниция на струя. JADE алгоритъмът предсказва за частта от триструйни събития:

$$R_3 = \frac{2\alpha_s}{3\pi} \left\{ (3-6y) \ln\left(\frac{y}{1-2y}\right) + 2 \ln^2\left(\frac{y}{1-y}\right) + \frac{5}{2} - 6y - \frac{9}{2}y^2 + 4\text{Li}_2\left(\frac{y}{1-y}\right) - \frac{\pi^2}{3} \right\}, \quad (8.91)$$

където

$$\text{Li}_2(z) \equiv - \int_0^z \frac{d\xi}{1-\xi} \ln \xi. \quad (8.92)$$

Съответната част от двуструйни събития се дава като $R_2 = 1 - R_3$. Частта от дву- или триструйни събития очевидно зависи от избрания $\text{cut } y$. Инфрачервените сингулярности се проявяват в разходящото поведение на R_3 при $y \rightarrow 0$.

При по-висок порядък по α_s трябва да се дефинират частта многоструйни събития. Например може лесно да се обобщи JADE алгоритъма, за да се класифицира $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ събитие като n -струйна конфигурация, при условие, че $s_{ij} > ys$ за всички $i, j = 1, \dots, n$. Ако два импулса не удовлетворяват това ограничение, те се обединяват в един импулс и събитието се счита за $(n-1)$ -струйна конфигурация (ако ограничението е удовлетворено при всички останали комбинации от импулси). Общият израз за частта от n -струйни събития придобива вида:

$$R_n(s, y) = \left(\frac{\alpha_s(s)}{\pi}\right)^{n-2} \sum_{j=0}^{n-2} C_j^{(n)}(y) \left(\frac{\alpha_s(s)}{\pi}\right)^j, \quad (8.93)$$

като $\sum_n R_n = 1$.

Тук могат да се направят няколко коментара:

- Частта струи проявява чувствителност към α_s [$R_n \sim \alpha_s^{n-2}$]. Въпреки че чувствителността расте с n , броят събития намалява с броя на струите.

- Членовете от по-висок ред $\alpha_s(\mu^2)^j \ln^k(s/\mu^2)$ са събрани в $\alpha_s(s)$. Но коефициентите $C_j^{(n)}(y)$ все пак съдържат членове $\ln^k(y)$. При ниски стойности на y , инфрачервената разходимост ($y \rightarrow 0$) се появява отново и в този случай не може да се разчита на пертурбативния ред. За големи y , частта на струи R_n с $n \geq 3$ е малка.
- Експериментите измерват родените адрони, а не партони. Следователно, тъй като тези наблюдаеми не са напълно инклузивни, съществува неизбежна зависимост от непертурбативната фрагментация на адрони. Тя обикновено се моделира чрез Монте Карло анализи и внася теоретични неопределености, които трябва да се оценят.

Въведени са много различни алгоритми и променливи за струи (jet rates, event shapes, energy correlations, ...), за да се оптимизира пертурбативният анализ. В някои случаи се прави пресумиране на членовете $\alpha_s(s)^n \ln^m(y)$ при $m > n$, за да се подобри точността на предсказанията при ниски стойности на y .

На фиг. 8.20 е показана енергетичната зависимост на измерената част раждане на три струи R_3 ($y = 0.08$), сравнена с предсказанията на квантовата хромодинамика. Данните са в добро съгласие с QCD и съвпадат с предсказаната зависимост на бягащото взаимодействие от енергията. Константна стойност на α_s не може да опише наблюдаваните production rates. Фигурата показва и предсказанията, получени с абелева векторна теория при $\mathcal{O}(\alpha_A^2)$, които ясно се изключват.

Направени са няколко измервания на α_s с различни променливи на струите. Всички те са в добро съгласие и представляват положителна проверка на последователността на QCD предсказанията. Комбинирайки резултатите от всички експерименти на LEP и SLC,

се получава средната стойност:

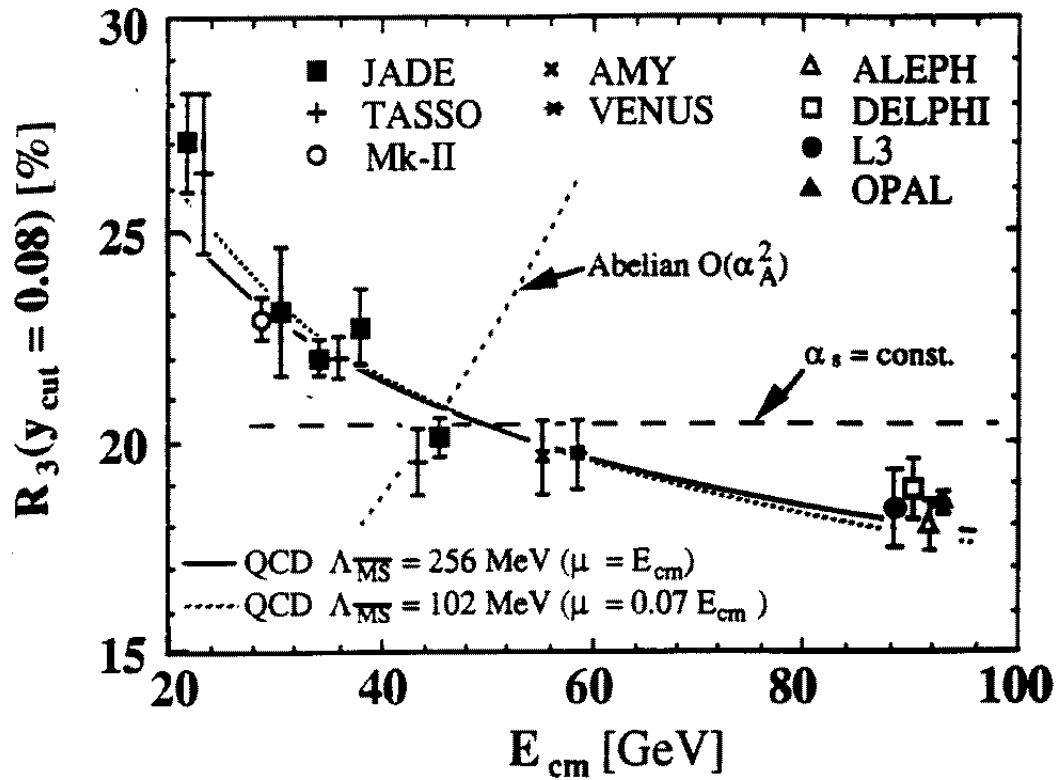
$$\alpha_s(M_Z^2) = \begin{cases} 0.119 \pm 0.006 & (\mathcal{O}(\alpha_s)^2) \\ 0.123 \pm 0.006 & (\text{пресумирани измервания}) \end{cases} \quad (8.94)$$

Двете числа отговарят на различни теоретични приближения, използвани във fits за извличане на α_s .

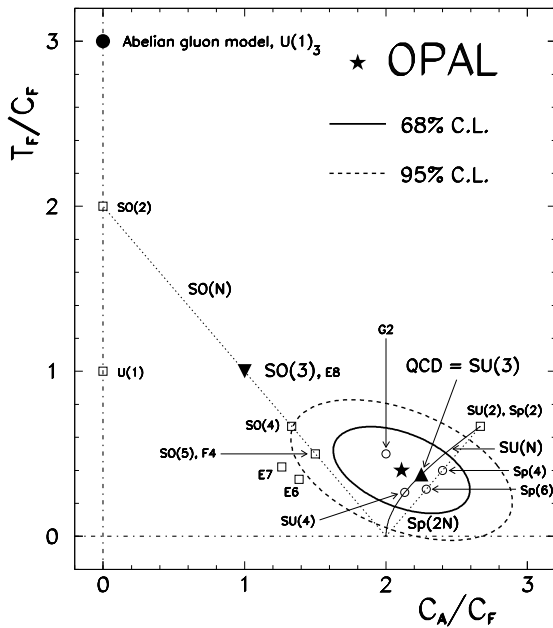
Триструйните събития могат да се използват и за определяне на спина на глюона. За глюон със спин 0 диференциалното разпределение се дава от уравнение (8.84), като се смени израза $x_1^2 + x_2^2$ в числителя с $x_3^2/4$. Като цяло не може да се определи коя адронна струя произлиза от фрагментацията на кварк (или антикварк) и коя произлиза от глюон. Следователно вместо това се взема подреждане на струите $x_1 > x_2 > x_3$, в което x_1 се отнася за струята с най-голяма енергия, 2 за следващата и 3 за струята с най-малка енергия, която най-вероятно отговаря на глюон. Когато $x_2 \rightarrow 1$ ($x_1 \rightarrow 1$), векторното глюонно разпределение е единствено, но съответното скалярно глюонно разпределение не е, тъй като в тази точка $x_3 = (1 - x_1) + (1 - x_2) \rightarrow 0$. Измереното разпределение добре съвпада с QCD предсказанията за глюон със спин 1; скаларният глюон ясно се изключва.

Предсказанията за разпределение на струите и event shapes са функции на факторите на цветната група $T_F = 1/2$, $C_F = (N_C^2 - 1)/(2N_C)$ и $C_A = N_C$. Тези величини произлизат от цветната алгебра, свързана с различните върхове на взаимодействие и характеризират групата на цветна симетрия. Ако силното взаимодействие се описваше от различна калибровъчна група, произтичащите предсказания биха се различавали по стойностите на тези три фактора. Тъй като върховете участват по различен начин в различните наблюдаеми, тези цветни фактори могат да се определят чрез прилагане на combined fit към данните. Фиг. 8.21 сравнява определените от OPAL

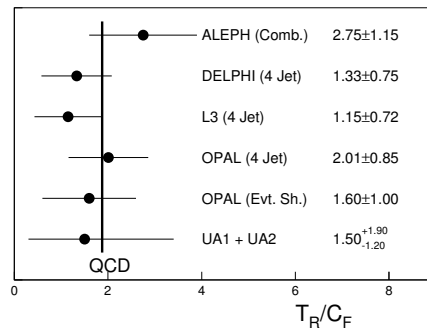
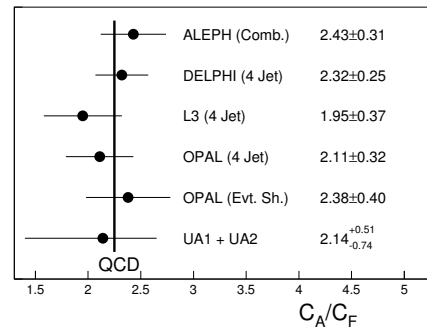
C_A/C_F и T_F/C_F със стойностите на тези отношения за други групи на цвят. Данните отлично съвпадат със стойностите за $SU(3)$ и елиминират абелевия модел и много класически групи на Ли. Групите, показани в отворените квадрати и кръгове, са вече изключени, понеже не съдържат три цветни степени на свобода за кварките. Подобни резултати са представени и от другите експерименти на LEP (раждането на адронни струи в $p\bar{p}$ колайдери също е анализирано по подобен начин). Резюме на получените отношения на цветните фактори от различни експерименти е дадено на фиг. 8.22.



Фигура 8.20: Енергетична зависимост на event rate на раждането на три струи $R_3(y = 0.8)$, сравнена с предсказанията на аналитичните QCD пресмятания $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$, с хипотезата за независима от енергията α_s и с абелевата векторна теория в $\mathcal{O}(\alpha_A^2)$.



Фигура 8.21: Контури с 68% и 95% ниво на достоверност в равнината T_F/C_F на C_A/C_F от данните на OPAL. Показани са и очакванията на различни калибровъчни модели.



Фигура 8.22: Резюме на измерванията на цветните фактори. Резултатите се отнасят за 5 активни аромата с $T_R \equiv N_f T_F = 5T_F$.

Глава 9

Слаби взаимодействия

Слаби разпади. V-A ток. СРТ симетрия. Нарушение на CP-инвариантността.

Слаби разпади - открити от Бекерел 1896 г. β -разпад:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

1930 г. Паули въвежда неутриното ν : - няма електрически заряд (неутрално), $m=0$, участва при слабите взаимодействия.

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

Ферми построява теория - адронен и лептонен ток.

$$H_I \sim j_h \sim p \quad j_l \sim e\bar{\nu}$$

След теория на пертурбациите ? теорията на Ферми. Реда не е сходящ и теорията не описва добре всичко.

$$j_h \rightarrow n \leftrightarrow p$$

$$j_l \rightarrow e\bar{\nu} \text{ ражда}$$

$$G_F = 1,436 \times 10^{-49} [\text{erg.cm}^3] \approx 10^{-5} m_p^{-2} \hbar = c = 1$$

Вероятността за слаб разпад е $V \sim G_F^2 \Delta^5$. Δ - фактор, свързан с фазовия обем. E - енергията, която се предава на продуктите от разпада. $\Delta = \mu_n - \mu_p + m_\nu$ -разликата от масите. Времена на живот $\tau_\mu \sim 10^{-6} \text{s}$; $\tau_\nu \sim 1000 \text{s}$; $\tau_\tau \sim 10^{-13} \text{s}$

Колкото едана частица е по-тежка, толкова по-малко е нейното време на живот - τ , а Δ е по-голямо.

Пример:

$$\mu \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

$$m_\tau \sim 1,8 \text{ GeV}$$

$$\tau^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \nu_\tau$$

$$m_{\pi^+} + m_{\pi^0} \sim 2 \times 137 \text{ MeV}$$

Токовете се наричат заредени, т.е. j_h и j_l имат заряд.

Слаби реакции - всички възможни комбинации на β -разпад. Освен слаби разпади наблюдаваме и слаби реакции.

$$n \rightarrow p e \bar{\nu}, \text{ ако имаме } \Psi_1 \gamma_\mu \Psi_2, \Psi_2 \gamma_\mu \Psi_1.$$

Неутрино от реактори $\nu n \rightarrow p e$ - предизвиква се от $\nu \Rightarrow$ слаба реакция.

$p \rightarrow n e^+ \bar{\nu}$ - извършва се само в ядрото, имаче е невъзможна енергетически,

1956 г. наблюдавана реакцията $\bar{\nu}_e p \rightarrow n e^+$ от Дейвис

1976 г. наблюдаван е нов тип реакция - разсейване на неутрино от електрон. Предсказано от теорията на Ферми : $\bar{\nu}_e e \rightarrow e \bar{\nu}_e$

В Лагранжиана \mathcal{L} имаме кинетичен член, ток

$\bar{\Psi}\Psi$ -поле.

$$\text{за ток } j = \bar{e}\nu_e + \bar{\mu}\nu_\mu + \bar{\tau}\nu_\tau + a_{du}\bar{d}u + a_{\bar{s}u}\bar{s}u + a_{\bar{b}u}\bar{b}u + a_{\bar{d}c}\bar{d}c + a_{\bar{s}c}\bar{s}c + a_{\bar{b}c}\bar{b}c + a_{\bar{d}t}\bar{d}t + a_{\bar{s}t}\bar{s}t + a_{\bar{b}t}\bar{b}t$$

спинори - 6 броя лептони и 6 броя кварки

$$j_\mu = \sum_i \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$$

$$u, c, t - 1/2$$

$$d, s, b - 2/3$$

$$j=1$$

комбинации - когато кварки от горния ред се свързват с кварки от долния ред

Фундаменталните частици - 3 поколения.

ν_e	ν_μ	ν_τ	0
e	μ	τ	1
u	c	t	1/2
d	s	b	2/3

1975 г. - описван ток явно симетричен и няма преход от едно в друго поколение

$$j = \bar{e}\nu_e + \bar{\mu}\nu_\mu + \bar{d}'u + \bar{s}'c$$

$$d' = d.\cos\theta_c + s.\sin\theta_c$$

$$s' = -d.\sin\theta_c + s.\cos\theta_c$$

θ_c - ъгал на Кабибо. Обектите с дефинирана маса са c,d,u. Физическите състояния са смес между чистите състояния d,s

$$\theta_c \approx 13^\circ \quad \sin\theta_c \approx 0,22$$

$$j = \bar{e}\nu_e + \bar{\mu}\nu_\mu + \bar{\tau}\nu_\tau + \bar{d}'u + \bar{s}'c + \bar{t}'b$$

Имаме 3 връзки:

$$d'$$

$$s'$$

$$t'$$

Матрица 3×3 - матрица на Кобаяши-Маскава. Тази матрица се допълва с помощта на 3 ъгъла на Ойлер ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) и една фаза ($e^{i\delta}$).

$$\theta_1 \approx \theta_c$$

Тримерни въртения -> три завъртания в плоскост - серия от 3 двумерни въртения.

C-P-T-инвариантност.

$$t \rightarrow -t$$

$c \rightarrow$ оператора

$(\theta - \tau)$ проблем

$$\theta^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$$

$$\tau^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$$

Тъждествени - еднаква маса, заряд и 1 проблем. Оказва се, че θ^+ и

τ^+ са абсолютно тъждествени. Хората са мислили, че С-Р-Т-инвариантността.

$\pi^+\pi^0$ - четността е +1

$\pi^+\pi^+\pi^-$ - четността е -1

От тези два разпада - нарушаване на Р-инвариантността - 1956 г.

Ли-Янг обясняват ($\theta - \tau$) проблема: правят предположение, че Р-инвариантността се нарушава 100% в слабите взаимодействия.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{scalar} + \mathcal{L}_{pseudoscalar}$$

В \mathcal{L} имаме векторен и аксиалвекторен ток.

Матрици на Дирак.

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$$

$$\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

$\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$ - вектор

$\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi$ - аксиалвектор

$\bar{\Psi}(1 + \gamma_5)\gamma_\mu\Psi$ - нарича се V-A тпк.

$J_\mu^A = \bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi$ - аксиален ток

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ Psi_R \end{pmatrix} - \text{двукомпонентен спинор}$$

Ψ е стълб.

$$\Psi_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_5)\Psi$$

$$\Psi_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \gamma_5)\Psi$$

γ_5) разцепва спинорите на 2,

При спрягане на 2 спинора - си сменят местата. Р се нарушава на 100 %. Р е огледална симетрия между ляво и дясно.

$$\bar{\Psi}(1 + \gamma_5)\gamma_\mu\Psi = 2\bar{\Psi}_L\gamma_\mu\Psi_L$$

Със знак “+” означаваме ермитово спрягане.

$$\mathcal{L}^{ch} = \frac{G_\mu}{\sqrt{2}}j_\mu j^{\mu+}$$

G_μ - константа на Ферми.

$$j_\mu = 2(\bar{e}_L\gamma_\mu\nu_{eL} + \bar{\mu}_L\gamma_\mu\nu_{\mu L} + \bar{\tau}_L\gamma_\mu\nu_{\tau L} + \bar{d}_L\gamma_\mu u_L + \bar{s}_L\gamma_\mu c_L + \bar{b}_L\gamma_\mu t_L)$$

С-симетрията се нарушава 100%. Р-симетрията се нарушава, но СР се съхранява.

Теорема на Людерс-Паоли СРТ се съхранява.

K^0 -мезон - матрица

\bar{K}^0 - античастица

$CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle \Rightarrow K^0$ не е собствена функция на оператора СР.

$CP|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle$

Комбинация (линейна):

$$K_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 + \bar{K}^0)$$

$$K_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 - \bar{K}^0)$$

$$CP|K_1^0\rangle = |K_1^0\rangle$$

$$CP|K_2^0\rangle = |K_2^0\rangle$$

K_1^0 - четно - собствена стойност +1

K_2^0 - нечетно - собствена стойност -1

Четен брой, четна функция, нечетен брой, нечетна функция. Ако СР се съхранява, то:

$$|K_1^0\rangle \rightarrow \pi^+\pi^-$$

$$|K_1^0\rangle \rightarrow \pi^0\pi^0$$

$$|K_2^0\rangle \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$$

$$|K_2^0\rangle \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$$

1964 г. наблюдаван е СР нарушаващ разпад от Кронин, Кринстенсен, Фитч, Терли.

$$K = \frac{\Gamma(K_2^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_1^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)} = 3,7 \cdot 10^{-6}$$

$$e^{i\delta}; \delta = 0, \pi$$

9.0.5 Неутрални токове

1973 г. се наблюдава $\nu_\mu + p \rightarrow \nu_\mu + \bar{p} + \pi^+ + \pi^+$

Съществуват такива взаимодействия.

$$\bar{\nu}_\mu \nu_\mu = \bar{u}udd$$

1978 г. $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

1982 г. $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$

Съществуват 12 диагонални елемента.

$$j^n = \bar{e}e + \bar{\mu}\mu + \dots + \bar{t}t$$

Неутрален ток описва подеобен тип процеси.

$$j_\mu^n \rightarrow \bar{\Psi}_L \gamma_\mu \Psi_L, \bar{\Psi}_R \gamma_\mu \Psi_R$$

$\frac{1}{2} - Q \sin^2 \theta_W$ ъгъл на Вайнберг ν_e, ν_μ, ν_τ

$-\frac{1}{2} - Q \sin^2 \theta_W$ ъгъл на Вайнберг e, μ, τ

Q -оператор на електрическия заряд

левите - слаб изоспин $SU_L(2)$

десните - синглет

$$\mathcal{L}^n = \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} j_n j^n$$

$$j^n = \bar{e}e + \bar{\mu}\mu + \dots + \bar{t}t$$

9.0.6 Теория на електрослабото взаимодействие

Слаботи и електромагнитното взаимодействие могат да бъдат обединени и това е постигнато от теорията на Глешоу, Вайнберг и Салам през 1960 г. През 1979 г. получават Нобелова награда за неутралните токове.

$SU_L(2)$ слабо взаимодействие - левите спинори се преобразуват по един дублет, а десните като синглет.

$$SU_L(2) \times U_Y(1)$$

Y - слаб хиперзаряд

$$Q = I_3 + \frac{B+S}{2}$$

$$Q = I_3^{weak} + \frac{Y}{2}$$

Операторите: $I_3, \frac{Y}{2}$

$$[Y, Y] = 0$$

За калибровъчна теория: $SU_L(2) \times U_Y(1)$, $n^2 - 1$
 $SU_L(2) \rightarrow W^+W^-W^0$
 $U_Y(1) \rightarrow B^0$

g_1, g_2 - константи на взаимодействието.

Прави се линейна комбинация:

$$A = B^0 \cos\theta_W + W^0 \sin\theta_W$$

Z бозона ще пренася взаимодействието с неутрални токове

$$Z = -B^0 \sin\theta_W + W^0 \cos\theta_W$$

$$\bar{T}, \frac{Y}{2}$$

Удължената производна ще има вида: $D_\mu = \partial_\mu - i(g_1 \frac{1}{2} Y B_\mu + g_2 \bar{T} \cdot \text{bar} W_\mu)$

Вероятността за излъчване на γ, W^+, W^-, Z . Амплитудата има вида:

$$-i \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} Q \cdot A - i \sqrt{g_1^2 + g_2^2} (T_3 - \frac{Q \sin^2 \theta_W}{j^n}) - i g_l (T W^+ W^-)$$

Глава 10

Стандартен модел

10.1 Експериментални факти при ниски енергии

10.1.1 Разпад $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$

Най-общо хамилтониана за 3-частичния разпад на мюона се записва в следния вид:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \sum_{n, \epsilon, \omega} g_{\epsilon, \omega}^n [\bar{e}_\epsilon \Gamma^n (\nu_e)_\sigma] [(\bar{\nu}_\mu)_\lambda \Gamma_n \mu_\omega]. \quad (1.1)$$

Тук с $\epsilon, \omega, \sigma, \lambda$ са отбелязани киралностите (лява и дясна) на съответните фермионни полета, а с n типа на взаимодействие: скаларно (I), псевдоскаларно (γ^5), векторно (γ^μ), псевдовекторно ($\gamma^\mu \gamma^5$) и тензорно ($\sigma^{\mu\nu}$). За дадени n, ϵ, ω , киралностите на неутрината σ и λ са определени еднозначно.

Константите $g_{\epsilon, \omega}^n$ се определят експериментално от енергетичното и ъгловото (по отношение на спина на μ^-) разпределение на електрона, поляризацията на електрона и сечението за реакцията $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$.

Амплитудата на разпада участват само леви фермиони, с ефективен хамилтониан включващ векторно и псевдовекторно (аксиал-векторно) взаимодействие във вида $V - A$:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{e}\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)\nu_e] [\bar{\nu}_\mu\gamma_\alpha(1 - \gamma_5)\mu]. \quad (1.2)$$

Константата G_F се нарича константа на Ферми и се определя от пълната ширина на разпада:

$$\frac{1}{\tau_\mu} = \Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} (1 + \delta_{\text{QED}}) f\left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right), \quad (1.3)$$

където $f(x) = 1 - 8x + 8x^3 - x^4 - 12x^2 \ln x$ и $\delta_{\text{QED}} = \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{25}{4} - \pi^2\right) \approx -0.0042$ отчитат водещите КЕД корекции [7]. От измереното време на живот на мюона [8], $\tau_\mu = (2.19703 \pm 0.00004) \times 10^{-6}$ s, за G_F се получава:

$$G_F = (1.16637 \pm 0.00001) \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2} \approx \frac{1}{(293 \text{GeV})^2}. \quad (1.4)$$

10.1.2 Бета разпад

Слабите преходи $d \rightarrow ue^- \bar{\nu}_e$ и $u \rightarrow de^+ \nu_e$ могат да бъдат изучавани чрез съответстващите им адронни разпади $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$ и $p \rightarrow ne^+ \nu_e$, последния от които се наблюдава само в ядрата, защото е енергетично забранен за свободен протон ($m_p < m_n$). Експерименталното изучаване на тези процеси показва, че те могат да бъдат описани със следния ефективен хамилтониан:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{G^{\Delta S=0}}{\sqrt{2}} [\bar{p}\gamma^\alpha(1 - g_A\gamma_5)n] [\bar{e}\gamma_\alpha(1 - \gamma_5)\nu_e], \quad (1.5)$$

където [8]

$$G^{\Delta S=0} \approx 0.975G_F, \quad g_A = 1.2573 \pm 0.0028. \quad (1.6)$$

Силата на взаимодействие е приблизително равна на тази при μ разпад и отново участват само леви фермиони. Голямата прилика между (1.5) и (1.2) води по предположение за универсалност (еднакви тип и сила) на взаимодействието на ниво кварки и лептони:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{G^{\Delta S=0}}{\sqrt{2}} [\bar{u}\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)d] [\bar{e}\gamma_\alpha(1 - \gamma_5)\nu_e]. \quad (1.7)$$

Запазването на векторния ток $\partial_\mu (\bar{u}\gamma^\mu d) = 0$, означава, че $\langle p|\bar{u}\gamma^\mu d|n\rangle = \bar{p}\gamma^\mu n$ при $q^2 = 0$, т.е. силното взаимодействие не влияе на векторния ток.

10.1.3 $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$

Експериментален факт е, че зарядения лептон роден в 2-частичния разпад на π^- е винаги десен. От запазването на ъгловия момент следва (тъй като пиона има спин 0, то продуктите на разпада трябва да имат една и съща спиралност), че $\bar{\nu}_l$ е също дясно. Ако се предположи, че само леви лептони (и десни антилептоли) участват в слабите взаимодействия, то разпада $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$ ще бъде забранен в граница на нулева маса на лептона (тогава спиралността е добро квантово число). Взаимодействието (1.5) предсказва потискане на спиралността в тези разпади

$$R_{e/\mu} \equiv \frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = \frac{m_e^2(1 - m_e^2/m_\pi^2)^2}{m_\mu^2(1 - m_\mu^2/m_\pi^2)^2} (1 + \delta_{\text{QED}}) = (1.2352 \pm 0.0005) \times 10^{-4}, \quad (1.8)$$

в отлично съгласие с експериментално измереното отношение:

$$R_{e/\mu} = (1.230 \pm 0.004) \times 10^{-4} [8].$$

10.1.4 $\Delta S = 1$ преходи

Анализа на разпадите с промяна на странността [$K \rightarrow (\pi)l^-\bar{\nu}_l, \Lambda \rightarrow pe^-\bar{\nu}_e, \dots$] показва, че:

- Слабото взаимодействие е винаги от типа $V - A$.
- Силата на взаимодействието е една и съща за всички разпади, но е по-малка от тази измерена за преходи $\Delta S = 0$:

$$G^{\Delta S=1} \approx 0.22G_F. \quad (1.9)$$

- Всички разпади удовлетворяват правилото $\Delta S = \Delta Q$ [т.е. разпади като $\Sigma^+ \rightarrow ne^+\nu_e$, или $\bar{K}^0 \rightarrow \pi^-l^+\nu_l$ не се наблюдават], както се очаква от прехода $s \rightarrow ul^-\bar{\nu}_l$.

10.1.5 $V - A$ модел

Всички изложени дотук експериментални факти могат да бъдат описани добре с хамилтониана:

$$\mathcal{H} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J^\mu J_\mu, \quad (1.10)$$

където

$$J^\mu = \bar{u}\gamma^\mu(1 - \gamma_5) [\cos\theta_C d + \sin\theta_C s] + \bar{\nu}_e\gamma^\mu(1 - \gamma_5)e + \bar{\nu}_\mu\gamma^\mu(1 - \gamma_5)\mu. \quad (1.11)$$

Така при ниски енергии слабите преходи се характеризират с:

- Универсалност на взаимодействието (едно и също за всички фермиони)
- Включват само заредени токове

Различната сила на адронните процеси с $\Delta S = 0$ и $\Delta S = 1$ може да бъде разбрана [11] като идваща от ъгъла на смесване θ_C , дефиниран по следния начин: $\sin \theta_C \equiv G^{\Delta S=1}/G_F \approx 0.22$. В резултат на това слабия партньор на u кварка е смес d и s . От тук $\cos \theta_C \approx 0.975$, което е в съгласие с (1.6)

10.2 Поведение при високи енергии

При високи енергии хамилтониана (1.10) не описва коректно слабото взаимодействие. Причина за това са два фундаментални проблема свързани с $V - A$ взаимодействието:

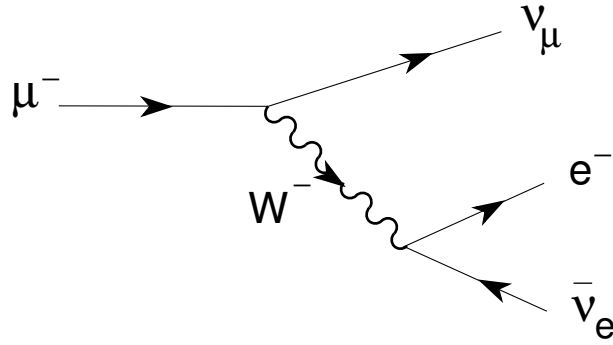
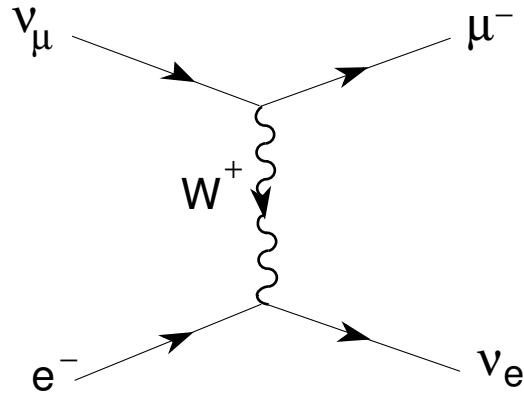
1. **Непренормируемост:** Поправките от висок порядък, като $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_e \rightarrow \nu_\mu e^-$ са разходящи [$T \sim \int d^4k (1/k^2) = \infty$]. Ултравioletовите разходимости съществуват в Квантовата теория на полето, напр. КЕД, но там всички безкрайности могат да бъдат елиминирани чрез предефиниране на параметрите (пренормиране), така че измеряемите величини са винаги крайни. Проблема при $V - A$ взаимодействието е, че то е непренормируемо, т.е. не е възможно да се елиминират всички безкрайности чрез просто предефиниране на параметрите и полетата.
2. **Унитарност:** Резултат от унитарността на оператора на разсейване е, че сечението на взаимодействие $\sigma < 2\pi/s$. Тази стойност се нарича унитарна граница.

От хамилтониана (1.10) за сечението се получава

$$\sigma(\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e) \approx G_F^2 s / \pi. \quad (2.12)$$

Унитарността се нарушава, когато $s \geq \sqrt{2}\pi/G_F \sim (617\text{GeV})^2$

Поради тази причина $V - A$ модела може да бъде само нискоенергитична ефективна теория на слабото взаимодействие.

Фигура 10.1: μ -decay diagram.Фигура 10.2: $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$ through W exchange.

10.2.1 Хипотеза за промеждутъчен векторен бозон

В КЕД фермионите взаимодействат чрез обмен на виртуални γ кванти. Тъй като фотоните са безмасови резултантното $\bar{e}e\bar{e}e$ взаимодействие не е локално, т.е. фотонния пропагатор поражда дългодействаща сила с амплитуда $T \sim \alpha/q^2$. Тъй като слабото взаимодействие е краткодействащо, то се очаква ролята на фотона да се изпълнява от масивен обект. Ако се предположи [12], че зарядения ток се поражда от масивно векторно поле със спин 1 W_μ ,

$$\mathcal{L} = \frac{g}{2\sqrt{2}} (J^\mu W_\mu^\dagger + \text{h.c.}), \quad (2.13)$$

$V - A$ взаимодействието може да бъде генерирано чрез обмен на W . При енергии много по-малки от масата на W векторния пропагатор се редуцира до контактно взаимодействие,

$$\frac{-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2} \xrightarrow{q^2 \ll M_W^2} \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2}. \quad (2.14)$$

Тогава от(1.10) се получава чрез

$$\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}. \quad (2.15)$$

За да е в сила теорията на пертурбациите, т.е. константата на взаимодействие $g < 1$, трябва да е изпълнено $M_W < 123 \text{ GeV}$.

Взаимодействието (2.13) дава по-добро поведение на сечението при високи енергии за $\nu l^- \rightarrow \nu l^-$,

$$\sigma(\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e) \stackrel{s \rightarrow \infty}{\sim} G_F^2 M_W^2 / \pi. \quad (2.16)$$

Въпреки че унитарността е отново нарушена, инвариантното сечение вече не нараства с енергията. Но отново нефизично нарастване на сечението се получава в тези процеси, където се раждат надлъжни W бозони.

$$\sigma(\nu_e \bar{\nu}_e \rightarrow W_L^+ W_L^-) \stackrel{s \rightarrow \infty}{\sim} s; \quad \sigma(e^+ e^- \rightarrow W_L^+ W_L^-) \stackrel{s \rightarrow \infty}{\sim} s. \quad (2.17)$$

Източника на проблема може да бъде разбран по-добре ако се анализира еднопримковата амплитудата $T(e^+ e^- \rightarrow W^+ W^- \rightarrow e^+ e^-)$, където полето W участва само виртуално. Лошото поведение при

високи енергии идва от частта $q_\mu q_\nu$ на пропагатора на W , която дава квадратично разходящия интеграл [$T \sim \int d^4q/q^2 = \infty$]. Подобни диаграми съществуват в КХД, където участват фотони вместо W , но запазването на електромагнитния ток $q_\mu J_{\text{em}}^\mu = 0$, изключва приноса на q^μ . Липсата на такъв проблем в КХД е свързано с нулевата маса фотоните, което води до това, че надлъжната компонента на фотонното поле е физически ненаблюдаема.

Възможен начин за разрешаване на проблема е съществуването на допълнителен принос към амплитудата на W^+W^- , който да съкрати нарастването на сечението при високи енергии. В действителност, тъй като W има електричен заряд, също така трябва да се отчете приноса на s -канала $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow W^+W^-$, който дава подобно поведение $\sigma \sim s$. Лошото поведение при високи енергии би могло да бъде елиминирано чрез сумиране на слабите и електромагнитните амплитуди, осигурявайки връзка между слабата g и електромагнитната e константа. Дори и да бъде реализирано това съкращаване проблема остава за амплитудата на реакцията $\nu_e \bar{\nu}_e \rightarrow W^+W^-$, защото неутрината не взаимодействат с фотона.

10.2.2 Неутрални токове

Разходимостите при високи енергии могат да бъдат отстранени чрез въвеждане на допълнителен неутрален междинен векторен бозон Z , който взаимодейства както със зарядените лептони така и с неутрината. Чрез избиране на подходяща маса и константа на взаимодействие на Z , е възможно да се съкрати приносите s -каналите $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow W^+W^-$ и $\nu_e \bar{\nu}_e \rightarrow Z \rightarrow W^+W^-$.

Обмена на Z бозона по t -канала обяснява наличието на процесите $\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_\mu e^-$ и $\nu_\mu p \rightarrow \nu_\mu p$. Наличието на такива неутрални токове е потвърдено експериментално през 1973 г. [13], с откриването на еластичния процес

$$\nu_\mu e^- \longrightarrow \nu_\mu e^-. \quad (2.18)$$

Процесите породени от неутрални токове, при които се променя аромата, са силно потиснати, за разлика от тези породени от заредени токове. [8]

$$\frac{\Gamma(\mu^- \longrightarrow e^- e^+ e^-)}{\Gamma(\mu^- \longrightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu)} < 1.0 \times 10^{-12}, \quad \frac{\Gamma(\Sigma^+ \longrightarrow p e^+ e^-)}{\Gamma(\Sigma^- \longrightarrow n e^- \bar{\nu}_e)} < 1.3 \times 10^{-2}; \quad (90\% \text{CL}) \quad (2.19)$$

$$\frac{\Gamma(K_L \longrightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma(K^+ \longrightarrow \mu^+ \nu_\mu)} = (2.79 \pm 0.15) \times 10^{-9}. \quad (2.20)$$

Така че обмяната на Z не води до промяна на аромата.

10.2.3 Особености на слабото взаимодействие

При ниски енергии слабото взаимодействие се характеризира със следните особености:

1. То е по-слабо (по-бавно) от силното и електромагнитното $\Gamma_{weak} \ll \Gamma_{em} \ll \Gamma_{strong}$.
2. Има малък радиус на действие $r_{weak} \approx 10^{-2} r_{strong}$. Причина за това е, че W^\pm и Z са масивни.
3. Нарушава С и Р инвариантността, поради което само леви фермиони взаимодействат слабо.
4. Нарушава СР инвариантността.
5. Не съхранява ароматите.
6. Запазва лептонното число.
7. Неутрината взаимодействат само слабо.

10.3 $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ теория

За описанието на слабото взаимодействие са необходими няколко фермионни аромата и различни свойства за левите и десните полета. Левите полета ще образуват дублети и освен това ще искаме да имаме масивни калибровъчни полета W^\pm и Z . Най-простата група съдържаща дублети е $SU(2)$. Също така искаме да включим електромагнитното взаимодействие. За целта е необходима допълнително група $U(1)$. Тогава групата на симетрия е:

$$G \equiv SU(2)_L \otimes U(1)_Y, \quad (3.21)$$

където с L се отбелязват левите полета, а с Y се отбелязва т. нар. слаб хиперзаряд.

За простота ще разгледаме една фамилия от кварки и ще въведем означението

$$\psi_1(x) = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \psi_2(x) = u_R, \quad \psi_3(x) = d_R. \quad (3.22)$$

Същите разсъждения са валидни и за лептонния сектор

$$\psi_1(x) = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \quad \psi_2(x) = (\nu_e)_R, \quad \psi_3(x) = e_R^-. \quad (3.23)$$

Нека да разгледаме свободния лагранжиан в случая на КЕД

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{j=1}^3 i \bar{\Psi}_j(x) \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_j(x). \quad (3.24)$$

\mathcal{L}_0 е инвариантен под действие на глобалната трансформация G .

$$\psi_j(x) \xrightarrow{G} \psi'_j(x) \equiv \exp \{i\vec{\tau}\vec{\alpha}/2\} \exp \{iy_j\beta\} \psi_j(x), \quad (3.25)$$

където $SU(2)_L$ матриците действат само върху дублетите ψ_1 .

Сега ще поискаме лагранжиана да бъде инвариантен и под действието на локалните калибровъчни трансформации на групата $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, с $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(x)$ и $\beta = \beta(x)$. За да запазим симетрията трябва да сменим фермионните производни с ковариантни. Тъй като имаме 4 параметъра, $\vec{\alpha}(x)$ и $\beta(x)$, то са необходими 4 калибровъчни полета:

$$D_\mu \psi_j(x) \equiv \left[\partial_\mu - ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu - ig' y_j B_\mu \right] \psi_j(x). \quad (3.26)$$

Така ние имаме точния брой калибровъчни полета за да опишем W^\pm , Z и γ .

Освен това искаме $D_\mu \psi_j(x)$ да се трансформира по същия начин като $\psi_j(x)$, което фиксира трансформационните свойства на калибровъчните полета:

$$B_\mu(x) \xrightarrow{G} B'_\mu(x) \equiv B_\mu(x) + \frac{1}{g'} \partial_\mu \beta(x), \quad (3.27)$$

$$\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu \xrightarrow{G} \vec{\tau} \cdot \vec{W}'_\mu \equiv U(x) \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu U^\dagger(x) + \frac{2i}{g} U(x) \partial_\mu U^\dagger(x), \quad (3.28)$$

където $U(x) \equiv \exp \left\{ i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}}{2}(x) \right\}$. Трансформацията на B_μ е идентична с тази получена за фотона в КХД. Полетата W_μ^i се трансформират по по-сложен начин; под действие на инфинитезималните трансформации на групата $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, $[(a \times b)^i \equiv \epsilon_{ijk} a^j b^k]$

$$\vec{W}'_\mu = \vec{W}_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\alpha} - \vec{\alpha} \times \vec{W}_\mu + \mathcal{O}(\vec{\alpha}^2). \quad (3.29)$$

Матриците от групата $SU(2)$ не комутират по между си, което води до появата на допълнителен член $\vec{\alpha} \times \vec{W}_\mu$ включващ самите калибровъчни полета. Константата на взаимодействие между полетата ψ_j и B_μ е напълно свободна, т.е. съществуват произволни "хиперзаряди" y_j за всяко от полетата ψ_j . Тъй като комутационните съотношения на групата $SU(2)$ са нелинейни, тази свобода не съществува за полетата W_μ^i : групата $SU(2)_L$ има една единствена константа на взаимодействие g .

Лагранжианът

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^3 i\bar{\Psi}_j(x)\gamma^\mu D_\mu\Psi_j(x), \quad (3.30)$$

е инвариантен относно локалните G трансформации. За построяването на калибровъчно-инвариантен кинетичен член, въвеждаме полетата $B_{\mu\nu}$ и $\vec{W}_{\mu\nu}$:

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad \vec{W}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu + g\partial_\nu \vec{W}_\mu \times \partial_\mu \vec{W}_\nu. \quad (3.31)$$

$B_{\mu\nu}$ остава инвариант относно G трансформациите, докато $\vec{\tau} \cdot \vec{W}_{\mu\nu}$ се трансформира ковариантно:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{W}_{\mu\nu} = \frac{2i}{g} \left[\left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu \right), \left(\partial_\nu - ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\nu \right) \right] \vec{G} U(x) \vec{\tau} \cdot \vec{W}_{\mu\nu} U^\dagger(x). \quad (3.32)$$

Нормирания кинетичен лагранжиан се дава от израза:

$$\mathcal{L}_{\text{Kin}} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{8}\text{Tr} \left[\left(\vec{\tau} \cdot \vec{W}_{\mu\nu} \right) \left(\vec{\tau} \cdot \vec{W}^{\mu\nu} \right) \right] = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\vec{W}^{\mu\nu}. \quad (3.33)$$

Неабелевата структура на групата $SU(2)$ води до съществена разлика с КЕД. Тъй като полета $W_{\mu\nu}^i$ участват и с квадратични членове, в лагранжиана \mathcal{L}_{kin} се появяват членове съдържащи трета и четвърта степен по калибровъчните полета. Тези членове водят до т.нар. самодействие на калибровъчните полета. Силата на това взаимодействие се определя от същата константа g , който участва и във фермионната част на лагранжиана.

Калибровъчната симетрия не допуска включването на масов член за калибровъчните бозони, тъй като той ще води до нарушаването ѝ. Включването на фермионни маси е също невъзможно, защото те трябва да свържат левите и десните полета, които имат различни трансформационни свойства и това ще доведе до явно нарушаване на калибровъчната симетрия. Така $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ лагранжиана от (3.30) и (3.33) съдържа само безмасови полета.

10.3.1 Взаимодействия на заредени токове

Лагранжианът от (3.30) съдържа взаимодействие на фермионните полета с калибровъчните бозони:

$$\mathcal{L} \longrightarrow \frac{g}{2} \bar{\Psi}_1 \gamma^\mu (\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu) \Psi_1 + g' B_\mu \sum_j y_j \bar{\Psi}_j \gamma^\mu \Psi_j. \quad (3.34)$$

Членът съдържащ $SU(2)$ матрицата

$$\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

поражда взаимодействието на заредените токове с бозонните полета $W_\mu \equiv (W_\mu^1 + iW_\mu^2)/\sqrt{2}$ и неговото комплексно спрегнато $W_\mu^\dagger \equiv (W_\mu^1 - iW_\mu^2)/\sqrt{2}$. За една фамилия кварки и лептони лагранжиана се записва така:

$$\mathcal{L}_{\text{CC}} = \frac{g}{2\sqrt{2}} \{W_\mu^\dagger [\bar{u}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)d + \bar{\nu}_e\gamma^\mu(1 - \gamma_5)e] + \text{h.c.}\}. \quad (3.36)$$

Универсалността на взаимодействието на кварки и лептони е непосредствено следствие от калибровъчната симетрия.

10.3.2 Взаимодействие на неутрални токове

Уравнение (3.34) съдържа също така взаимодействие на фермионните полета с неутралните калибровъчни бозони W_μ^3 и B_μ . Ние бихме искали да идентифицираме тези бозони с Z и γ , но тъй като те са безмасови всяка произволна комбинация от тях е възможна:

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

В термини на полетата Z и γ , лагранжиана на неутралните токове се дава от:

$$\mathcal{L}_{\text{NC}} = \sum_j \bar{\Psi}_j \gamma^\mu \left\{ A_\mu \left[\frac{g}{2} \tau_3 \sin \theta_W + g' y_j \cos \theta_W \right] + Z_\mu \left[\frac{g}{2} \tau_3 \cos \theta_W - g' y_j \sin \theta_W \right] \right\} \Psi_j. \quad (3.38)$$

За да получим КЕД от частта на A_μ , трябва да е изпълнено условието:

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e, \quad Y = Q - T_3, \quad (3.39)$$

където $T_3 \equiv \tau_3/2$ и с Q е отбелязан оператора на електромагнитния заряд:

$$Q_1 \equiv \begin{pmatrix} Q_{u/\nu} & 0 \\ 0 & Q_{d/e} \end{pmatrix}, \quad Q_2 = Q_{u/\nu}, \quad Q_3 = Q_{d/e}. \quad (3.40)$$

Първото равенство свързва константите на $SU(2)_L$ и $U(1)_Y$ с константата на електромагнитното взаимодействие, като по този начин обезпечава обединението на електрослабото взаимодействие. Второто равенство фиксира хиперзаряда на фермионите в термини на техния електричен заряд и слабия изоспин: $y_1 = Q_{u/\nu} - 1/2 = Q_{d/e} + 1/2$, $y_2 = Q_{u/\nu}$ and $y_3 = Q_{d/e}$. Обърнете внимание, че хипотетичното дясно неутрино би имало както електричен заряд така и слаб хиперзаряд равни на нула; тъй като то не взаимодейства и с W бозона, такава частица няма да взаимодейства по никакъв начин (стерилно неутрино). Поради естетически съображения няма да разглеждаме дясно неутрино по нататък.

Таблица 10.1: Константи на неутралните токове.

	u	d	ν_e	e
v_f	$(1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W)/2$	$(-1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W)/2$	$1/2$	$(-1 + 4 \sin^2 \theta_W)/2$
a_f	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$

Използвайки връзките (3.39), лагранжиана на неутралните токове може да бъде записан по следния начин:

$$\mathcal{L}_{\text{NC}} = \mathcal{L}_{\text{QED}} + \mathcal{L}_{\text{NC}}^Z, \quad (3.41)$$

където

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = eA_\mu \sum_j \bar{\Psi}_j \gamma^\mu Q_j \Psi_j \equiv eA_\mu J_{\text{em}}^\mu \quad (3.42)$$

е обичайния лагранжиан на КЕД и

$$\mathcal{L}_{\text{NC}}^Z = \frac{e}{2 \sin \theta_W \cos \theta_W} J_Z^\mu Z_\mu, \quad (3.43)$$

$$J_Z^\mu \equiv \sum_j \bar{\Psi}_j \gamma^\mu (\tau_3 - 2 \sin^2 \theta_W Q_j) \Psi_j = J_3^\mu - 2 \sin^2 \theta_W J_{\text{em}}^\mu, \quad (3.44)$$

съдържа взаимодействието на Z бозона. В термини на фермионните полета $\mathcal{L}_{\text{NC}}^Z$ има вида:

$$\mathcal{L}_{\text{NC}}^Z = \frac{e}{2 \sin \theta_W \cos \theta_W} Z_\mu \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) f, \quad (3.45)$$

където $a_f = T_3^f$ и $v_f = T_3^f (1 - 4|Q_f| \sin^2 \theta_W)$.

10.3.3 Самодействие на калибровъчните полета

Допълнително към обичайния член лагранжиана (3.33) съдържа членове от трета и четвърта степен по калибровъчните бозони, определящи самодействието на полетата:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = & -ie \cot \theta_W \left\{ (\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu) W_\mu^\dagger Z_\nu - (\partial^\mu W^{\nu\dagger} - \partial^\nu W^{\mu\dagger}) W_\mu Z_\nu + W_\mu W_\nu^\dagger (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) \right. \\ & \left. - ie \left\{ (\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu) W_\mu^\dagger A_\nu - (\partial^\mu W^{\nu\dagger} - \partial^\nu W^{\mu\dagger}) W_\mu A_\nu + W_\mu W_\nu^\dagger (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \right\} \right\}; \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & -\frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left\{ (W_\mu^\dagger W^\mu)^2 - W_\mu^\dagger W^{\mu\dagger} W_\nu W^\nu \right\} - e^2 \cot^2 \theta_W \left\{ W_\mu^\dagger W^\mu Z_\nu Z^\nu - W_\mu^\dagger Z^\mu W_\nu \right. \\ & - e^2 \cot \theta_W \left\{ 2W_\mu^\dagger W^\mu Z_\nu A^\nu - W_\mu^\dagger Z^\mu W_\nu A^\nu - W_\mu^\dagger A^\mu W_\nu Z^\nu \right\} \\ & \left. - e^2 \left\{ W_\mu^\dagger W^\mu A_\nu A^\nu - W_\mu^\dagger A^\mu W_\nu A^\nu \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Обърнете внимание, че \mathcal{L}_3 има само членове с два заредени W и един неутрален (Z или γ) бозон.

10.4 Спонтанно нарушение на симетрията

Досега ние успяхме да получим взаимодействията породени от заредени и неутрални токове във вида необходим за описанието на слабите разпади. При това включихме КЕД в същата теоритична схема и освен това ние имаме допълнително самодействие на калибровъчните бозони, което се генерира от неабелевата структура на групата $SU(2)$. Калибровъчната симетрия също така гарантира, че добре дефиниран пренормируем лагранжиан. Въпреки това нашия лагранжиан има малко общо с действителността, защото калибровъчните бозони са безмасови. Както е добре известно от експерименталните наблюдения W^\pm и Z бозоните трябва да са доста тежки обекти.

За да генерираме маси, трябва да нарушим калибровъчната симетрия по някакъв начин. Освен това е необходимо напълно симетричният лагранжиан да остане пренормируем. Възможното решение на тази дилема се базира на факта, че е възможно да се получи несиметрично решение от инвариантен лагранжиан.

Нека да разгледаме лагранжиан, който:

1. Е инвариантен при трансформации на групата G .
2. Има изродени състояния с минимална енергия (вакуум), които се трансформират под действие на G като член на дадения мултиплет.

Ако от тези състояния се избере случайно едно като основно състояние на системата, се казва, че симетрията е нарушена спонтанно.

Този тип ситуации могат да бъдат илюстрирани с т.нар. дилема на Буридановото магаре: Представете си магаре на еднакво разстояние от две еднакви купи сено. Картината е напълно симетрична и симетрията ще бъде “спонтанно” нарушена, когато магарето реши от коя купа ще започне да яде първо. Физичен пример може да бъде даден с феромагнит: въпреки, че хамилтониана е инвариантен при ротации, основното състояние има спин ориентиран в произволно направление. Освен това състоянията с по-голяма енергия, достигнати с краен брой възбуждания от основното състояние, ще имат същата анизотропия.

В Квантовата теория на полето основното състояние е вакуума. Тогава спонтанно нарушение на симетрията ще се наблюдава, когато лагранжиана е симетричен, но вакуума не е.

10.4.1 Теорема на Голдстоун

Нека разгледаме комплексно скаларно поле $\phi(x)$ с лагранжиан

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(\phi); \quad V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + h (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (4.48)$$

\mathcal{L} е инвариантен при глобални фазови трансформации на скаларното поле

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) \equiv \exp\{i\theta\}\phi(x). \quad (4.49)$$

За да имаме основно състояние потенциала $V(\phi)$ трябва да е ограничен отдолу, т.е $h > 0$. За квадратичната част има две възможности:

1. $\mu^2 > 0$: Потенциалът има само тривиален минимум $\phi = 0$. Той описва масивна скаларна частица с маса μ и константа на взаимодействие h .

2. $\mu^2 < 0$: Минимума получен в този случай удовлетворява

$$|\phi_0| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2h}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} > 0; \quad V(\phi_0) = -\frac{h}{4}v^4. \quad (4.50)$$

Поради $U(1)$ (фазова) инвариантността на лагранжиана, съществуват безкраен брой изродени състояния с минимална енергия. $\phi_0(x) = \frac{v}{\sqrt{2}} \exp\{i\theta\}$. Чрез избор на конкретно състояние, напр. $\theta = 0$, като основно състояние, симетрията се нарушава спонтанно. Ако параметризираме възбудените състояния над основното по следния начин:

$$\phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \phi_1(x) + i\phi_2(x)], \quad (4.51)$$

където ϕ_1 и ϕ_2 са реални полета, за потенциала $V(\phi)$ получаваме следната форма:

$$V(\phi) = V(\phi_0) - \mu^2\phi_1^2 + hv\phi_1(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{h}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \quad (4.52)$$

Тук ϕ_1 описва масивно поле с маса $m_{\phi_1}^2 = -2\mu^2$, докато ϕ_2 е безмасово.

Първата възможност ($\mu^2 > 0$) е обичайната ситуация с едно основно състояние. Другия случай, със спонтанно нарушение на симетрията, е по-интересен. Появата на безмасова частица когато $\mu^2 < 0$ е лесно за обяснение: полето ϕ_2 описва възбуждания на полето в “плоскостта на потенциала”, т.е. това са състояния със същата енергия като основното състояние. Тъй като възбужданията

не изискват никаква енергия, те очевидно съответства на безмасови състояния.

Факта, че съществуват безмасови възбуждания свързани с механизма на спонтанно нарушение на симетрията е генерален резултат, известен като теорема на Голдстоун [15].

Теорема 1 (Голдстоун) *Ако лагранжиана е инвариантен относно непрекъснатата група на симетрия G , но вакуума е инвариантен само относно подгрупа $H \subset G$, тогава съществуват толкова безмасови частици със спин 0 (Голдстоунови бозони), колкото са нарушените генератори (тези генератори от G които не принадлежат на H).*

10.4.2 Механизъм на Хигс

На пръв поглед *Теоремата на Голдстоун* не подобрява нашия проблем с безмасовите частици, в действителност нещата се влошават, защото ние искаме както масови така и безмасови полета. В действителност нещата се променят, когато калибровъчната симетрия е локална [16].

Нека да разгледаме [2] $SU(2)_L$ дублет на комплексно скаларно поле

$$\phi(x) \equiv \begin{pmatrix} \phi^{(+)}(x) \\ \phi^{(0)}(x) \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Калибровъчния лагранжиан от модела на Голдстоун ((4.48)),

$$\mathcal{L}_S = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - h (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (h > 0, \mu^2 < 0), \quad (4.54)$$

$$D^\mu \phi = \left[\partial_\mu - ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu - ig' y_\phi B_\mu \right] \phi \quad (y_\phi = 1/2), \quad (4.55)$$

е инвариантен относно локалните $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ трансформации. Стойността на скаларния хиперзаряд се фиксира от изискването да имаме коректна константа на взаимодействие между $\phi(x)$ и $A^\mu(x)$, т.е. фотона да не взаимодейства с $\phi^{(0)}$ и полето $\phi^{(+)}$ да има правилния електричен заряд.

Потенциала е подобен на разгледания по горе. Съществуват безкраен брой от изродени състояния с минимална енергия, удовлетворяващи условието:

$$|\langle 0 | \phi^{(0)} | 0 \rangle| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2h}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (4.56)$$

Обърнете внимание, че ние директно свързахме класическото основно състояние с квантовия вакуум. След като изберем едно конкретно основно състояние симетрията $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ се нарушава спонтанно до групата на КЕД $U(1)_{\text{QED}}$, която по конструкция е все още симетрия на вакуума. Според *Теоремата на Голдстоун* три безмасови бозона трябва да се появят.

Нека сега да параметризираме скаларния дублет в пълната му форма

$$\phi(x) = \exp \left\{ i \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}(x) \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

с четири реални полета $\vec{\theta}(x)$ и $H(x)$. Съществен момент е, че инвариантността на лагранжиана относно групата $SU(2)_L$ е локална, което ни позволява да изключим зависимостта от полета $\vec{\theta}(x)$. Тези три полета биха били безмасовите Голдстоунови бозони, свързани с механизма на спонтанно нарушение на симетрията. Калибровъчната симетрия прави тези безмасови полета нефизични.

Ковариантната производна (4.55) свързва скаларния мултиплет с калибровъчните бозони от $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Ако бъде избран физическата (унитарна) калибровка $\vec{\theta}(x) = \vec{0}$, кинетичния член на скаларния лагранжиан (4.54) получава следния вид:

$$(D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi \xrightarrow{\vec{\theta}=\vec{0}} \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + (v + H)^2 \left\{ \frac{g^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \right\}. \quad (4.58)$$

По този начин неутралния скалар генерира квадратични членове за полетата W^\pm и Z , т.е. тези калибровъчни бозони придобиха маси:

$$M_Z \cos \theta_W = M_W = \frac{vg}{2}. \quad (4.59)$$

Така ние намерихме начин промеждутъчните носители на слабото взаимодействие да придобият маси. Ние просто добавихме \mathcal{L}_S от (4.54) към нашия $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ модел. Пълния лагранжиан е инвариантен относно калибровъчните трансформации, което гарантира [17] пренормируемостта на теорията. Освен това трите нарушени генератора породиха три безмасови Голдстоунови бозона, които, поради локалната калибровъчна инвариантност, се оказаха нефизични (т.е. не водят до наблюдаеми ефекти). Благодарение на унитарната калибровка ние открихме, че W^\pm и Z придобиха маси (но не и γ , поради това, че симетрията $U(1)_{\text{QED}}$ не е нарушена), които са свързани чрез съотношението (4.59). Също така (3.37) придобива смисъл на

презаписване на калибровъчните полета в термини на физическите бозонни полета с определена маса.

Полезно е да се преброят степените на свобода. Преди спонтанното нарушение на симетрията лагранжиана съдържа безмасовите бозони W^\pm и Z (т.е. $3 \times 2 = 6$ степени на свобода, поради двете възможни поляризации на безмасови полета със спин 1) и четири реални скаларни полета от $\phi(x)$. След спонтанното нарушение на симетрията трите Голстоунови бозони са “погълнати” от калибровъчните бозони, които стават масивни и придобиват допълнителна надлъжна поляризация. Така ние имаме $3 \times 3 = 9$ степени на свобода в калибровъчния сектор и още една за скаларната частица H , която се нарича Хигс бозон. Пълния брой степени на свобода остава един и същ преди и след спонтанното нарушение на симетрията.

10.4.3 Предсказания

Сега ние имаме всички съставни части за да опишем слабото взаимодействие. Можем да възпроизведем резултатите от нискоенергитичните приближения в рамките на добре дефинирана Квантова теория на полето. Нашата теория предсказва съществуването на масивни промеждутъчни калибровъчни бозони W^\pm и Z , което беше потвърдено чрез експерименталното им откриване [18]. Нещо повече, механизмът на Хигс дава прецизно предсказание за масите на W^\pm и Z , свързващи ги с вакуумното средно на скаларното поле чрез (4.59). Така се предсказва, че M_Z е по-тежък от M_W . Използвайки съотношенията $G_F/\sqrt{2} = g^2/(8M_W^2)$ и $e = g \sin \theta_W$, ние получаваме

$$M_W = \left(\frac{\pi\alpha}{G_F\sqrt{2}} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin \theta_W} = \frac{37.280\text{GeV}}{\sin \theta_W}, \quad v = \left(\sqrt{2}G_F \right)^{-1/2} = 246\text{GeV}. \quad (4.60)$$

Директен тест на тези съотношения може да бъде направен в експерименти с разсейване на неутрина, чрез сравнение на сеченията между процеси с неутрални и заредени токаве. Еластичното разсейване $\nu q \rightarrow \nu q$ се осъществява чрез обмен на Z в t канала, докато нееластичния процес $\nu q \rightarrow lq'$ изисква обмен на зареден W .

При малък предаден импулс бозонните пропагатори се редуцират до константи, определени от съответните маси. Константите на взаимодействието на фермионите със Z и W^\pm от (3.45) и (3.36) са свързани чрез ъгъла θ_W .

$$\frac{\sigma_{\text{NC}}(\nu q)}{\sigma_{\text{CC}}(\nu q)} \sim \left(\frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} \right)^2 f(\sin^2 \theta_W). \quad (4.61)$$

Освен това могат да се сравнят процесите на разсейване на ν и $\bar{\nu}$ върху различни мишени. Анализът на експерименталните данни дава [8]

$$\frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} \approx 1, \quad \sin^2 \theta_W \approx 0.23. \quad (4.62)$$

Отличното съгласие с теоретичните предсказания е много добро потвърждение на предположената структура на спонтанното нарушение на симетрията.

Поставяйки измерените стойности за θ_W в (4.60), се получават следните предсказания за масите на калибровъчните бозони,

$$M_W \approx 78\text{GeV}, \quad M_Z \approx 89\text{GeV}, \quad (4.63)$$

които са в добро съгласие с експерименталните резултати $M_W = (80.423 \pm 0.039)\text{GeV}$ и $M_Z = (91.1876 \pm 0.0021)\text{GeV}$ [8]. Малката числова разлика се обяснява от квантовите корекции от по-висок порядък, които трябва да бъдат отчетени при пресмятане на (4.63) (Виж ?? и ??).

10.4.4 Хигс бозон

Скаларния лагранжиан (4.54) въведе нова скаларна частица в модела: Хигс бозона H . В термини на физическите полета (унитарна калибровка), \mathcal{L}_S придобива следния вид:

$$\mathcal{L}_S = \frac{hv^4}{4} + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{HG^2}, \quad (4.64)$$

където

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \frac{1}{2} M_H^2 H^2 - \frac{M_H^2}{2v} H^3 - \frac{M_H^2}{8v^2} H^4, \quad (4.65)$$

$$\mathcal{L}_{HG^2} = M_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu \left\{ 1 + \frac{2}{v} H + \frac{H^2}{v^2} \right\} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \left\{ 1 + \frac{2}{v} H + \frac{H^2}{v^2} \right\}, \quad (4.66)$$

и масата на Хигс бозона се дава от израза

$$M_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2}hv. \quad (4.67)$$

Взаимодействията на Хигс бозона има много характерна форма: те са винаги пропорционални на квадрата на масата на бозона, с който той взаимодейства. Всички константи на взаимодействие на Хигс бозона се определят от M_H , M_W , M_Z и вакуумното средно v .

10.5 Фермионни поколения

10.5.1 ГИМ механизъм

Нискоенергитичния $V - A$ хамилтониан (1.10) показва, че $SU(2)_L$ партньора на u кварка не трябва да е d , а по-скоро комбинацията $d_C = \cos \theta_C d + \sin \theta_C s$. Но найвнатая замяна на d с d_C в лагранжиана

на неутралния ток (3.45), води до промяна на аромата от неутралните токове,

$$Z_\mu \bar{d}_C \gamma^\mu (v_d - a_d \gamma_5) d_C \longrightarrow \cos \theta_C \sin \theta_C Z_\mu [\bar{d} \gamma^\mu (v_d - a_d \gamma_5) s + \bar{s} \gamma^\mu (v_d - a_d \gamma_5) d], \quad (5.68)$$

като величината на тези преходи е сравнима с тези запазващи аромата $Z \bar{d} d$. Този резултат е катастрофален за модела, имайки в предвид строгите експериментални ограничения в (2.19).

За разрешаване на този проблем през 1970 е предположено [4], че съществува допълнителен кварков аромат: очарован. Тогава могат да се формират два различни кваркови дублета,

$$\begin{pmatrix} u \\ d_C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s_C \end{pmatrix}, \quad (5.69)$$

където

$$\begin{pmatrix} d_C \\ s_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \equiv \mathbf{V} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}. \quad (5.70)$$

Ортогоналността на матрицата на смесване на кварките \mathbf{V} ще осигури желаната липса на неутрални преходи променящи аромата (ГИМ механизъм [4]),

$$(\bar{d}_C d_C + \bar{s}_C s_C) = (\bar{d} d + \bar{s} s), \quad (5.71)$$

ако константите на взаимодействие на двата дублета са еднакви. Откриването на очарования кварк през 1974г. [22] е голяма крачка напред в развитието на Стандартния модел.

10.5.2 Фермионни маси

За да говорим за кваркови аромати, е необходимо първо да разберем кварковите маси (d и s са дефинирани като масови собствени състояния).

Ние вече знаем, че фермионния масов член, $\mathcal{L}_m = -m\bar{\Psi}\Psi = -m(\bar{\Psi}_L\Psi_R + \bar{\Psi}_R\Psi_L)$ не е разрешен, защото той нарушава калибровъчната симетрия. Но, тъй като ние въведохме допълнителен скаларен дублет в модела, можем да напишем следния калибровъчно-инвариантен фермионно-скаларен член:

$$\mathcal{L}_Y = c_1 (\bar{u}, \bar{d})_L \begin{pmatrix} \phi^{(+)} \\ \phi^{(0)} \end{pmatrix} d_R + c_2 (\bar{u}, \bar{d})_L \begin{pmatrix} \phi^{(0)\dagger} \\ -\phi^{(+)\dagger} \end{pmatrix} u_R + c_3 (\bar{\nu}_e, \bar{e})_L \begin{pmatrix} \phi^{(+)} \\ \phi^{(0)} \end{pmatrix} e_R + \text{h.c.} \quad (5.72)$$

В унитарна калибровка (след спонтанно нарушение на симетрията), този лагранжиан от Юкавски тип получава проста форма:

$$\mathcal{L}_Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H) \{c_1 \bar{d}d + c_2 \bar{u}u + c_3 \bar{e}e\}. \quad (5.73)$$

Механизма на спонтанно нарушаване на симетрията също така генерира маси и ан фермионните полета:

$$m_d = -c_1 v / \sqrt{2}; \quad m_u = -c_2 v / \sqrt{2}; \quad m_e = -c_3 v / \sqrt{2}. \quad (5.74)$$

Доколкото ние не знаем параметрите c_i , стойностите на фермионните маси са произволни. Всички Юкавски константи са фиксирани в термини на масите:

$$\mathcal{L}_Y = - \left(1 + \frac{H}{v}\right) \{m_d \bar{d}d + m_u \bar{u}u + m_e \bar{e}e\}. \quad (5.75)$$

10.5.3 Смесване на ароматите

От експериментални наблюдения е известно, че съществуват шест различни кваркови аромата (u, d, s, c, b, t), три различни лептона (e, μ, τ) и техните неутрина (ν_e, ν_μ, ν_τ). Тези частици могат да бъдат включени в рамките на Стандартния модел, като бъдат организирани в три фамилии от кварки и лептони.

$$\begin{bmatrix} \nu_e & u \\ e^- & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_\mu & c \\ \mu^- & s \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_\tau & t \\ \tau & b \end{bmatrix}, \quad (5.76)$$

където

$$\begin{bmatrix} \nu_l & q_u \\ l^- & q_d \end{bmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nu_l \\ l^- \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} q_u \\ q_d \end{pmatrix}_L, \quad l_R^-, \quad (q_u)_R, \quad (q_d)_R. \quad (5.77)$$

Така ние получаваме три почти идентични копия с една и съща $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ структура, като единствената разлика са масите им.

Нека да разгледаме общия случай с N_G фермионни поколения и нека отбележим с ν'_j, l'_j, u'_j, d'_j членовете на фамилията j ($j = 1, \dots, N_G$) с определени трансформационни свойства относно калибровъчната група. Собствените състояния на слабото взаимодействие са линейна комбинация от масовите собствени състояния. Най-общия Юкавски лагранжиан има следния вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = \sum_{jk} \left\{ (\bar{u}'_j, \bar{d}'_j)_L \left[c_{jk}^{(d)} \begin{pmatrix} \phi^{(+)} \\ \phi^{(0)} \end{pmatrix} d'_{kR} + c_{jk}^{(u)} \begin{pmatrix} \phi^{(0)\dagger} \\ -\phi^{(+)\dagger} \end{pmatrix} u'_{kR} \right] \right. \\ \left. + (\bar{\nu}'_j, \bar{l}'_j)_L c_{jk}^{(l)} \begin{pmatrix} \phi^{(+)} \\ \phi^{(0)} \end{pmatrix} l'_{kR} \right\} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (5.78)$$

където $c_{jk}^{(d)}$, $c_{jk}^{(u)}$ и $c_{jk}^{(l)}$ са произволни константи на взаимодействие.

След спонтанното нарушаване на симетрията Юкавския лагранжиан може да бъде записан така:

$$\mathcal{L}_Y = - \left(1 + \frac{H}{v} \right) \left\{ \bar{\mathbf{d}}'_L \mathbf{M}'_d \mathbf{d}'_R + \bar{\mathbf{u}}'_L \mathbf{M}'_u \mathbf{u}'_R + \bar{\mathbf{l}}'_L \mathbf{M}'_l \mathbf{l}'_R + \text{h.c.} \right\}. \quad (5.79)$$

Тук с \mathbf{d}' , \mathbf{u}' и \mathbf{l}' са отбелязани векторите в ароматното пространство и съответващите масови матрици са записват по следния начин:

$$(\mathbf{M}'_d)_{ij} \equiv -c_{ij}^{(d)} v / \sqrt{2}, \quad (\mathbf{M}'_u)_{ij} \equiv -c_{ij}^{(u)} v / \sqrt{2}, \quad (\mathbf{M}'_l)_{ij} \equiv -c_{ij}^{(l)} v / \sqrt{2}. \quad (5.80)$$

Диягонализацията на тези масови матрици определя масовите собствени състояния d_j , u_j and l_j .

Матрицата \mathbf{M}'_d може да бъде разложена на $\mathbf{M}'_d = \mathbf{H}_d \mathbf{U}_d = \mathbf{S}_d^\dagger \mathcal{M}_d \mathbf{S}_d \mathbf{U}_d$, където $\mathbf{H}_d \equiv \sqrt{\mathbf{M}'_d \mathbf{M}'_d{}^\dagger}$ е ермитова положително дефинитна матрица, а \mathbf{U}_d е унитарна. \mathbf{H}_d може да бъде диагонализирана чрез унитарна матрица \mathbf{S}_d ; резултантната матрица \mathcal{M}_d е диагонална, ермитова и положително дефинитна. Аналогично $\mathbf{M}'_u = \mathbf{H}_u \mathbf{U}_u = \mathbf{S}_u^\dagger \mathcal{M}_u \mathbf{S}_u \mathbf{U}_u$ и $\mathbf{M}'_l = \mathbf{H}_l \mathbf{U}_l = \mathbf{S}_l^\dagger \mathcal{M}_l \mathbf{S}_l \mathbf{U}_l$. В термини на диагонални матрици, $\mathcal{M}_d = \text{diag}(m_d, m_s, m_b, \dots)$, $\mathcal{M}_u = \text{diag}(m_u, m_c, m_t, \dots)$, $\mathcal{M}_l = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau, \dots)$, Юкавския лагранжиан получава проста форма

$$\mathcal{L}_Y = - \left(1 + \frac{H}{v} \right) \left\{ \bar{\mathbf{d}} \mathcal{M}_d \mathbf{d} + \bar{\mathbf{u}} \mathcal{M}_u \mathbf{u} + \bar{\mathbf{l}} \mathcal{M}_l \mathbf{l} \right\}, \quad (5.81)$$

като масовите състояния се дефинират така

$$\mathbf{d}_L \equiv \mathbf{S}_d \mathbf{d}'_L, \quad \mathbf{u}_L \equiv \mathbf{S}_u \mathbf{u}'_L, \quad \mathbf{l}_L \equiv \mathbf{S}_l \mathbf{l}'_L, \quad (5.82)$$

$$\mathbf{d}_R \equiv \mathbf{S}_d \mathbf{U}_d \mathbf{d}'_R, \quad \mathbf{u}_R \equiv \mathbf{S}_u \mathbf{U}_u \mathbf{u}'_R, \quad \mathbf{l}_R \equiv \mathbf{S}_l \mathbf{U}_l \mathbf{l}'_R. \quad (5.83)$$

Обърнете внимание, че Хигсовите константи са пропорционални на съответните фермионни маси.

Тъй като $\bar{\mathbf{f}}'_L \mathbf{f}'_L = \bar{\mathbf{f}}_L \mathbf{f}_L$ и $\bar{\mathbf{f}}'_R \mathbf{f}'_R = \bar{\mathbf{f}}_R \mathbf{f}_R$ ($f = d, u, l$), формата на неутралния ток в $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ лагранжиана не се променя при преминаване в термини на масови собствени състояния. Следователно в Стандартния модел няма неутрални токове променящи аромата. Обобщения ГИМ механизъм е следствие от третирането на всички фермиони с еднакъв заряд на една и съща основа.

Но освен това $\bar{\mathbf{u}}'_L \mathbf{d}'_L = \bar{\mathbf{u}}_L \mathbf{s}_u \mathbf{s}_d^\dagger \mathbf{d}_L \equiv \bar{\mathbf{u}}_L \mathbf{V} \mathbf{d}_L$. В общия случай $\mathbf{s}_u \neq \mathbf{s}_d$; тогава при записване на собствените стийности на слабо-то взаимодействие в термини на масовите собствени стойности, в кварковите заредени токове се появява унирна матрица на смесване $N_G \times N_G$ \mathbf{V} , наречена матрица на Кабибо–Кобаяши–Маскава (ККМ) [11, 23]:

$$\mathcal{L}_{\text{CC}} = \frac{g}{2\sqrt{2}} \left\{ W_\mu^\dagger \left[\sum_{ij} \bar{u}_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mathbf{V}_{ij} d_j + \sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l \right] + \text{h.c.} \right\}. \quad (5.84)$$

Матрицата \mathbf{V} свързва всеки “горен” кварк със всички “долни” кварки.

Тъй като неутрината са безмасови, ние винаги можем да предефинираме неутринните аромати по такъв начин, че да елиминираме аналогичното смесване в лептонния сектор: $\bar{\nu}'_L \mathbf{l}'_L = \bar{\nu}'_L \mathbf{s}_l^\dagger \mathbf{l}_L \equiv \bar{\nu}_L \mathbf{l}_L$. Така получаваме запазване на лептонния аромат в рамките на минималния Стандартен модел, без наличието на дясно неутрино.

Ферминните маси и матрицата на смесване на кварките \mathbf{V} са определени от Юкавските константи в (5.78). Те обаче са неизвестни; така ние трябва да използваме произволни параметри. Унитарна матрица $N_G \times N_G$ съдържа N_G^2 реални параметъра [$N_G(N_G - 1)/2$ амплитуди и $N_G(N_G + 1)/2$ фази]. В случая на \mathbf{V} много от тези па-

раметри са несъществени, защото ние винаги можем да изберем случайни кваркови фази. При предефиниране на фазите $u_i \rightarrow e^{i\phi_i}u_i$ и $d_j \rightarrow e^{i\theta_j}d_j$, матрицата на смесване се изменя като $\mathbf{V}_{ij} \rightarrow \mathbf{V}_{ij}e^{i(\theta_j-\phi_i)}$; така $2N_G - 1$ фази са ненаблюдаеми. Броят на свободните физическите параметри в матрицата на смесване се редуцира до $(N_G - 1)^2$: $N_G(N_G - 1)/2$ амплитуди и $(N_G - 1)(N_G - 2)/2$ фази.

В простия случай на две поколения \mathbf{V} се определя от един единствен параметър. В този случай \mathbf{V} се свежда до матрицата на Кабибо от (5.70). С $N_G = 3$, матрицата на ККМ се описва с три ъгъла и една фаза. Различни (но еквивалентни) представяния могат да бъдат намерени в литературата. В [8] използват следната “стандартна” параметризация:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix}. \quad (5.85)$$

Тук $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$ и $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$, с i и j се отбелязва номера на поколението ($i, j = 1, 2, 3$). Реалните ъгли θ_{12} , θ_{23} и θ_{13} могат да бъдат направени да лежат в първи квадрант чрез подходящо предефиниране на фазите на кварковите полета; тогава $c_{ij} \geq 0$, $s_{ij} \geq 0$ и $0 \leq \delta_{13} \leq 2\pi$.

Обърнете внимание, че δ_{13} е единствената комплексна фаза в лагранжиана на Стандартния модел. Следователно това е единствения възможен източник на нарушаване на СР-инвариантността. В действителност това е причината да се предположи, че съществува трето поколение [23], преди откриването на b и τ . С две поколения Стандартния модел не би могъл да обясни наблюдаваното СР-нарушение в K системите.

10.5.4 Параметри на Стандартния модел

Калибровъчния и скаларния сектор в лагранжиана на Стандартния модел съдържат само четири параметъра: g , g' , μ^2 и h . Те могат да бъдат заменени с α , θ_W , M_W и M_H . Алтернативно като свободни параметри могат да бъдат избрани α , M_Z , G_F и M_H ; този избор има предимството, че се използват три от най-прецизно измерените константи.

В Юкавския сектор ситуацията е различна. В случай на $N_G = 3$ имаме 13 свободни параметъра: 9 маси, 3 ъгъла и 1 фаза. Ясно е, че това не е много задоволително. Източникът на това множество от параметри е незнанието на Юкавските константи в (5.78). Произхода на масите и смесването заедни с наличието на три идентични фамилии се явяват като един от основните отворени проблеми във физиката на електрослабото взаимодействие.

Имайки в предвид константантата на взаимодействие на КХД $\alpha_s(M_Z^2)$, пълния $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ лагранжиан на Стандартния модел съдържа 18 свободни параметъра.

10.6 Смесване на кварките

Нашите знания за параметрите на заредения ток не са толкова добри както в случай на неутралния ток. За да се измерят елементите на матрицата на ККМ се изучават полуплептонните разпади $H \rightarrow H'l\bar{\nu}_l$, свързани с със съответните кваркови преходи $d_j \rightarrow u_i l^- \bar{\nu}_l$. Амплитудата на прехода

$$T[H \rightarrow H'l\bar{\nu}_l] \approx \frac{G_F}{\sqrt{2}} \mathbf{V}_{ij} \langle H' | \bar{u}_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d_j | H \rangle \bar{l} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_l \quad (6.1)$$

винаги включва адронен матричен елемент на левия слаб ток.

Пресмятането на този матричен елемент е непертурбативен КХД проблем и включва неизбежни теоретични неопределености.

Обикновено се изучава полулептонен преход, където матричният елемент може да бъде фиксиран в някоя кинематична точка от принцип на симетрия. Този подход има хубавото качество да намалява теоретичните неопределености до ниво на корекции нарушаващи симетрията и кинематични екстраполация. Стандартния пример е разпад от типа $0^- \rightarrow 0^-$, като $K \rightarrow \pi l \nu$, $D \rightarrow K l \nu$ или $B \rightarrow D l \nu$. Само векторен ток може да допринася в този случай:

$$\langle P'(k') | \bar{u}_i \gamma^\mu d_j | P(k) \rangle = C_{PP'} \{ (k + k')^\mu f_+(t) + (k - k')^\mu f_-(t) \}. \quad (6.2)$$

Тук $C_{PP'}$ е фактор на Клебш-Гордън и $t = (k - k')^2$. Неизвестната динамика на силното взаимодействие се съдържа напълно във формфактора $f_\pm(t)$. В граница на безмасови кварки $f_-(t) = 0$ и $f_+(0) = 1$, защото свързания ароматен заряд е запазваща се величина. Така остава единствено необходимостта да се отчете корекцията от крайната стойност на масата на кварка.

Тъй като $(k - k')^\mu \bar{l} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_l \sim m_l$, приносът от $f_-(t)$ е кинематически потиснат в модите e и μ . Тогава ширината на разпада може да бъде записана така:

$$\Gamma(P \rightarrow P' l \nu) = \frac{G_F^2 M_P^5}{192 \pi^3} |\mathbf{V}_{ij}|^2 C_{PP'}^2 |f_+(0)|^2 \mathcal{I} (1 + \delta_{\text{RC}}), \quad (6.3)$$

където δ_{RC} е електрослаба радиационна поправка, а \mathcal{I} е отбелязан фазовия интеграл, който в граница $m_l = 0$ има формата

$$\mathcal{I} \approx \int_0^{(M_P - M_{P'})^2} \frac{dt}{M_P^8} \lambda^{3/2}(t, M_P^2, M_{P'}^2) \left| \frac{f_+(t)}{f_+(0)} \right|^2. \quad (6.4)$$

Стандартната процедура за определяне на $|\mathbf{V}_{ij}|$ включва три стъпки:

1. Измерва се формата на разпределението на t . Това фиксира отношението $|f_+(t)/f_+(0)|$ и така определя \mathcal{I} .
2. Измерва се пълната ширина на разпада Γ . Тъй като G_F е известно от мюонния разпад, то експериментално може да се определи произведението $|f_+(0)||\mathbf{V}_{ij}|$.
3. Взема се теоретичното предсказание за $f_+(0)$.

Важен момент е да се осъзнае, че теоретичното начало е винаги необходимо. Следователно точността в определянето на $|\mathbf{V}_{ij}|$ е винаги ограничено от нашата способност да изчислим съответния адронен вход.

10.6.1 \mathbf{V}_{ud}

Най-прецизното измерване на \mathbf{V}_{ud} е направено на свръхразрешения ядрен β разпад от Ферми тип $[0^+ \rightarrow 0^+]$, където ядрения матричен елемент $\langle N' | \bar{u} \gamma^\mu d | N \rangle$ може да бъде фиксиран от запазването на векторния ток. Елемента от матрицата на ККМ се получава от съотношението [35],

$$|\mathbf{V}_{ud}|^2 = \frac{\pi^3 \ln 2}{ft G_F^2 m_e^5 (1 + \delta_{RC})} = \frac{(2984.4 \pm 0.1)s}{ft(1 + \delta_{RC})}, \quad (6.5)$$

където с фактора ft е отбелязан относителния период на полуразпадане коригиран за фазово пространство и Кулонови ефекти [36]. За определянето на $|\mathbf{V}_{ud}|$, е необходимо да се направи внимателен анализ на радиационните поправки [37], включващ както късодействащите приноси $\Delta_{\text{inner}} = 0.0234 \pm 0.0012$, така и ядрено-зависимите корекции $\Delta_{\text{outer}} \equiv \delta_{RC} - \Delta_{\text{inner}}$. Тези радиационни поправки са достатъчно големи $\delta_{RC} \sim 3\text{-}4\%$ и имат съществена роля за съгласуването на резултатите от различните ядра. Крайният резултат от [8] е

$$|\mathbf{V}_{ud}| = 0.9740 \pm 0.0010. \quad (6.6)$$

Независимо елемента \mathbf{V}_{ud} може да бъде определен от неутронния разпад $n \rightarrow pe^- \nu_e$. В този случай аксилния ток също допринася, така че е необходимо експериментално измерване на отношението $g_A/g_V = -1.2720 \pm 0.0018$ и времето на живот на неутрона $\tau_n = 885.7 \pm 0.8$. Така от неутронния разпад получаваме:

$$|\mathbf{V}_{ud}| = 0.9725 \pm 0.0013, \quad (6.7)$$

Пионния бета разпад $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$ предлага по-добър начин за измерване $|\mathbf{V}_{ud}|$. Това е чист векторен преход с много малки теоретични неопределености. За съжаление той има много малко сечение. Експерименталната стойност е $\text{Br} = (1.025 \pm 0.034) \times 10^{-8}$. Резултата от пионния бета разпад е $|\mathbf{V}_{ud}| = 0.968 \pm 0.018$.

Тъй като неопределеността в последния резултат е много голяма, за получаване на средната стойност на елемента \mathbf{V}_{ud} се използват само първите два резултата [8]

$$|\mathbf{V}_{ud}| = 0.9734 \pm 0.0008, \quad (6.8)$$

10.6.2 \mathbf{V}_{us}

За измерване на елемента $|\mathbf{V}_{us}|$ се използват разпадите $K^+ \rightarrow \pi^0 l^+ \nu_l$ и $K^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l$, които се подходящи за целта, защото съответните адронни форм фактори са добре изучени. Нарушаването на $SU(3)$ са силно потиснато [38]. Отчитайки нарушаването на изоспина в горните разпади, получените стойности за $|\mathbf{V}_{us}|$ са в съгласи по-добро от 1%. Радиационните корекции са изчислени в рамките на Киралната теория на пертурбациите [54]. С отчитане на дългодействащите радиационни поправки и нелинейните членове във формфакторите получаваме [8]

$$|\mathbf{V}_{us}| = 0.2196 \pm 0.0026. \quad (6.9)$$

Анализа на [42] хиперонните разпади има по-големи теоретични неопределености, поради нарушаването на $SU(3)$ симетрията в аксиал-векторната константа. Резултата от [8] е $|\mathbf{V}_{us}| = 0.2176 \pm 0.0026$.

Тъй като тази стойност остава извън грешката и не дава добър фит, средната стойност за $|\mathbf{V}_{us}|$ е (6.9) [8].

10.6.3 \mathbf{V}_{cd}

Стойността на $|\mathbf{V}_{cd}|$ се получава от дълбоко нееластично разсейване на ν_μ и $\bar{\nu}_\mu$, чрез измерване на раждането на c кварк от валентни d кварки, т.е. $\nu_\mu d \rightarrow \mu^- c$ и детектиране на c чрез процесите $c \rightarrow \mu^+ \nu_\mu d$ или $\mu^+ \nu_\mu s$. По този начин се получава произведението [8] $\bar{B}_c |\mathbf{V}_{cd}|^2 = (0.41 \pm 0.07) \times 10^{-2}$, където \bar{B}_c е средната вероятност за полулептонен разпад на родения очарован кварк. Използвайки $\bar{B}_c = 0.099 \pm 0.012$ [8], получаваме

$$|\mathbf{V}_{cd}| = 0.224 \pm 0.016. \quad (6.10)$$

10.6.4 \mathbf{V}_{cs}

По подобен начин се получава елемента $|\mathbf{V}_{cs}|$ от $\nu_\mu s \rightarrow \mu^- c$ данни. Резултата зависи от предположения относно плътността на страни кварки в партонното море. Този метод дава възможност да се определи само долна градоца [43] $|\mathbf{V}_{cs}| > 0.59$.

По-прецизна информация се получава от полулептонни разпади на D мезони, напр. $D \rightarrow \bar{K} e^+ \nu_e$. Директните измервания на $|\mathbf{V}_{cs}|$ дават [8] $|\mathbf{V}_{cs}| = 0.97 \pm 0.09(stat.) \pm 0.07(syst.)$. По-точното определяне на елемента може да стане използвайки отношението на адронните

разпади на W към лептонните, което е измерено на LEP [20] и резултата е $\sum_{i,j} |\mathbf{V}_{ij}|^2 = 2.039 \pm 0.025 \pm 0.001$, където сумата е по $i = u, c$ и $j = d, s, b$. Унитарността на матрицата на ККМ изисква сумата да е 2. Тъй като пет от шесте елемента са или добре измерени или пренебрежимо малки, получаваме [20]:

$$|\mathbf{V}_{cs}| = 0.996 \pm 0.013. \quad (6.11)$$

10.6.5 \mathbf{V}_{cb}

Допускайки, че ширината на инклузивния полулептонен разпад на адроните съдържащи b кварк се определя от съответния кварков преход $b \rightarrow cl\nu_l$, елемента $|\mathbf{V}_{cb}|$ може да бъде определен от отношението на измерената относителна вероятност за полулептонен разпад и времето на живот. Ширината $\Gamma(b \rightarrow cl\nu_l) \propto m_b^5$, така че този метод е много чувствителен към масата на b кварка и освен това КХД поправки са значителни. За най-точно определяне на елемента $|\mathbf{V}_{cb}|$ се използва ексклузивния разпад $B \rightarrow D^*l^+\bar{\nu}_l$ [45], където съответните адронни формфактори $[\mathcal{F}(v_B \cdot v_{D^*})]$ са извесни с точност от няколко процента. Разпада $B \rightarrow Dl^+\bar{\nu}_l$ дава съгласуван, но по-малко прецизен резултат. Резултатите от инклузивните и ексклузивните разпади са в добро съгласие. Резултата за $|\mathbf{V}_{cb}|$ [20] е:

$$|\mathbf{V}_{cb}| = (41.2 \pm 2.0) \times 10^{-3}. \quad (6.12)$$

10.6.6 \mathbf{V}_{ub}

Определянето на елемента $|\mathbf{V}_{ub}|$ е основано на измерване на лептонния импулсен спектър в инклузивните разпади $B \rightarrow X_q l \bar{\nu}_l$, където X_q е произволно адронно състояние съдържащо u кварк. Този метод е много чувствителен към предположения теоретичен спектър в кинематичната граница за $B \rightarrow Dl\bar{\nu}_l$. Използвайки различни модели

за оценка на систематичните теоретични неопределености, анализа на експерименталните данни дава [8]

$$|\mathbf{V}_{ub}| = (3.6 \pm 0.7) \times 10^{-3}. \quad (6.13)$$

10.6.7 \mathbf{V}_{tb}

Елемента \mathbf{V}_{tb} се измерва посредством разпада $t \rightarrow bl^+\nu_l$, който конкурира полулептонните разпади на t в s или d кварки. Измереното отношение е [8]

$$\frac{|\mathbf{V}_{tb}|^2}{|\mathbf{V}_{td}|^2|\mathbf{V}_{tc}|^2|\mathbf{V}_{tb}|^2} = 0.94^{+0.31}_{-0.24}. \quad (6.14)$$

10.6.8 Unitarity

Прилагайки условието за унитарност $\mathbf{V}\mathbf{V}^\dagger = \mathbf{V}^\dagger\mathbf{V} = 1$ (и предполагайки, че съществуват само три поколения) може да се получи пълна картина за матрицата на ККМ. С ниво на достоверност 90% стойностите на елементите на матрицата на ККМ са [8]:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0.9741 \text{ to } 0.9756 & 0.219 \text{ to } 0.226 & 0.0025 \text{ to } 0.0048 \\ 0.219 \text{ to } 0.226 & 0.9732 \text{ to } 0.9748 & 0.038 \text{ to } 0.044 \\ 0.004 \text{ to } 0.014 & 0.037 \text{ to } 0.044 & 0.9990 \text{ to } 0.9993 \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Унитарността свързва различните елементи, като стойността на даден елемент ограничава областите, които могат да се изменят другите. Дадените тук области се различават леко (но не си противоречат) от директно определените стойности по горе.

Матрицата на ККМ показва йерархична структура, с диагонални елементи много близки до единица, тези свързващи първите две

поколения около $\lambda \equiv |\mathbf{V}_{us}| = 0.223 \pm 0.003$, с елементи смесващи второто и третото поколение от порядъка λ^2 , и с елементи смесващи първото и третото поколение от порядъка на λ^3 . Това е удобно за използване на следната параметризация на матрицата на ККМ [48]:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4), \quad (6.16)$$

където A , ρ и η са реални числа:

$$A = 0.83 \pm 0.04 \quad \sqrt{\rho^2 + \eta^2} = 0.40 \pm 0.07. \quad (6.17)$$

Друга параметризация в т. нар. “стандартна”:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (6.18)$$

където $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$ и $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$, с $i, j = 1, 2, 3$ са отбелязани поколенията. В случай на $\theta_{13} = \theta_{23} = \delta_{13} = 0$ матрицата на ККМ се свежда до матрицата на Кабибо с θ_{12} ъгъл на Кабинбо.

10.6.9 Индиректно определяне

Допълнителна информация може да бъде получена от неутрални преходи променящи аромата в еднопримково приближение. Важен пример е смесването на B и \bar{B} . Този преход се извършва с обмяна на два W бозона между фермионните линии, т. нар. бокс-диаграма. Амплитудата на смесване е пропорционална на

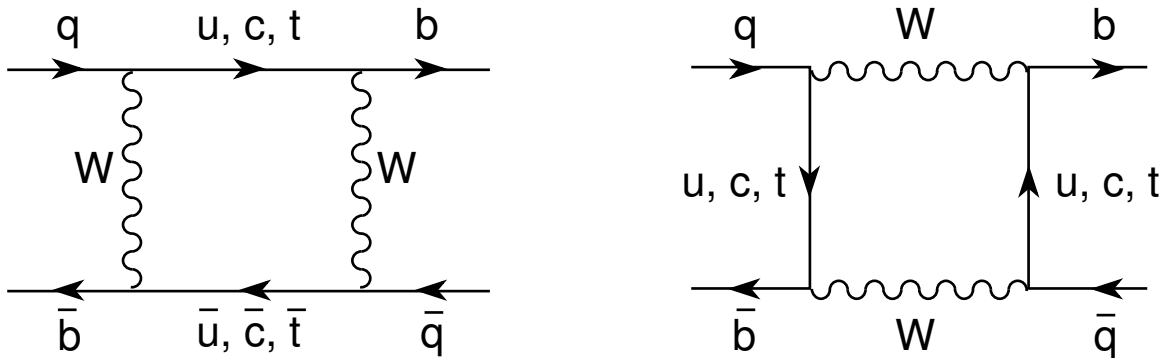
$$\langle \bar{B}_d^0 | \mathcal{H} | B_0 \rangle \sim \sum_{ij} \mathbf{V}_{id} \mathbf{V}_{ib}^* \mathbf{V}_{jd}^* \mathbf{V}_{jb} S(r_i, r_j), \quad (6.19)$$

където $S(r_i, r_j)$ е функция зависеща от масите [$r_i \equiv m_i^2/M_W^2$] на кварките от тип “u” появяващи се във вътрешните линии. Поради унитарността на матрицата на ККМ амплитудите на смесване се нулират за равни маси на кварките (ГИМ механизъм). Така ефекта е пропорционален на разликите в масите между u , c и t . Тъй като различните фактори в матрицата на ККМ са почти равни, $\mathbf{V}_{ud} \mathbf{V}_{ub}^* \sim \mathbf{V}_{cd} \mathbf{V}_{cb}^* \sim \mathbf{V}_{td} \mathbf{V}_{tb}^* \sim A\lambda^3$, крайната амплитуда се доминира от приноса на t кварка. т. е. $\langle \bar{B}_d^0 | \mathcal{H} | B_0 \rangle \sim |\mathbf{V}_{tb}|^2 S(r_t, r_t)$.

Този преход може да бъде използван за определяне на $|\mathbf{V}_{td}|$. Основната неопределеност идва от адронния матричен елемент на четирите кварка от диаграмата на Фиг.10.3. Измереното смесване между B_d^0 и \bar{B}_d^0 , $\Delta M_{B_d^0} = 0.496 \pm 0.007 ps^{-1}$ [55] води до:

$$|\mathbf{V}_{td}| = 0.0077 \pm 0.001, \quad \sqrt{(1-\rho)^2 + \eta^2} \approx \left| \frac{\mathbf{V}_{td}}{\lambda \mathbf{V}_{cb}} \right| = 0.84 \pm 0.12. \quad (6.20)$$

Подобен анализ може да се направи и в системата $B_s^0 - \bar{B}_s^0$.



Фигура 10.3: $B^0 - \bar{B}^0$ mixing diagrams.

Непертурбативните неопределености са намалени до ниво на нарушение на $SU(3)$ чрез отношението

$$\frac{\Delta M_{B_s^0}}{\Delta M_{B_d^0}} \approx \frac{M_{B_s^0} \xi_{B_s^0}^2}{M_{B_d^0} \xi_{B_d^0}^2} \left| \frac{\mathbf{V}_{ts}}{\mathbf{V}_{td}} \right|^2 \equiv \Omega^2 \left| \frac{\mathbf{V}_{ts}}{\mathbf{V}_{td}} \right|^2 \quad (6.21)$$

Вземайки $\Omega \approx 1.15 \pm 0.08$ [56] и експерименталната граница за $\Delta M_{B_s^0} > 14.9 ps^{-1}$ (95% CL)[55] получаваме

$$\left| \frac{\mathbf{V}_{ts}}{\mathbf{V}_{td}} \right| \approx \frac{1}{\lambda \sqrt{(1-\rho)^2 + \eta^2}} > 4.2. \quad (6.22)$$

10.7 Лептонна универсалност на заредените токове

В Стандартния модел W взаимодейства с една и съща сила $g/(2\sqrt{2})$ с всички заредени фермионни токове. Универсалността на лептонното взаимодействие може лесно да бъде тествано, ако се допусне лептонните константи да зависят от типа на лептона и се измерят няколко лептонни и полулептонни разпади.

Отношението $R_{e/\mu}$ на двете полулептонни $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$ моди на разпад е пропорционално на $|g_e/g_\mu|^2$. От (1.8) получаваме:

$$\left| \frac{g_\mu}{g_e} \right| = 1.0017 \pm 0.0015. \quad (7.1)$$

Съгласуван резултат $|g_\mu/g_e| = 1.0006 \pm 0.0021$, се получава чрез измерване на отношението $B_{\tau \rightarrow \mu}/B_{\tau \rightarrow e} = 0.9737 \pm 0.0044$ [8], където $B_{\tau \rightarrow l} \equiv \Gamma(\tau^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l \nu_\tau)$.

Сравнявайки $\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau)$ и $\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu)$, може да бъде тествана g_τ :

$$\left| \frac{g_\tau}{g_\mu} \right| = 0.9995 \pm 0.0023. \quad (7.2)$$

Експерименталните резултати показват [8, 19], че константата на взаимодействие на лептоните със заредените токове е еднаква с точност 0.2%.

Глава 11

Взаимодействие на високоенергетични частици с веществото

Целта на физиката на елементарните частици е да отговори на следните въпроси: Кои са фундаменталните съставлящи на материята? Кои са фундаменталните сили, които контролират тяхното поведение?. Отговорите на тези въпроси включват от експериментална гледната точка изучаването както на взаимодействията на частиците, в резултат на които са се родили нови частици, така и измерването на импулсите на новородените частици с възможно най-висока точност. Регистрацията и идентификацията на елементарните частици и ядрата е от много важно значение във физиката на високите енергии, физиката на космическите лъчи и във ядрената физика. (Идентификация на частиците означава, че масата и електричният заряд на частица, която изучаваме, са известни. Във физиката на елементарните частици повечето частици имат единичен електричен заряд.) Всеки ефект на частиците или на дадено лъчение може да бъде използван като работещ принцип за регистрация на частиците. Отклоненото на заредена частица в магнитно поле определя

нейния импулс p ; радиусът на кривината ρ е даден чрез :

$$\rho \propto \frac{p}{z} = \frac{\gamma m_0 \beta c}{z}, \quad (0.1)$$

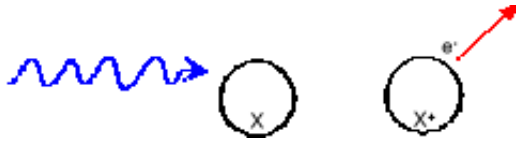
където z е електричният заряд на частицата, m_0 е масата на покой на частицата, а $\beta = v/c$ е нейната скорост съответно. Скоростта на частицата може да бъде определена, например, чрез метода на времето на найния пробег (time-of-flight method): $\beta \propto \frac{1}{\tau}$, където τ е времето на пробегата. Калориметрично измерване дава как да се определи енергията:

$$E^{kin} = (\gamma - 1)m_0c^2, \quad (0.2)$$

Където $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ е Лоренцовият фактор. От тези измервания може да бъде определено отношението $\frac{m_0}{z}$, т.е. току-що идентифицираме частицата, която изучаваме (това е в сила само за заредени частици)! За да се определи заряда на частицата е нужно само z -чувствителен ефект, например, йонизационна енергетична загуба:

$$\frac{dE}{dx} \propto \frac{z^2}{\beta^2} \ln(a\beta\gamma), \quad (0.3)$$

където a е константа, зависеща от материала, в която заредената е загубила енергия dE за слой от веществото dx чрез йонизация. Дотук научихме m_0 и z поотделно. По този начин даже различни изотопи от елементи могат да бъдат различени. Основният принцип за регистрация на частици е, че всеки физичен ефект може да бъде използван като идея за построяване на детектор. Йонизацията на частиците е най-често наблюдавания ефект. В този смисъл неутралните частици се детектират непряко, защото те трябва първо вследствие на някакво взаимодействие да родят заредена частица, която да бъде измерена по вече известните ни начини.



Фигура 11.1: Фотоефект

11.1 Взаимодействия на фотони с веществото

- Фотоефект
- Комптоново разсейване
- Раждане на двойка електрон-позитрон

Когато едно фотонно лъчение с интензивност I_0 попадне във вещество с дебелина x , то претърпява едно от посочените по-горе три взаимодействия, вследствие на което интензивността му се променя по закона:

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (1.4)$$

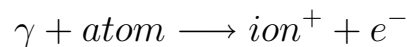
където μ е масовият коефициент на отслабване :

$$\mu = \frac{N_A}{A} \sum_{i=1}^3 \sigma_i \quad (1.5)$$

където $\sigma_{i=1}$ е сечението за фотоефект, $\sigma_{i=2}$ - за комптоново разсейване и $\sigma_{i=3}$ - за двойка e^-e^+ .

11.1.1 Фотоефект

Схемата на фотоефекта е :



. Това е процес, при който γ квант предава цялата си енергия на свързан атомен електрон. Трябва да се отбележи, че този процес е забранен за свободни електрони поради ЗЗИ. В случая ядрото поема импулса на откат. Като имаме в предвид, че 80% от сечението на взаимодействие за фотоефект се осъществява в К-слоя, то можем да запишем точно сечението за фотоефект за този слой:

$$\sigma_{ph.e.}^K = \left(\frac{32}{\varepsilon^7}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha^4 Z^5 \sigma_{Thompson} \quad [cm^2/atom] \quad (1.6)$$

където $\varepsilon = \frac{E_\gamma}{m_e}$, а $\sigma_{Thompson} = \frac{8}{3}\pi r_e^2 = 665 \text{ mbarn}$. За високи енергии горното уравнение добива вида:

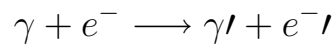
$$\sigma_{ph.e.}^K = 4\pi r_e^2 Z^5 \alpha^4 \frac{1}{\varepsilon}. \quad (1.7)$$

Сечението за фотоефект се увеличава силно с увеличаването на атомния номер Z на средата. Това обяснява защо за защита от γ лъчи се използват тежки метали като оловото.

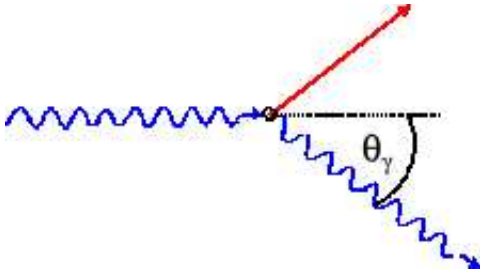
Във физиката на високите енергии сечението за фотоефект е незначително, т.е. фотоефектът отстъпва място пред другите процеси и най-вече пред раждането на двойка електрон - позитрон, както ще видим по - нататък.

11.1.2 Комптъново разсейване

Схемата на Комптъновото разсейване е добре позната:



Комптъновото разсейване на γ - кванти може да стане и от свободни електрони, тъй като представлява двучастичен процес. Енергията на γ - кванта се поделя между разсеяния γ - квант и електрон от средата. Сечението на взаимодействие за Комптъново разсейва-



Фигура 11.2: Комптъново разсейване

не се дава с формулата на Клайн-Нишина-Там, което с точност до константа има вида:

$$\sigma_{Compt} \equiv \sigma_c \sim Const. \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon} Z, \quad (1.8)$$

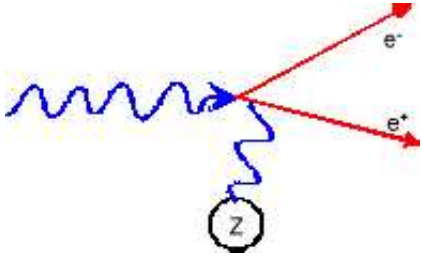
където Z е броят на електроните в атом от мишената. От законите за запазване на енергията и импулса може да се изведе отношението между енергията на разсеяния γ - квант към енергията на налитания γ - квант:

$$\frac{E'_\gamma}{E_\gamma} = \frac{1}{1 + \varepsilon(1 - \cos \Theta_\gamma)}, \quad (1.9)$$

където Θ_γ е ъгълът на разсейване на фотона относно първоначалната посока на движение. За обратно разсейване ($\Theta_\gamma = \pi$), предадената енергия на електрона има максимална стойност:

$$E_{kin}^{max} = \frac{2\varepsilon^2}{1 + 2\varepsilon} m_e c^2, \quad (1.10)$$

което в граничния случай ($\varepsilon \gg 1$) е равно на E_γ . При процесът на разсейване на първичния γ - квант от електрона, само част от енергията на γ - кванта се отдава на електрона, а останалата се отнася от разсеяния γ - квант. Това налага въвеждането на нови две сечения: сечение на разсейване (Energy scattering cross section-



Фигура 11.3: Раждане на двойка електрон - позитрон

σ_{cs}) и сечение на енергетично поглъщане (Energy absorption cross section- σ_{ca}):

$$\sigma_{cs} = \frac{E_{\gamma'}}{E_{\gamma}} \sigma_c \quad (1.11)$$

$$\sigma_{ca} = \sigma_c - \sigma_{cs} = \sigma_c \left(1 - \frac{E_{\gamma'}}{E_{\gamma}}\right) = \sigma_c \frac{E_{kin}^{e^-}}{E_{\gamma}} \quad (1.12)$$

11.1.3 Раждане на двойка електрон - позитрон

Процесът раждане на електрон - позитронна двойка в Кулоновото поле на ядрото изисква минимална енергия:

$$E_{\gamma} \geq 2m_e c^2 + \frac{2m_e^2 c^2}{m_{nucleus}}. \quad (1.13)$$

Практически $m_{nucleus} \gg m_e$ и следователно $E_{\gamma} \geq 2m_e c^2$.

$$\gamma \longrightarrow e^- + e^+ ,$$

От съображения за запазване на импулса следва, че този процес трябва да протече в присъствието на трето тяло. Сечението на процеса може да се запише в следния вид:

$$\sigma_{pair} = 4\alpha r_e^2 Z^2 \left(\frac{7}{9} \ln \frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{54} \right) [cm^2/atom] \quad (1.14)$$

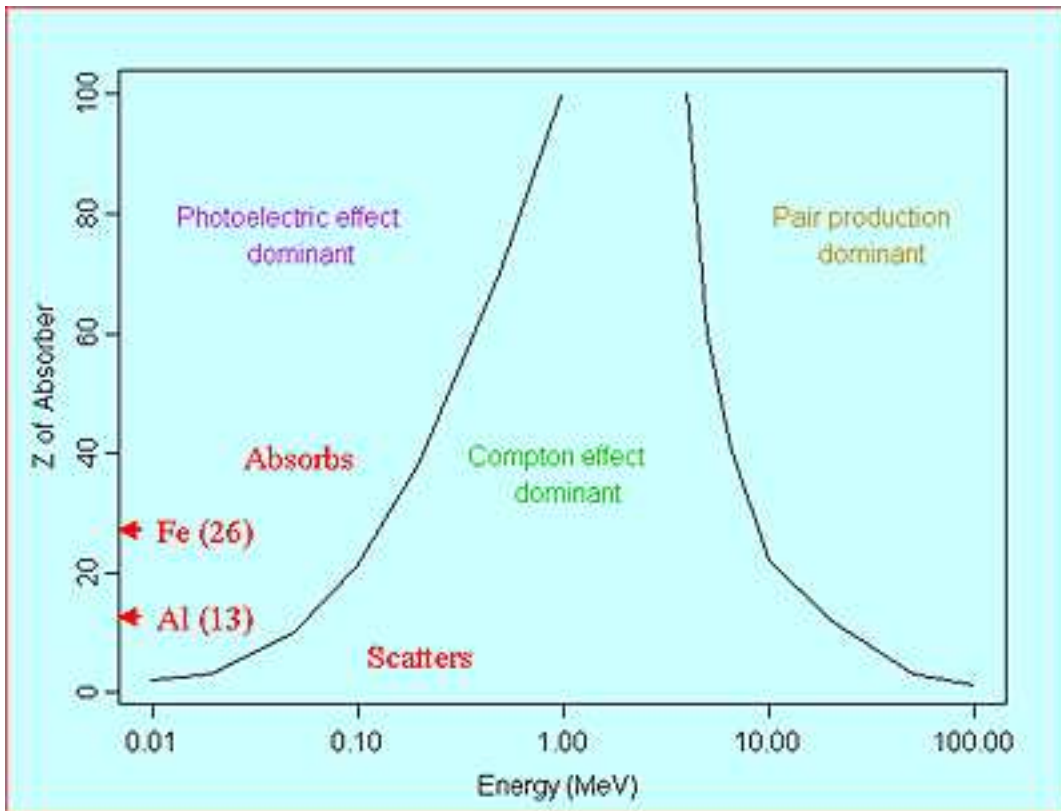
След като премахнем пренебрежимите членове, за големи Z можем да запишем сечението на процеса на раждане на електрон - позитронна двойка в опростения вид :

$$\sigma_{pair} = \frac{7}{9} \frac{A}{N_A} \frac{1}{X_0} \quad (1.15)$$

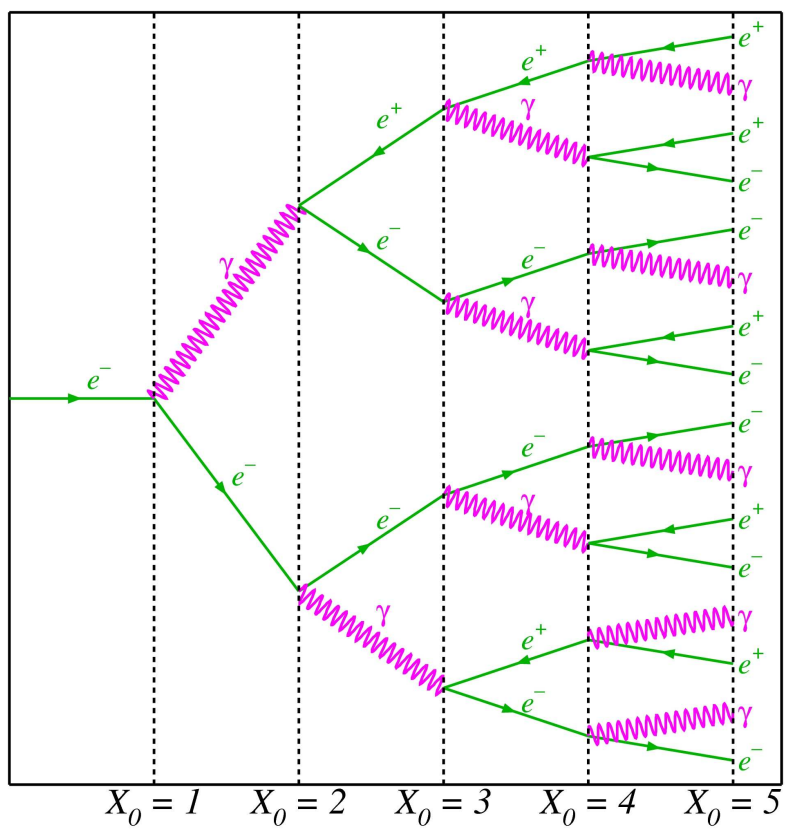
Разпределението на енергията между електрона и позитрона е симетрично при ниски енергии ($E_{gamma} \ll 50MeV$) и силно асиметрично при високи енергии ($E_{gamma} \gg 1GeV$). За да завършим разглеждането на взаимодействията на фотони с веществото нека обобщим : при ниски енергии драстично преобладава фотоефекта над останалите конкурентни процеси, докато при високи енергии категорично доминира раждането на електрон - позитронни двойки.

11.2 Електромагнитни каскади

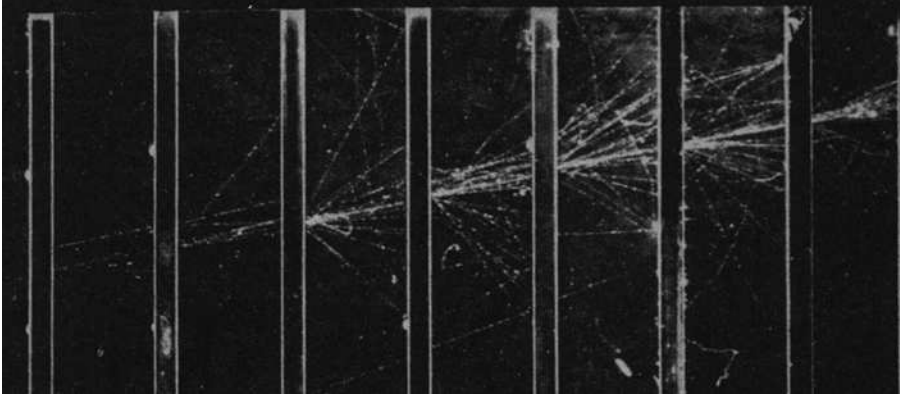
Когато високоенергетичен гама - квант или електрон попадне върху плътен поглътител предизвиква електромагнитна каскада, което се управлява от процесите на раждане на електрон - позитронни двойки и излъчване на спирачно излъчване от заредените частици. Образуван се вторични електрони и гама - кванти с по-ниска енергия. Процесът на вторично раждане на частици протича докато енергията на вторичните гама - кванти падне под енергията за образуване на двойки електрон - позитрон или E падне под критичната енергия за конкретното вещество, където се развива процеса т.е разрастването на лавината продължава дотогава, докато $E = E_c$. При по - ниски енергии от E_c започва процес на йонизация, при което електроните и позитроните губят енергията си и се поглъщат във веществото. По



Фигура 11.4: Относителен принос на трите основни типа взаимодействия на гама - квантите с веществото



Фигура 11.5: Развитие на електромагнитна лавина



Фигура 11.6: Електромагнитна лавина

този начин електромагнитната лавина угасва в средата, в която се е развила.

Една електромагнитна лавина се състои от електрони, позитрони и гама - кванти, така че от горе направените разсъждения можем да запишем броя на частиците като функция на радиационната дължина (t е в единици $[X_0]$). (Радиационната дължина е характеристика на средата и представлява средното разстояние, за което високоенергетичен електрон губи $1/e$ от енергията си чрез спирачно лъчение)

$$N(t) = 2^t \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow E(t) = E_0 2^{-t} \quad (2.17)$$

Вече споменахме, че умножението продължава до $E_e \sim E_c \Rightarrow$

$$E_c = E_0 2^{-t_{max}} \quad (2.18)$$

За времена $t > t_{max}$ частиците започват да се поглъщат, лавината престава да се разпространява.

$$t_{max} = \frac{\ln\left(\frac{E_0}{E_c}\right)}{\ln 2} \approx \ln E_0 \quad (2.19)$$

Пълният брой частици

$$S = \sum_{t=0}^{t_{max}} N(t) = \sum_t 2^t = 2^{t_{max}+1} - 1 \approx 2^{t_{max}+1} \quad (2.20)$$

$$S = 2 \cdot 2^{t_{max}} = 2 \frac{E_0}{E_c} \approx E_0$$

Един електрон, попадайки в калориметъра, оставя цялата си енергия, ако калориметърът е с достатъчно голяма дължина т.е. поне десетки радиационни дължини. Важно е да се отбележи, че между броят на фотоните и енергията на първичния гама квант, предизвикал лавината, съществува линейна връзка. т.е.

$$N_{ph.} \sim S \sim E_0$$

Ако извършваме измервания през време $t \Rightarrow$

$$S^* = \frac{S}{t} = 2 \frac{E_0}{E_c} \frac{1}{t} \quad (2.21)$$

$$\frac{\sigma}{E_0} = \frac{\sqrt{S^*}}{S^*} = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2 \frac{E_0}{E_c}}} \sim \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{E_0}} \quad (2.22)$$

$$\frac{\sigma}{E} \sim \frac{a}{\sqrt{E}},$$

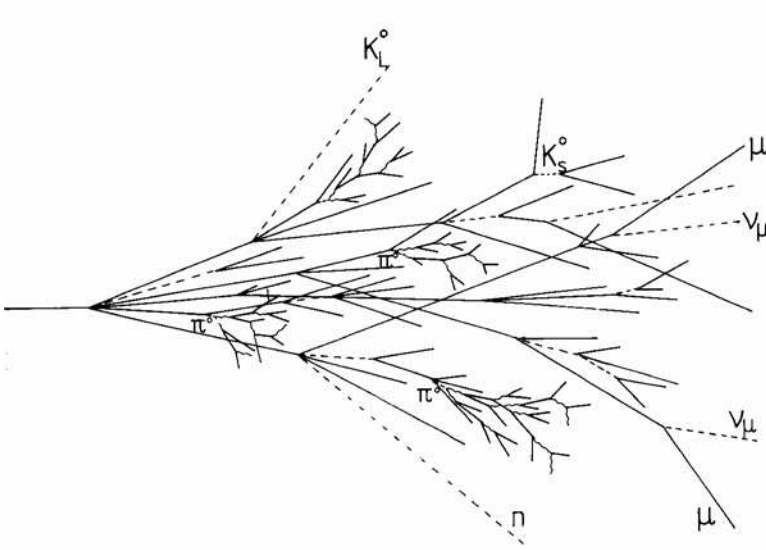
където $a = const$, а $\frac{\sigma}{E}$ е относителната грешка, при измерването на енергията. При по-реалистично описание надлъжното развитие се апроксимира с :

$$dE/dx = const \cdot t^a e^{-bt}, \quad (2.23)$$

където dE/dx зависи от началната енергия E_0 и от веществото, т.е. $a = f(E_0)$ и $b = f(E_0)$. Напречното разпространение зависи от радиуса на Молиер (Moliere) :

$$R_m = \frac{21 \text{ MeV}}{E_c} X_0 \quad [g/cm^2] \quad (2.24)$$

Трябва да се отбележи, че X_0 и E_c са различни за различните вещества. В калориметър, който можем да разглеждаме като цилиндър с радиус $r = R_m$, 95% от енергията се остава в калориметъра. За хомогенни калориметри $R_m(Fe) = 14 \text{ g/cm}^2 \sim 1.8 \text{ cm}$, $R_m(Pb) = 18 \text{ g/cm}^2 \sim 1.6 \text{ cm}$.



Фигура 11.7: Адронна лавина

11.3 Адронни лавини

Адронизацията е процес, аналогичен на образуването на електромагнитна лавина, който се осъществява при високи енергии, при което силното взаимодействие взема връх над електромагнитното. При това, вместо радиационната дължина на вълната X_0 ще използваме ядрената дължина λ_I . Друго, което трябва да се отбележи е, че при електромагнитно взаимодействие и високи енергии, ъглите между образуваните се частици (e^- и e^+) са много малки, т.е. те летят близо едни до други. При силно взаимодействие това не е така, там p_{\perp} е много по-голям.

Особености при адронизация :

- адронната лавина е с по-голяма дължина
 $\lambda_I > X_0$ (6-7 пъти). Добра дължина на адронен калориметър

е $(10 - 12)\lambda_I$, което гарантира, че 98% от енергията остава в калориметъра.

- адронната лавина е по-широка

$$p_{\perp}^h > p_{\perp}^{e.m.}$$

- адронната лавина има и EM компонента (заради π_0)

$$\pi_0 \longrightarrow 2\gamma \longrightarrow EM \text{ showers}$$

$$E_{e.m.} = 0.11 \ln E_0 \text{ [GeV]} \quad (3.25)$$

- невидима енергия

Нека разгледаме реакцията $n + A \longrightarrow p + B$

Част от енергията, която носят неутроните отива в кинетична енергия на протоните, а останалата част отива в т.н. енергия на връзката (binding energy). Тъй като се осъществяват ядрени превръщания и самите процеси стават вече в самите ядра, то тази енергия на свързване (ЕСв) е доста голяма. Ние можем да броим протоните и да отчетем цялата енергия, която те носят, докато ЕСв не може да се детектира и остава загубена за експериментатора. Точно тази енергия се нарича невидима.

11.4 Взаимодействия на заредени частици

11.4.1 Кинематика

Законът за запазване на 4-импулса позволява да се изчисли максималната енергия отнесена за частица с маса на покой m_0 и скорост $v = \beta c$ към електрон, който първоначално е бил в покой:

$$E_{kin}^{max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma \left(\frac{m_e}{m_0}\right)^2} = \frac{2m_e p^2}{m_0^2 + m_e^2 + 2m_e E/c^2}, \quad (4.26)$$

тук $\gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$ е Лоренцовия фактор, E е пълната енергия и p е импулсът на частица. За нискоенергетични частици по-тежки отколкото електрон, т.е. ($2\gamma \frac{m_e}{m_0} \ll 1$; $\frac{m_e}{m_0} \ll 1$), (4.26) се свежда до:

$$E_{kin}^{max} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2. \quad (4.27)$$

За релативистични частици ($E_{kin} \approx E$; $pc \approx E$) имаме:

$$E^{max} = \frac{E^2}{E + m_0^2 c^2 / 2m_e}. \quad (4.28)$$

Например, при ($\mu - e$) сблъсък максималната предадена енергия е:

$$E = \frac{E}{E + 11} \quad EinGeV \quad (4.29)$$

Показваща, че при екстремалния релативистичен случай, пълната енергия може да бъде предадена на електрона. Ако $m_0 = m_e$, (4.26) се модифицира до:

$$E_{kin}^{max} = \frac{p^2}{m_e + E/c^2} = \frac{E - m_e c^2}{E + m_e c^2} = E - m_e c^2. \quad (4.30)$$

11.5 Разсейване

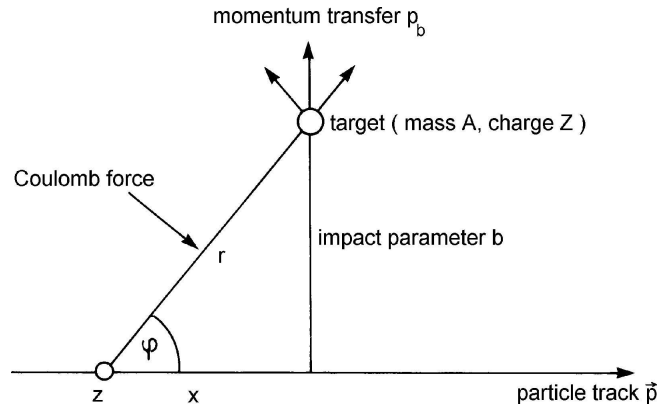
11.5.1 Разсейване на Ръдърфорд

Разсейване на частица със заряд z от мишена с ядрен заряд Z е извършена чрез електромагнитно взаимодействие (фиг. 11.5.1) Кулоновата сила между налитащата частица и мишената е:

$$\vec{F} = \frac{z \cdot e \cdot Z \cdot e \vec{r}}{r^2 r} \quad (5.31)$$

Поради симетрични съображения предадения импулс е само перпендикулярен по \vec{p} по импакт (impact) параметъра b :

$$P_b = \int_{-\infty}^{+\infty} F_b dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z \cdot Z \cdot e^2 b dx}{r^2 r \beta c}, \quad (5.32)$$



Фигура 11.8: Схематично представяне на разсейване на Ръдърфорд

с $b = r \sin \phi$, $dt = dx/v$, а F_b е перпендикулярно на p .

$$p_b = \frac{z \cdot Z \cdot e^2}{\beta c b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{z \cdot Z \cdot e^2}{\beta c b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x/b)}{(1 + (x/b)^2)^{3/2}} \quad (5.33)$$

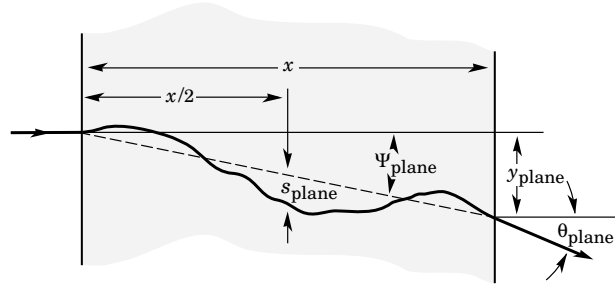
$$p_b = \frac{2z \cdot Z \cdot e^2}{\beta c b} = \frac{2r_e m_e c}{b \beta} z \cdot Z \quad (5.34)$$

Където r_e е класическия електронен радиус. Това разглеждане води до ъгъла на разсейване:

$$\Theta = \frac{p_b}{p} = \frac{2z \cdot Z \cdot e^2}{\beta c p} \cdot \frac{1}{b} \quad (5.35)$$

Диференциалното сечение на този процес се дава чрез известната формула на Ръдърфорд:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2 Z^2 r_e^2}{4} \frac{1}{\sin^4 \Theta/2} \quad (5.36)$$



Фигура 11.9: Величини използвани за описване на многократно Кулоново разсейване.

11.6 Многократно разсейване

От уравнение (5.36) се вижда, че средният ъгъл на разсейване $\langle \Theta \rangle$ е нула. За да се характеризират различните степени на свобода на разсейване, когато частицата преминава през поглътител, се използва така наречения "среден ъгъл на разсейване" $\sqrt{\langle \Theta^2 \rangle}$. Проекцията на ъгловото разпределение на ъглите на разсейване в този смисъл води до среден ъгъл на разсейване : с в и - дебелината на разсейващата среда измерена в радиационна дължина. Средният ъгъл на разсейване в единици радиационна дължина:

$$\sqrt{\langle \Theta^2 \rangle} = \Theta_{plane} = \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta p} z \sqrt{\frac{x}{X_0}} \left\{ 1 + 0.038 \ln \left(\frac{x}{X_0} \right) \right\} \quad (6.37)$$

Тук импулсът p е в MeV, а дебелината на абсорбера x е в радиационни дължини. X_0 е радиационната дължина на вълната.

В триизмерието (3D):

$$\Theta_{space} = \sqrt{2} \Theta_{plane} = \sqrt{2} \Theta_0 \quad (6.38)$$

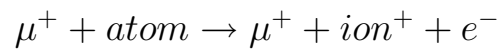
Проектираното ъглово разпределение е Гаусово и има вида :

$$P(\Theta) d\Theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Theta_0} \exp \left\{ -\frac{\Theta^2}{2\Theta_0^2} \right\} d\Theta \quad (6.39)$$

11.7 Енергетични загуби на заредени частици във вещество

11.7.1 Йонизационни загуби

Механизмът на йонизационни загуби представлява разсейване на заредени частици от Кулоновското поле на средата, през която те минават, при което средата се йонизира и свободни електрони остават в наличност. Този механизъм може да се представи схематично във вида :



Предаденият импулс на електрона има вида (1.7), а енергията предадена на електрона в класическо приближение е :

$$\varepsilon = \frac{p_b^2}{2m_e} = \frac{2r_e^2 m_e z^2}{\beta^2 b^2} \quad (7.40)$$

Вероятността за взаимодействие на $(\frac{g}{cm^2})$ от сечението на разсейване σ е :

$$\phi(g^{-1}cm^2) = \frac{N}{A} \sigma [cm^2/atom] \quad (7.41)$$

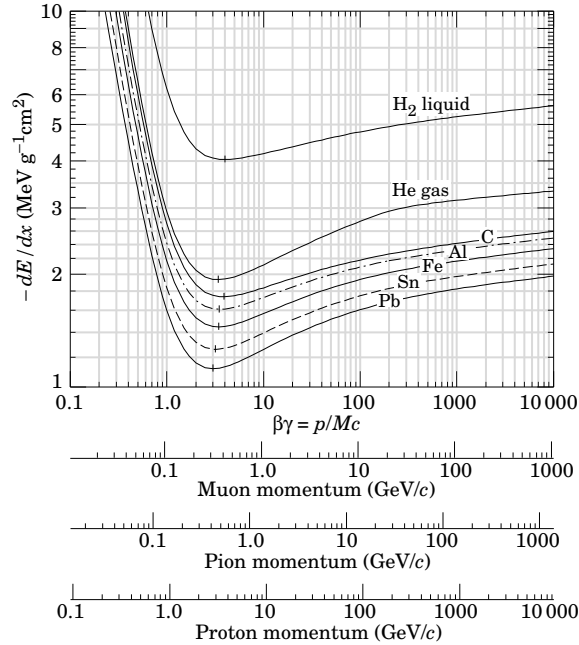
където N е числото на Авогадро.

Диференциалното сечение заредена частица да удари електрон във венцеобразната област с радиуси b и $b+db$, при което да предаде енергия на електрона между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$ е :

$$\phi(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{N}{A} 2\pi b db Z \quad (7.42)$$

където Z е броят на електроните за всеки “атом-мишена”. Като изразим от (1.13) b^2 и диференцираме по ε , получаваме :

$$2 |bdb| = \frac{2r_e^2 m_e z^2}{\beta^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}$$



Фигура 11.10: Вероятността за средна енергетична загуба във флуид (мехурчестата камера)- водород, хелий, алуминиум, желязо, калай и олово. Радиационните ефекти за към мюони и пиони не са влюченитук. Те стават значими за мюони в желязо при $\beta_\gamma \gtrsim 1000$, и при ниски импулси за мюоните в поглътители с голямо Z .

Като заместим горният израз в (1.15), за диференциалното сечение получаваме

$$\phi(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2\pi r_e^2 m_e N Z}{\beta^2} \frac{z^2 d\varepsilon}{A \varepsilon^2} \quad (7.43)$$

[h] което показва, че енергетичния спектър на δ - електроните (или още избитите от заредената частица електрони) имат зависимост от енергията $\frac{1}{\varepsilon^2}$.

Йонизационните загуби сега се изчисляват от (1.15) с интегриране по всички възможни прицелни параметри :

$$\frac{-dE}{dx} = \int_0^\infty \phi(\varepsilon)\varepsilon d\varepsilon = \int_0^\infty \frac{N}{A} 2\pi Z \varepsilon b db$$

Следователно

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi \frac{ZN}{A} \frac{2r_e^2 m_e z^2}{\beta^2} \int_0^\infty \frac{db}{b} \quad (7.44)$$

Класическото пресмятане на (11.7.1) води до разходящ интеграл както при

$b = 0$ така и при $b = \infty$. Сега ще разгледаме двете граници :

- $b = 0$

Апроксимацията на “големината на електрона - мишена” с половината от дължината на вълната на de Broglie дава минималния приселен параметър

$$b_{min} = \frac{h}{2p} = \frac{h}{2\gamma m_e \beta} \quad (7.45)$$

- $b = \infty$

Ако времето τ_R за завъртане на един електрон около “атома - мишена” стане по - малко отколкото времето за взаимодействие τ_i между заредената частица и “атома - мишена”, то нормално падаща частица “вижда” повече или по - малко неутрален атом.

$$\tau_i = \frac{b_{max}}{v} \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$\tau_R = \frac{1}{v_Z Z} = \frac{h}{I}$$

където I е средната енергия на възбуждане на атом от средата, която може да се запише за елементи по - тежки от сярата във вида $I = 10eVZ$.

От условието заредената частица да “вижда” неутрален атом $\Rightarrow \tau_R = \tau_i$. Следователно

$$b_{max} = \frac{\gamma h \beta}{I} \quad (7.46)$$

Като решим интеграла ((11.7.1)), използвайки гореспоменатите отношения се получава израза

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi \frac{Z}{A} N \frac{2r_e^2 m_e z^2}{\beta^2} \ln \frac{2\gamma^2 \beta^2 m_e}{I} \quad (7.47)$$

Тъй като за дългодистантните взаимодействия Кулоновото поле се екранира от материята, намираща се между разглежданите обекти, то (1.20) се трансформира до :

$$-\frac{dE}{dx} = kz^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \frac{2\gamma^2 \beta^2 m_e}{I} - \eta \right] \quad (7.48)$$

където η е екраниращият параметър, а $k = 4\pi N r_e^2 m_e c^2$. Така точното третиране на специфичните йонизационни загуби за тежки йонизиращи частици води до известната формула на Bethe - Bloch :

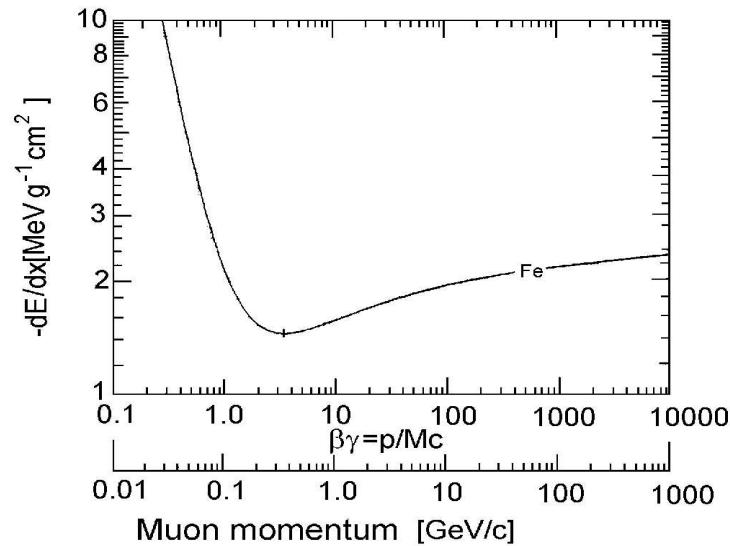
$$-\frac{dE}{dx} = kz^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2m_e \gamma^2 \beta^2}{I^2} E_{kin}^{max} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right] \quad (7.49)$$

Лесно се вижда, че (7.49) при $\frac{\gamma m_e}{m_0} \ll 1$ и $\beta^2 - \frac{\delta}{2} = \eta$ се редуцира до (7.48).

От графиката на фиг.11.7.1 се вижда, че за $\beta\gamma$ в интервала $\beta\gamma < 3$ функцията на специфичните йонизационни загуби спада като $\frac{1}{\beta^2}$, докато достигне минимум на йонизация за $3 \leq \beta\gamma \leq 4$. Заради члена $\ln \gamma$ йонизационните загуби на енергия нарастват отново, докато достигнат надищане (или т.н. плато на Fermi). Това се нарича “density effect” и се дължи на факта, че при високи енергии средата се поляризира, което силно намалява влиянието на далечните взаимодействия (колизии). Членът $\frac{\delta}{2}$ се нарича density correction и има вида :

$$\frac{\delta}{2} = \ln \frac{\hbar\omega_p}{I} + \ln \beta\gamma - \frac{1}{2} \quad (7.50)$$

където $\hbar\omega_p = \sqrt{4\pi N_e r_e^3 m_e} / \alpha$ е енергия на плазмата, а N_e е електронната плътност на абсорбиращия материал.



Фигура 11.11: Енергетична загуба на мюони в желязо.

11.7.2 Разпределение на Ландау

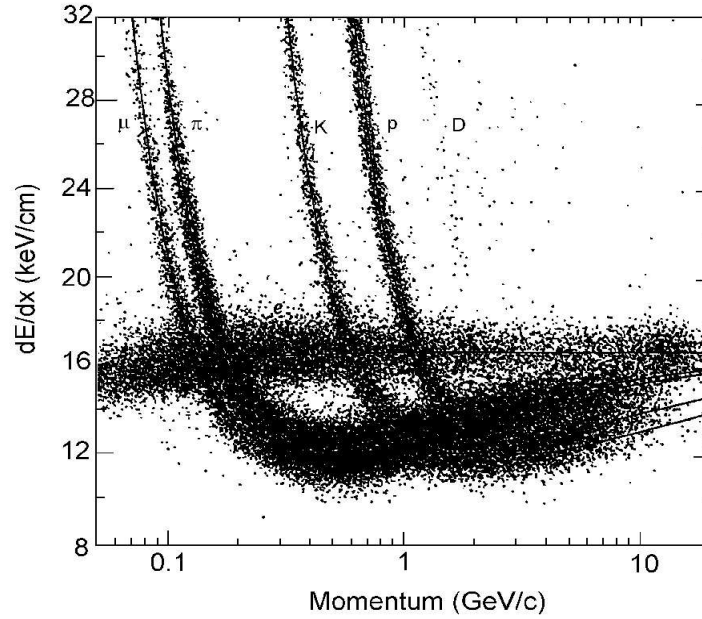
Формулата на Bethe-Bloch описва специфичната йонизационна загуба на енергия на заредени частици. Флуктуацията около средната стойност на загубената енергия се описва с едно асиметрично разпределение, наречено Landau разпределение.

Вероятността $\phi(\varepsilon)d\varepsilon$ заредена частица със заряд единица да загуби енергия между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$ за единица дължина на абсорбер се дава с (1.16) и може да се запише във вида:

$$\phi(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2\pi Ne^4 Z}{m_e v^2} \frac{1}{A \varepsilon^2} \quad (7.51)$$

Нека дефинираме

$$\xi = \frac{2\pi Ne^4 Z}{m_e v^2} \frac{1}{A} x \quad (7.52)$$



Фигура 11.12: Измерена йонизационна енергетична загуба на електрони, мюони, пиони, каони, протони и деутрони в PEP4/9-TPC

където x е повърхнинната плътност на абсорбера [g/cm^3]

Така (1.24) може да се представи като:

$$\phi(\varepsilon)d\varepsilon = \xi(x)\frac{1}{x\varepsilon^2} \quad (7.53)$$

За ξ [KeV] можем да запишем

$$\xi = \frac{0.1536 Z}{\beta^2} \frac{x}{A} \quad (7.54)$$

Като пример ще посочим абсорбер Ar, $\beta = 1$, при което $\xi = 0.123 KeV$.

Сега да дефинираме

$$f(x, \Delta) = \frac{1}{\xi} \omega(\lambda) \quad (7.55)$$

като вероятността заредена частица да изгуби енергия Δ , преминавайки през абсорбер с дебелина x . λ се дефинира като нормализи-

рано отклонение от най-вероятната йонизационна загуба $\Delta^{m.p.}$.

$$\lambda = \frac{\Delta - \Delta^{m.p.}}{\xi} \quad (7.56)$$

Най - вероятната йонизационна загуба се изчислява да бъде :

$$\Delta^{m.p.} = \xi \left\{ \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 \xi}{I^2} - \beta^2 + 1 - \gamma_E \right\} \quad (7.57)$$

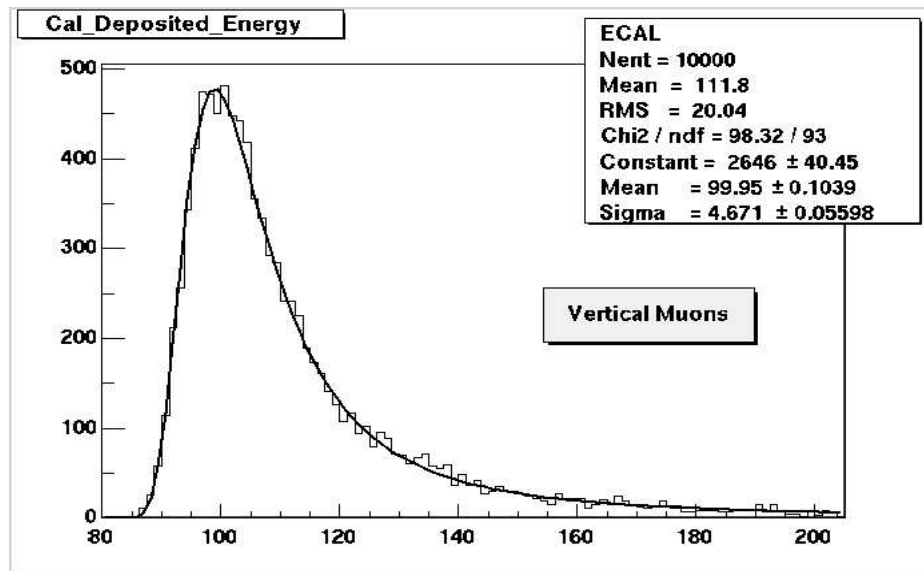
където $\gamma_E = 0.577\dots$ е константата на Ойлер.

$$\omega(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-u \ln u - \lambda u} \sin \pi u du \quad (7.58)$$

което може да бъде априксимирано с израза:

$$\Omega(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\lambda + e^{-\lambda})\right\} \quad (7.59)$$

Асиметричността на Ландау разпределението става очевидна за тънки абсорбери. За такива с по - голяма дебелина разпределението става по - симетрично, като за тънки абсорбери се прилага определена процедура по орязване (truncation).



Фигура 11.13: Разпределение на Ландау, където данните са взети от калориметър.

Глава 12

Детектори на високоенергетични частици

12.1 Трекови детектори

12.1.1 Измерване на импулса на заредени частици

$$p_t = qB\rho \quad (1.1)$$

$$p_t \text{ [GeV/c]} = 0.3B\rho \text{ [T.m]} \quad (1.2)$$

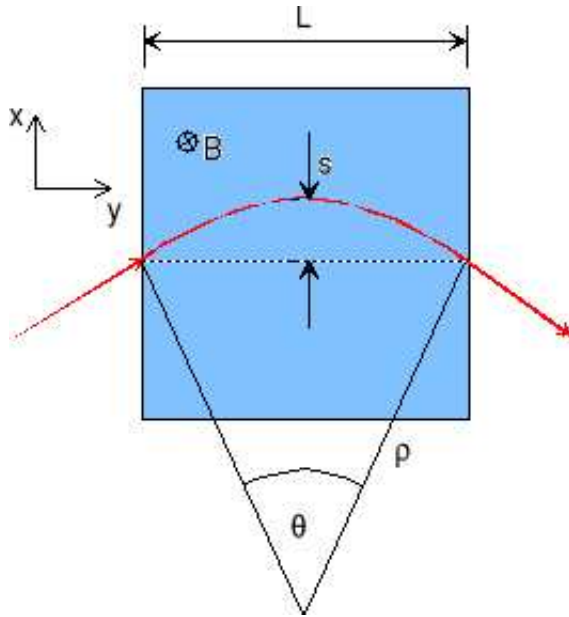
$$\frac{L}{2\rho} = \sin \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \theta \approx \frac{0.3LB}{p_t} \quad (1.3)$$

$$s = \rho(1 - \cos \frac{\theta}{2}) \approx \rho \frac{\theta^2}{8} \approx \frac{0.3L^2B}{8p_t} \quad (1.4)$$

За три измервания

$$s = x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2} \quad (1.5)$$



Фигура 12.1:

$$\left(\frac{\sigma(p_t)}{p_t}\right)_{meas.} = \frac{\sigma(s)}{s} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\sigma(x)8p_t}{0.3BL^2} \quad (1.6)$$

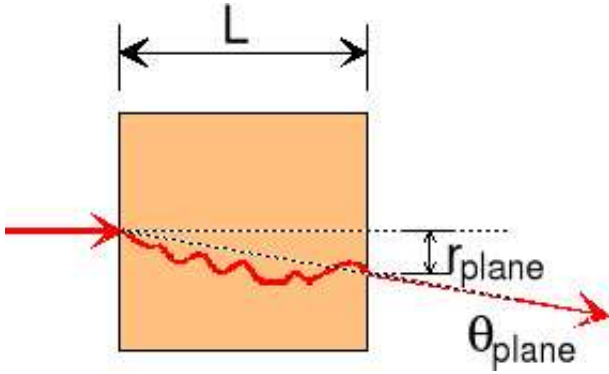
За N еквиливантни измервания

$$\left(\frac{\sigma(p_t)}{p_t}\right)_{meas.} = \frac{\sigma(x)p_t}{0.3BL^2} \sqrt{\frac{720}{N+4}} \quad (1.7)$$

Пример : За $p_t = 1 \text{ GeV}/c$, $L = 1 \text{ m}$, $B = 1 \text{ T}$, $N = 10 \Rightarrow \sigma(x) = 200 \text{ } \mu\text{m}$, а

$$\left(\frac{\sigma(p_t)}{p_t}\right)_{meas.} \approx 0.5\%, \quad (s = 3.75 \text{ cm})$$

12.1.2 Многократно разсейване



Фигура 12.2:

$$\Delta p^{M.S.} = p \sin \theta_{RMS}^{plane} \approx p \cdot 0.0136 \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{L}{X_0}} \quad (1.8)$$

$$\left(\frac{\sigma(p)}{p_t}\right)^{M.S.} = 0.045 \frac{1}{B\sqrt{LX_0}} \quad (1.9)$$

Както се вижда (2.9) не зависи от p .

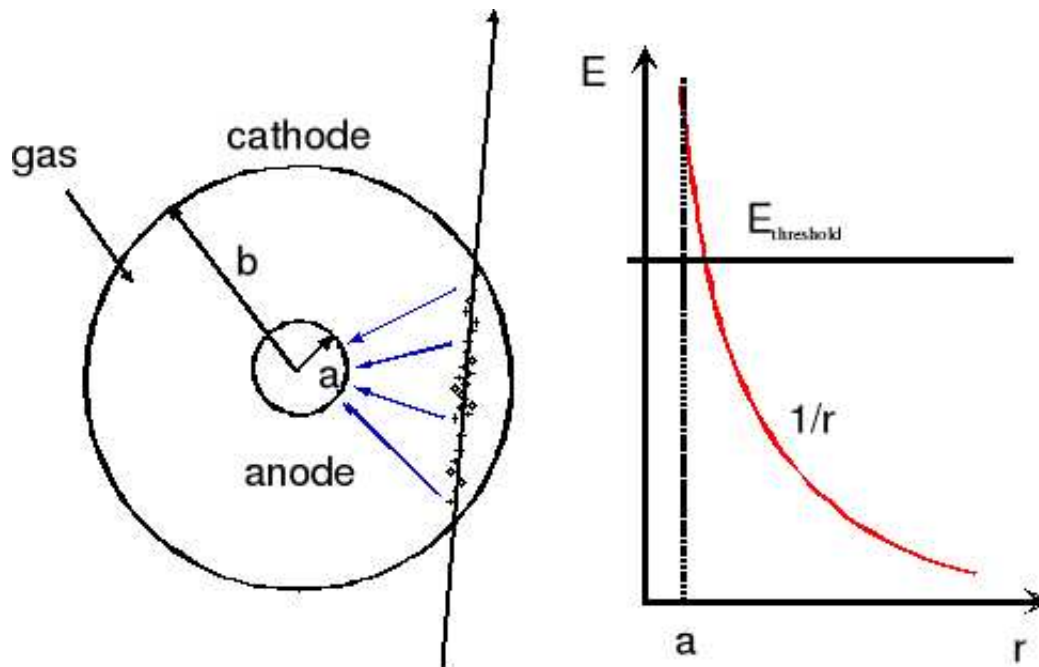
Пример : За Ar ($X_0 = 110 \text{ m}$), $L = 1 \text{ m}$, $B = 1T \Rightarrow$

$$\left(\frac{\sigma(p)}{p_t}\right)^{M.S.} \approx 0.5\%$$

12.2 Газови трекови детектори

12.2.1 Йонизация в газове

- Първична йонизация (primary ionization)
- Пълна йонизация (total ionization)



Фигура 12.3: Зависимост на електричното поле от разстоянието на преминаване на йонизиращата частица до анода на пропорционалния брояч: $E(r) \propto 1/r$

$$n_{total} = \frac{\Delta E}{W_i} = \frac{\frac{dE}{dx} \Delta x}{W_i}, \quad (2.10)$$

където ΔE е пълната йонизационна загуба, W_i е ефективната средна загуба на енергия на един акт на йонизация т.е. за създаване на двойка електрон - йон (30 eV). Трябва да се отбележи, че n_{total} е от порядъка на три - четири пъти $n_{primary}$.

Поасоново разпределение :

$$P(m) = \frac{(\bar{n})^m \exp -\bar{n}}{m!} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{det} = 1 - P(0) = 1 - \exp -\bar{n} \quad (2.12)$$

Пример : $Ar \quad d = 1 \text{ mm}, \rightarrow n_{primary} = 2.5 \Rightarrow \varepsilon_{det} = 0.92$, а n_{tot} има големи непоасоновы флуктоации (Ландау опашка).

12.2.2 Газово усилване

$$E(r) = \frac{CV_0}{2\pi\varepsilon} \frac{1}{r} \quad (2.13)$$

$$V(r) = \frac{CV_0}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r}{a} \quad (2.14)$$

където с C сме отбелязали капацитет на единица дължина.

- Ударна йонизация

$$n = n_0 \exp \alpha(E)x \quad (2.15)$$

$$n = n_0 \exp \alpha(r)x, \quad (2.16)$$

където α се нарича първи коефициент на Таузенд и има размерност брой електрон - йонни двойки на сантиметър. Този коефициент може да се изрази и чрез средния свободен пробег λ : Тъй като коефициента на Таузенд е зависим от плътността на веществото, то за

желаното от експериментатора газово усилване е важен избор на газ. Ясно е, че работата с плътни инертни газове дава най-добри резултати. Трябва да се отбележи, че основния механизъм на загуба на енергия е чрез йонизация. Разреждането на благородни газове се осъществява единствено чрез излъчване на фотони, което се явява проблем, тъй като енергията на отделения γ квант е над йонизационния праг за метали (такива са стените на детектора) и е в състояние да предизвика фотоефект. Например за Ar тази енергия е 11.6 eV, а йонизационния праг за Cu е 7.7 eV. Вероятността, избитите от фотонното лъчение електрони да попаднат в детектора е голяма, затова се вземат специални мерки. Проблемът успешно се решава като към газа се прибавят полиатомни газове, които поглъщат γ квантите в широк енергетичен диапазон (абсорбират се много вибрационни и ротационни нива). Тези добавки се наричат quenchers.

12.2.3 Формиране на сигнала

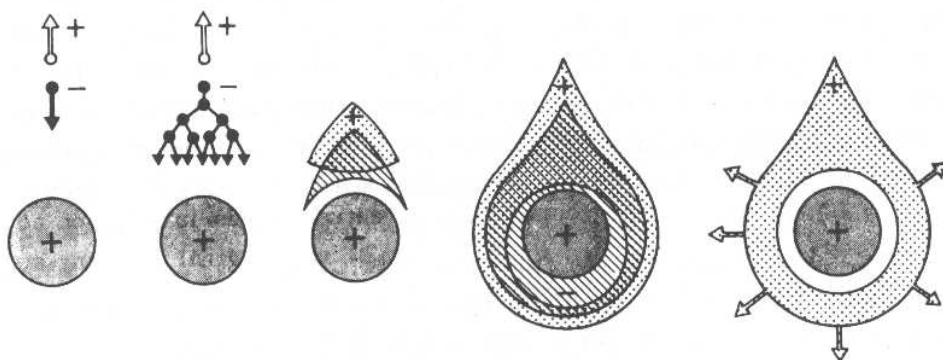
Областта за формиране на лавината е в рамките на няколко радиуса на нишката и времена по-малки от 1 ns. Сигнал се индуцира както на анода така и на катода, поради придвижването на електроните и йоните.

$$dv = \frac{Q}{lCV_0} \frac{dV}{dr} dr \quad (2.17)$$

Разстоянието на електроните до анода е малко (няколко микрона), затова приносът им към детектирания сигнал е много слаб. Индуцирания заряд е :

$$Q_{s,el} = N_{qe} \frac{\ln(\frac{r}{a})}{\ln(\frac{b}{a})} \quad (2.18)$$

$$Q_{s,ions} = N_{qe} \frac{\ln(\frac{b}{r})}{\ln(\frac{b}{a})} \quad (2.19)$$



Фигура 12.4: Развитие на лавината във времето в близост до анода а. - първичен електрон се движи към анода; б. - електронът придобива енергия в електричното поле и йонизира атомите; в - електронният и йонният облак се придвижват в противоположни направления; г,д. - електронният облак се придвижва към анода, а йонният се отдалечава от него в радиално направление

В началото токът расте, обусловен от натрупването на електроните на анода, след което започва да пада, тъй като e^- са се изчерпили. Отново настъпва нарастване на тока, обусловено от достигане на йоните да катода. Както вече отбелязахме приносът на йоните е много по - голям :

$$\frac{Q_{s,el}}{Q_{s,ions}} = \frac{\ln(\frac{r}{a})}{\ln(\frac{b}{r})} < \frac{\ln 2}{\ln 1000} \approx 0.1$$

$$\Rightarrow i_s = Nq_e\mu(E)\frac{V}{(\ln(\frac{b}{a}))^2 r^2} \quad (2.20)$$

12.2.4 Режими на работа

- Йонизационен режим

В този режим на работа се осъществява пълно събиране на заряд, но не настъпва умножение.

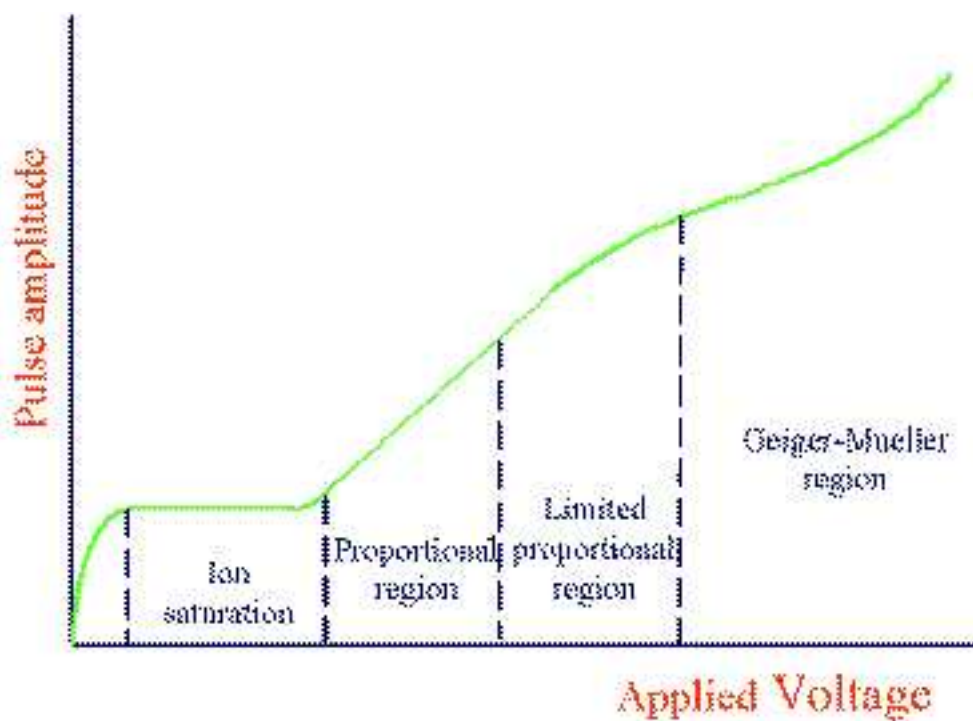
- **Пропорционален режим**
В тази област, над определен праг на напрежение започва умножение на заряда, при което детектираният сигнал е пропорционален на получения заряд от йонизация. Затова този е подходящият режим за измервания на специфичната йонизационна загуба на енергия (dE/dx). Газовото усилване в пропорционалния режим на работа е $10^4 - 10^5$, при условие че се погасяват вторичните лавини, които се образуват.
- **Ограничена пропорционалност \rightarrow Насищане \rightarrow Стримерен режим**
Това е област на силна фотоемисия и образуване на вторични лавини, поради което се изискват силни погасители (quencher) или пулсиращо високо напрежение. Усилването е голямо (10^{10}), сигналът е широк, което обуславя слабите изисквания към електрониката.
- **Гайгеров режим**
В този режим се осъществява активно излъчване на γ кванти, при което се губи пропорционалността от първоначално попадналото лъчение.

12.2.5 Дрейф на електроните в електрично поле

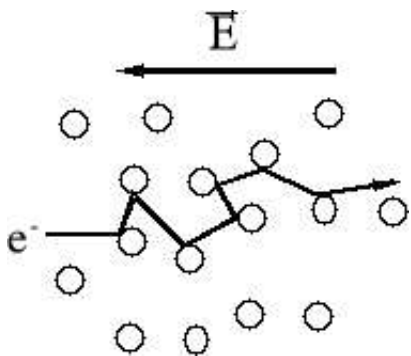
$$v_d = \frac{2qE \lambda_e}{3m u} \quad (2.21)$$

$$v_d = \frac{2 q E 1.38 \lambda_e}{3 m v} = 0.92 \frac{q E \lambda_e}{m v}, \quad (2.22)$$

където $v = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$ е скоростта при Максвелово разпределение, а $u = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$ е топлинната скорост. Нека означим с τ средното време



Фигура 12.5: Режи на работа



Фигура 12.6: Дрейф на електроните в електрично поле

между два удара :

$$\tau = \left\langle \frac{\lambda_e}{u} \right\rangle \quad (2.23)$$

При измервания с дрейфови камери и всякакви други газови камери едно от най - важните условия е да се осигури постоянна дрейфова скорост $v_d = const$. Условие енергията, придобита в Е да е равна на енергията, загубена при ударите е :

$$qE v_d \tau = \Delta(\varepsilon) \varepsilon, \quad (2.24)$$

където $\Delta(\varepsilon)$ е частта, загубена при един удар. Ако предположим монохроматична скорост

$$\Rightarrow qE v_d = \Delta(\varepsilon) \varepsilon \frac{u}{\lambda_e} \approx \frac{1}{2} \Delta(\varepsilon) \frac{m u^3}{\lambda_e}, \quad (2.25)$$

след което заместим u в горната формула с израза

$$u = \frac{2 q E \lambda_e}{3 m v_d}, \quad (2.26)$$

за дрейфовата скорост окончателно ще получим съотношението :

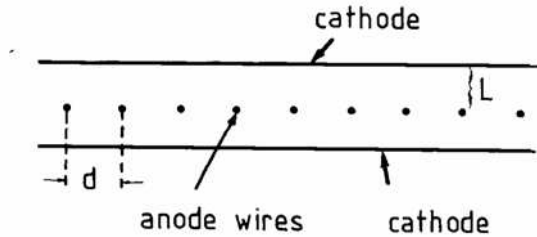
$$v_d \sim \left[\sqrt{\frac{\Delta(\varepsilon)}{2}} \frac{q E}{m} \lambda_e \right]^{1/2} \quad (2.27)$$

Ако параметризираме

$$\Delta(\varepsilon) \sim \varepsilon^m, \quad \lambda_e \sim \varepsilon^{-n},$$

то дрейфовата скорост ще придобие вида :

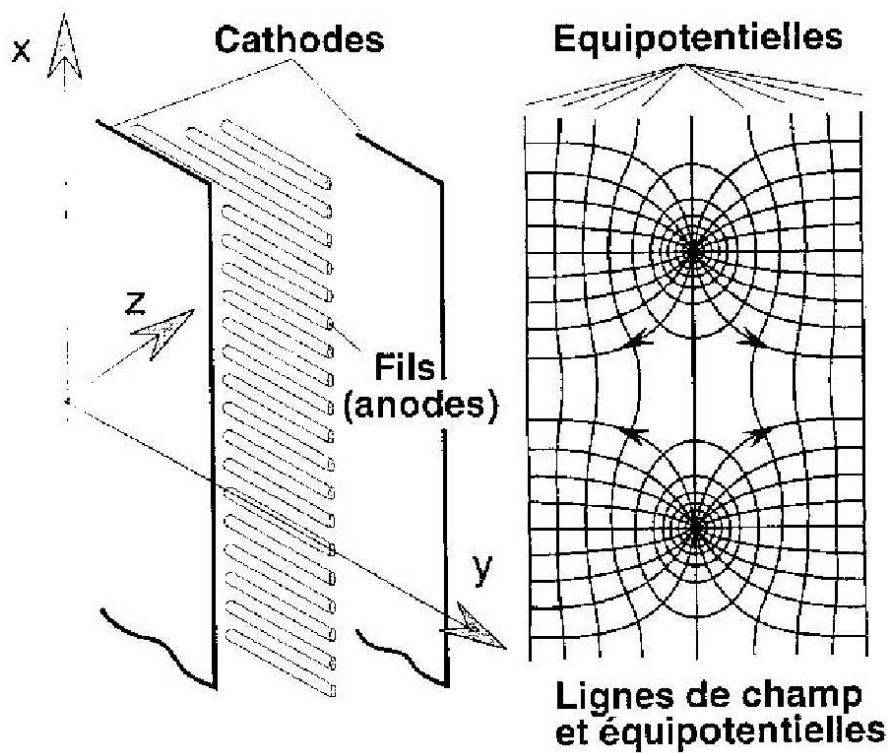
$$v_d \sim \varepsilon^{(m+1)/(m+2n+1)} \quad (2.28)$$



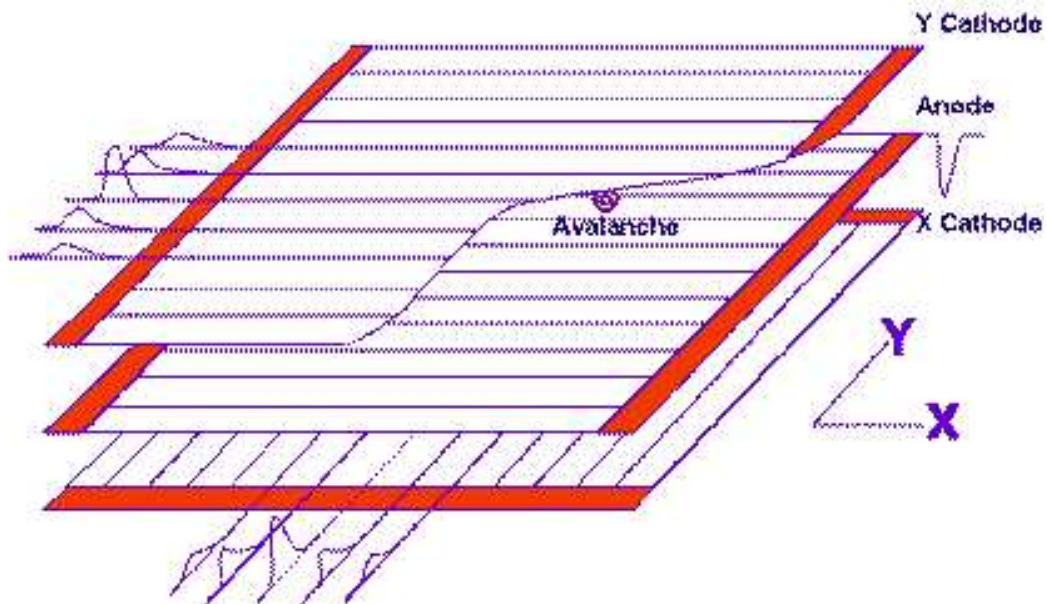
Фигура 12.7: Многонишкова пропорционална камера

12.3 Многонишкова пропорционална камера

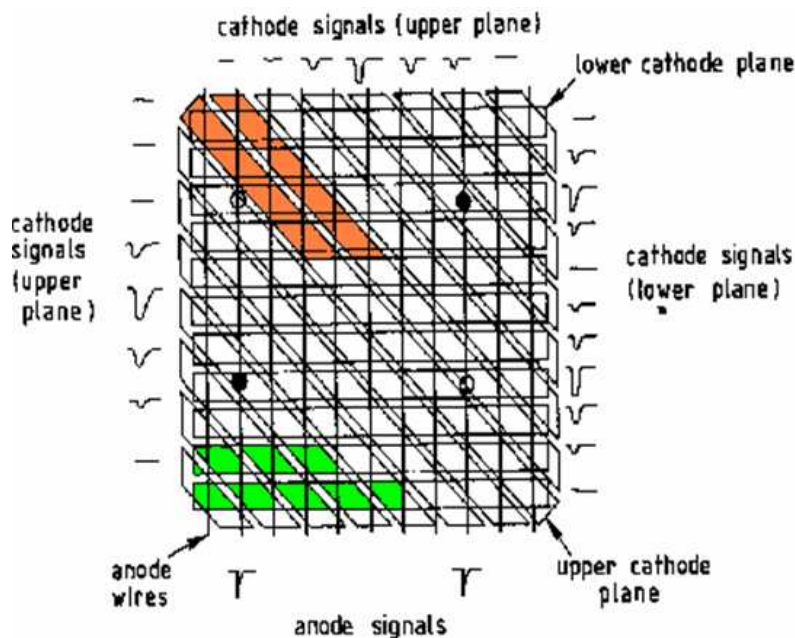
На горната фигура е изобразена схематично многонишкова пропорционална камера. Много на брой тънки нишки са опънати паралелно една на друга, като всяка от тях работи като пропорционален брояч. Между две катодни равнини е разположена равнина с анодни нишки с по-висок потенциал от анодните. Ако двете катодни равнини са разположени ортогонално, можем да извлечем информация за две от координатите на частицата, отчитайки сигналите от двете катодни равнини. Разстоянието между анодната жичка и катода е $L = 5\text{mm}$, между две анодни жички е $d = 1\text{mm}$, а самият анод има размери $a_{\text{wire}} = 20\mu\text{m}$. Важен параметър на многонишковата пропорционална камера е неопределеността в пространственото разпределение, което от нормално разпределение се извежда, че е $\sigma_x = \frac{d}{\sqrt{12}}$, като за $d = 1\text{mm}$, $\sigma_x = 300\mu\text{m}$. Възможно е да се получи нееднозначност при отчитане на сработилите нишки на камерата. За да се избегне грешна идентификация на сигнала се поставят допълнителни равнини от нишки, разположени под ъгъл спрямо първите.



Фигура 12.8: Многонишкова пропорционална камера - конструкция (катодни повърхности и анодни нишки) и линии на електрическото поле в близост до анодите



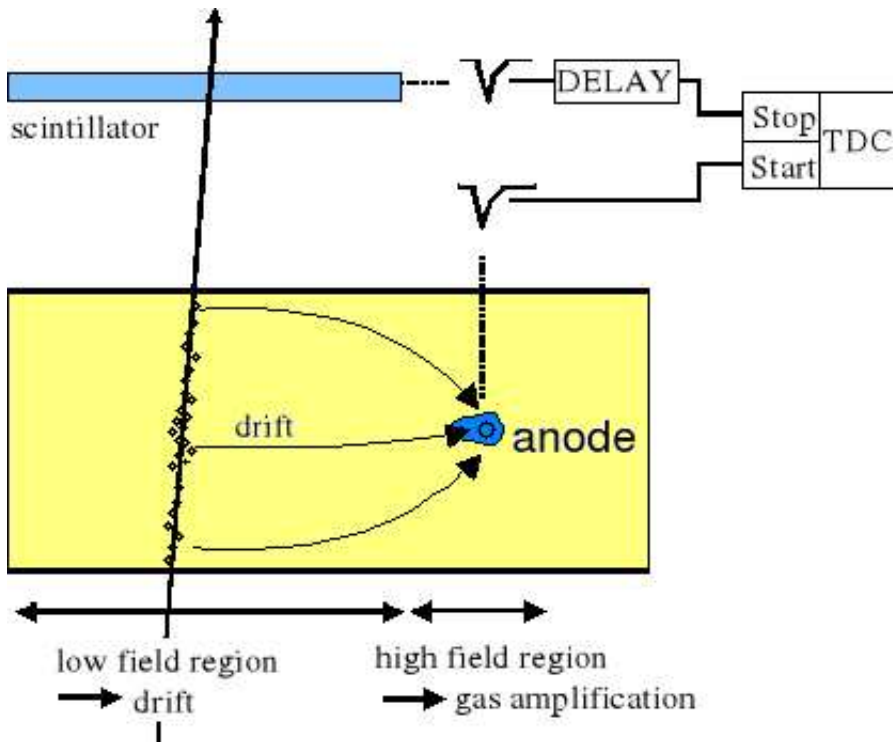
Фигура 12.9: Структура на двумерна многонишкова пропорционална камера. Лавината, която достига анода, индуцира сигнал с противоположна полярност на двете ортогонални катодни повърхности. Двата катодни сигнала се използват за определяне на X и Y координатите на преминалата частица



Фигура 12.10: допълнителни равнини от нишки са разположени под 45 градуса

Работните газове за пропорционалния режим са инертните газове аргон или ксенон с добавки CO_2 , CH_4 , изобутан, етилен или етан. С тези смеси е възможно да се постигне газово усилване 10^5 преди да се получи пробив. Газовото усилване осигурява достатъчен брой избити електрони (повече от милион) на преминала частица, което позволява детектиране на единични фотони с достатъчно добро времево разрешение от порядъка на няколко наносекунди и добра чувствителност към определяне на пространствените координати (няколкостотин микрометра). Ефективността за регистрация с такава камера зависи от високото напрежение. Предимствата на тези камери са:

1. Може да бъде направена с произволен размер или форма
2. Ниско ниво на шума



Фигура 12.11: Дрейфова камера

3. Пренебрежимо малко мъртво време
4. Възможно е едновременното определяне на енергията на фотон и неговата позиция.

Недостатък е, че при ъгли на налитане 90 градуса към нормалата не могат да се определят пространствените координати на частицата.

12.4 Дрейфови камери

Работата на дрейфовите камери се базира на наблюдението, че разликата във времето на преминаването на частицата и началото на

нарастване на предния фронт на анодния импулс е свързана с разстоянието между точката на първичната йонизация и анодната нишка. Тази разлика във времето основно се определя от времето за дрейф на електроните от момента на първична йонизация t_0 до момент време t_1 , когато те достигат областта на висок интензитет в близост до анодните нишки и инициират образуване на лавини. Координатата на преминаване на частицата относно анодната нишка може да се изрази по следния начин :

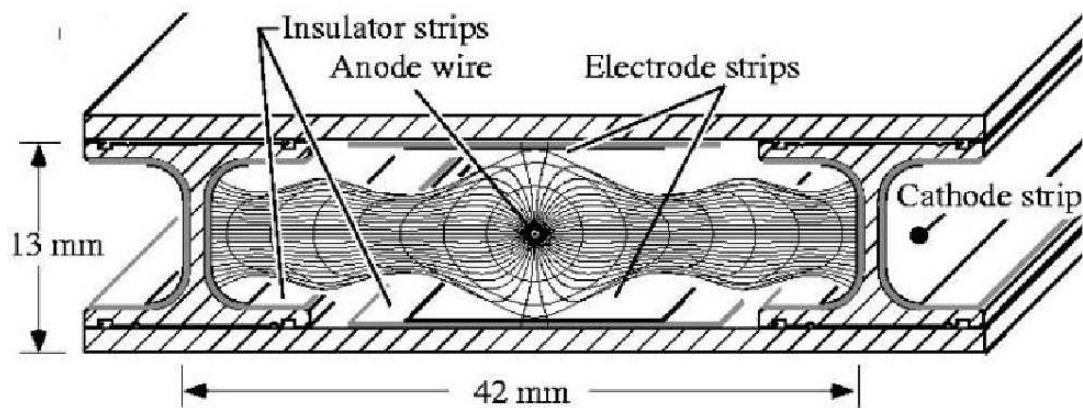
$$z = \int_{t_0}^{t_1} v_d(t) dt, \quad (4.29)$$

Ако нишките са разположени така, че е изпълнено условието скоростта на дрейф $V_d = \text{const}$ т.е. частиците не могат да получат от полето енергия, така че да предизвикат вторична йонизация.

$$z = v_d(t_1 - t_0) = v_d \Delta t \quad (4.30)$$

като измерването на координатата на преминалата частица се свежда единствено до определянето на времето на дрейф на електрона в газовия обем на камерата. Важна характеристика на тези камери е, че разстоянието, което изминава частица зависи линейно от времето за дрейф. Пълна линейност може да бъде постигната ако електрическото поле е постоянно в целия обем на дрейф. Това се постига с подходящ подбор на електроди. За поле, определящо скорост на дрейфа $v_d = 50 \text{mm}/\mu\text{m}$, неопределеността в пространственото разпределение е $\delta z = 200 \mu\text{m}$.

Пространственото разрешение за дрейфовите камери не е ограничено от размера на клетката и зависи от дифузията на частиците, от флуктоациите по пътя им, от електрониката.



Фигура 12.12: Дрейфова камера - анодна нишка с положителен потенциал (в центъра) и две потенциални нишки с отрицателен потенциал (в краищата на камерата), интензитетът на полето в областта на дрейф от анодната нишка към двете потенциални нишки се поддържа с постепенно изменение на потенциала на катодните нишки линейно от 0 в близост до анода до потенциала на потенциалните нишки в близост до тях

12.5 Камери със съпротивителна плоскост (RPC)

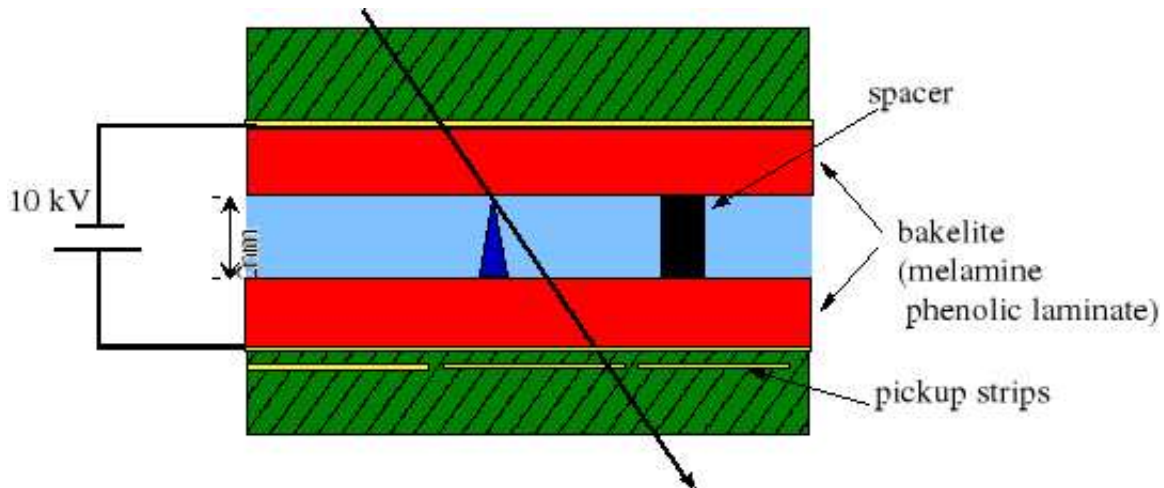
Камерите със съпротивителна плоскост са детектори на йонизиращи частици. По бързодействие са сравними със сцинтилаторите и притежават добра пространствена разделителна способност.

Конструктивно са изградени от две паралелни плоскости със сравнително голямо специфично съпротивление ($10^{10} - 10^{11} \Omega\text{cm}$), отстоящи на разстояние от порядъка на няколко милиметра една от друга и образуващи газова междина. От външната страна на плоскостите е нанесен проводящ графитен слой, който формира захранващите високоволтови електроди. Върху високоволтовите електроди е нанесен изолационен слой и върху него са намират сигналните електроди с правоъгълна форма, изработени най-често от медно или алуминиево фолио.

При преминаване на йонизиращо лъчение през активния обем на детектора в работния газ се образуват електрон-йонни двойки. Под действието на приложеното електрично поле ($\sim 45 - 50 \frac{kV}{cm}$) първичните електрони започват да дрейфат към анода, предизвиквайки вторична йонизация. Дрейфа на отрицателния заряд към анода индуцира токов импулс върху сигналните електроди. Тези камери работят в област на ограничена пропорционалност (стримерен режим). Върху strip се индуцира заряд, от горната страна са свързани зарядочувствителен предусилвател и дискриминатор. Големината на индуцирания заряд се дава от:

$$\langle q_e \rangle = \frac{k}{\eta d} \langle Q_e(d) \rangle = q_{el} n_0 \frac{k}{\eta d} \frac{\Lambda}{\eta + \Lambda} e^{\eta d}, \quad (5.31)$$

където q_{el} е елементарният електричен заряд, n_0 е средният брой първични двойки, Λ е броят първични йони, които се раждат на единица дължина (линейна плътност на двойките в газа), ϵ_r е относителната диелектрична константа на електрода, d е разстоянието



Фигура 12.13: Камера със съпротивителна плоскост

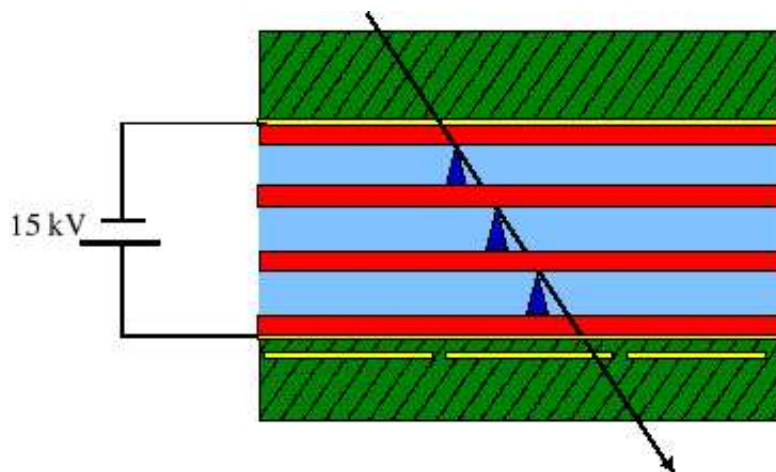
между електродите, s е дебелината на електродите, а η е ефективният коефициент на йонизация.

$$k = \frac{\left(\frac{\varepsilon_r d}{s}\right)}{\left(\frac{\varepsilon_r d}{s} + 2\right)} \quad (5.32)$$

Предимствата на тези камери са:

- проста конструкция
- големи повърхности
- отлични времеви характеристики
- добро пространствено разширение

- Бакелит $d = 2mm$
- специфично съпротивление на бакелита $\rho_b = 1 - 2 \cdot 10^{10} \Omega cm$

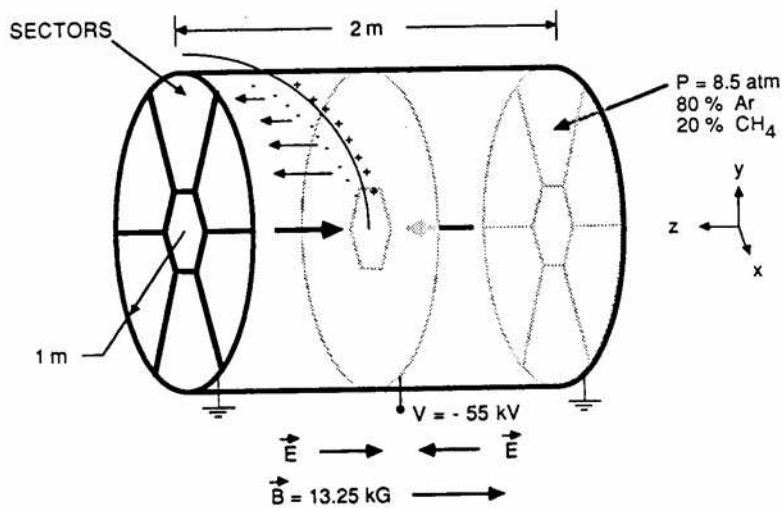


Фигура 12.14: Двойна камера със съпротивителна плоскост

- междина 2mm
- газ $95\% \text{ C}_2\text{H}_2\text{F}_4$, $5\% \text{ i} - \text{C}_2\text{H}_{10}$ (за гасене на разряди)
- работно напрежение HV $8 - 10 \text{ kV}$

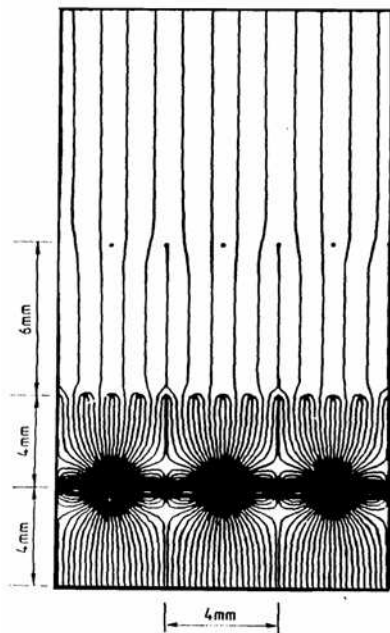
12.6 Време - проекционни камери (TPC - time projection chambers)

Това е детектор, който работи на принципа на дрейфова камера. Голям цилиндричен обем е пълен с газова смес (аргон -метан) под налягане 10 атмосфери. Двете затварящи повърхности представляват плоскости на многонишкови пропорционални камери. Всяка плоскост е разделена на 6 сектора, с ъгли на разтваряне 60° . Катодите са сегментирани. От тях се извлича информация за азимуталната ϕ -координата, а информация за r - координатата се извлича главно от положението на сработилите нишките. Ново в принципа на конструкция е, че електрическото дрейфово поле и магнитното поле са паралелни. По този начин силата на Лоренц, действаща на дрейфа-

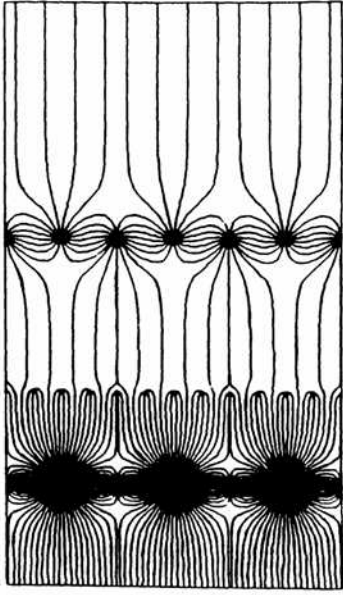


Фигура 12.15: Време - проекционна камера

щите електрони изчезва. Направлението на дрейфа е паралелно на полетата E и B. Електроните, образувани от йонизиращата частица се придвижват към една от двете затварящи повърхности. Изображението на трека се размазва заради разсейването на електроните от газа. Силното магнитно поле съществено намалява това разширение, принуждавайки електроните да се движат по спирали около линиите на магнитното поле. Вследствие на това коефициентът на напречна дифузия се намалява пропорционално на $1/(1 + \omega^2 \tau^2)$, където $\omega = eB/m$ е циклотронната честота на електроните, а τ - средното време между две стълновения. Пространствената реконструкция на трековете се прави по измерване на двумерните проекции в (r, ϕ) равнините на всяка от затварящите плоскости. Z - координатата може да бъде определена чрез измерване на времето за придвижването на електроните към нишките на затварящите повърхности. От измерване на времето за дрейф може да бъде определена z - коор-



Фигура 12.16: Дрейф на електроните - непосредствено преди катода е поставена решетка. Тя е свързана с тригер (бързи сцинтилатори). При преминаване на частица, тригера подава сигнал на решетката да разреши преминаването на електроните към катода. а. затворена решетка

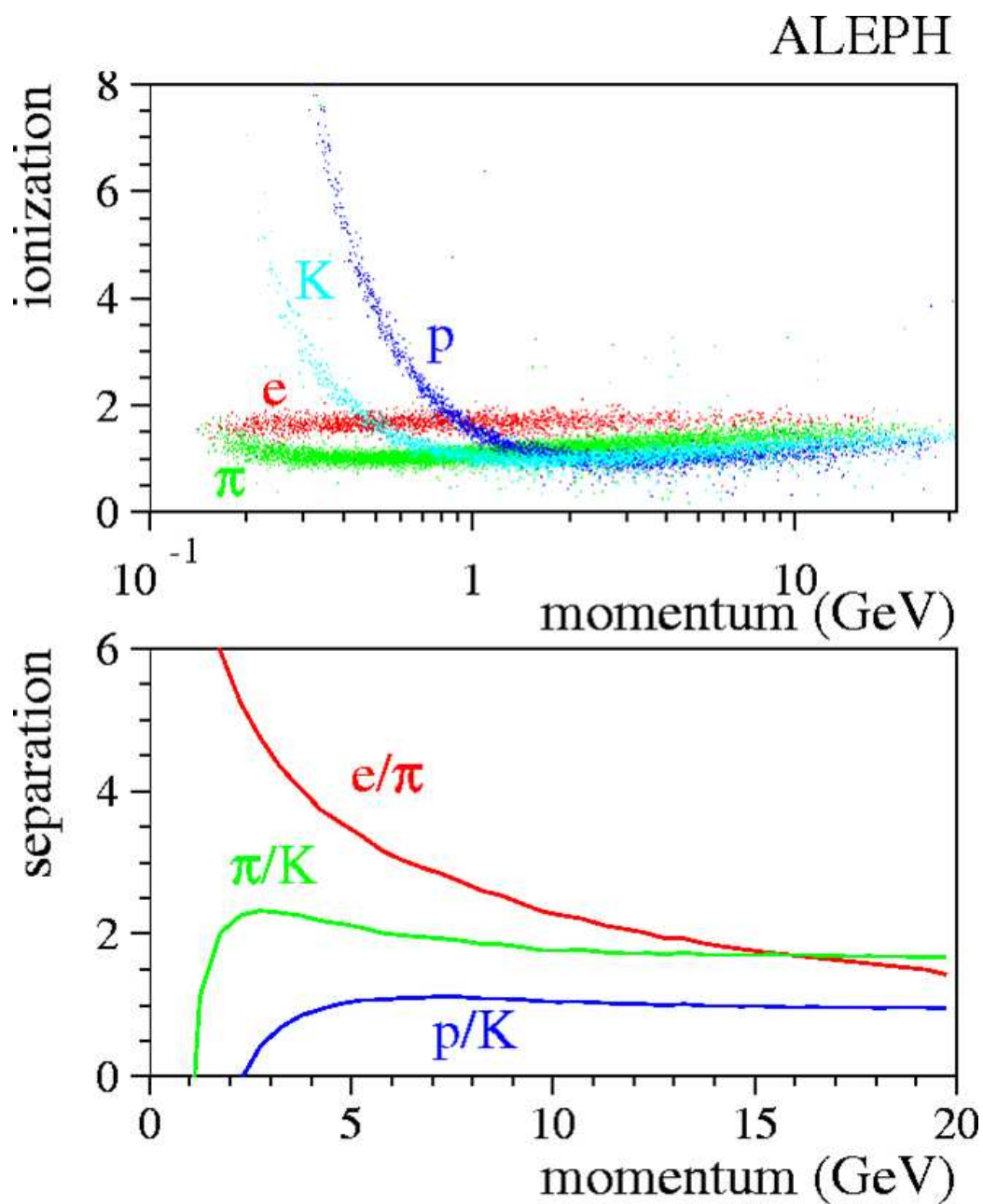


Фигура 12.17: б. отворена решетка

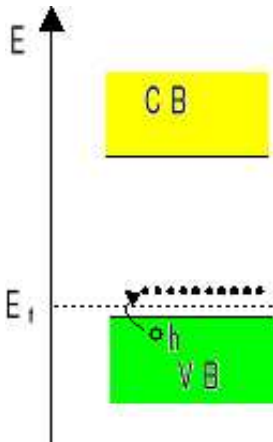
динатата с точност стотици μm . Пространственото разрешение в равнината (r, ϕ) е от същия порядък μm . С тези детектори имаме пълна триизмерна реконструкция на трека. Амплитудата на сигнала е пропорционална на първоначалната енергия на частицата. По dE/dx може да се определи β , оттам ρ и вида на частицата. Такъв детектор се използва от експеримента ALEPH, CERN.

12.7 Твърдотелни трекови детектори. Силициевеи стрипови детектори

Полупроводниковите детектори работят като твърдотелни йонизационни камери. Заредена частица (за случая на регистрация на фотони - фотоелектрони) образува в кристала двойки електрон - дупка по своя път. Кристалът е разположен между двата електрода, създаващи електрично поле. В процеса на йонизация на полупроводни-



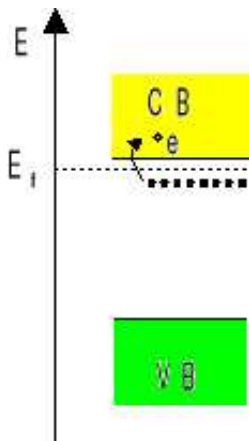
Фигура 12.18: идентификация на частиците с време - проекционна камера



Фигура 12.19: p - тип полупроводник

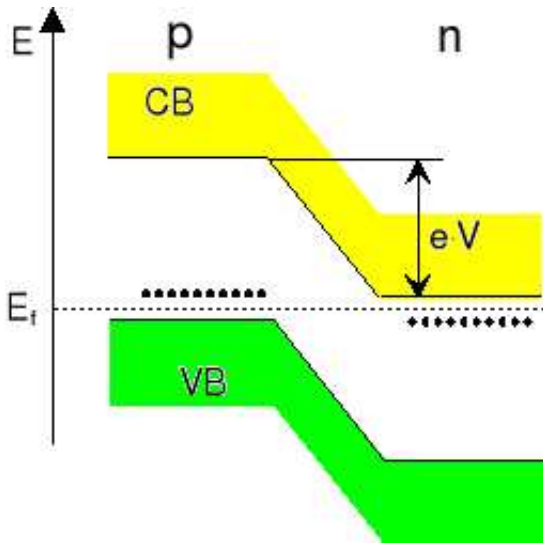
ка електроните от валентната зона се възбуждат от преминаващата частица и преминават в зоната на проводимост, оставяйки дупка във валентната зона. Във вторични процеси електроните губят енергия за образуване на двойки електрон - дупка (екситони) и за възбуждания на решетката (фонони). На мястото, където е преминала частицата се образува тръбичка плазма около трека, с висока концентрация на електрони и дупки. ($10^{15} - 10^{17} \text{ cm}^3$). Тези заряди трябва да бъдат разделени и събрани, да се събере заряд, достатъчен да бъде регистрирана първичната частица по енергията, отделена в процеса на йонизация. За образуване на двойка електрон дупка в Si са нужни 3.6 eV. За сравнение - в газове тази енергия е 20 - 40 eV. В сцинтилационните детектори са нужни от 400 до 1000 eV за образуване на един фотоелектрон при попадане на сцинтилационната светлина върху фотокатода.

За изработването на тези детектори се използват свръхчисти полупроводниковы монокристали Si или Ge. Практически се използват



Фигура 12.20: n - тип полупроводник

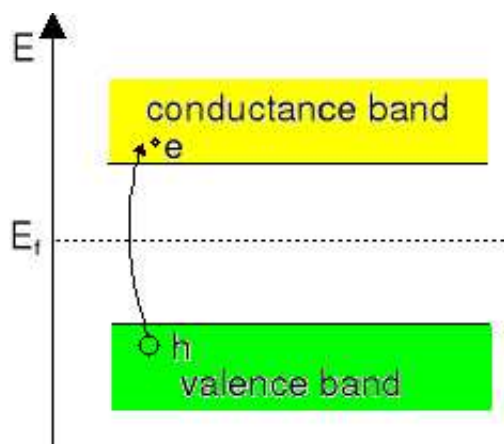
три типа полупроводникови детектори: с р - n преход, повърхностно - бариерен тип и с р - i - n структура. Ако доближим кристал от р - тип (легиран с акцепторни примеси, с проводимост на дупките) и кристал n - тип (легиран с донорни примеси, с електронна проводимост) ще имаме с р - n преход. На границата между двата кристала се получава двоен слой заряди. Заради образуваната в този случай разлика в потенциалите възниква ток на носителите на заряда (отрицателните носители мигрират към р - тип кристала, положителните мигрират към n - тип кристала, рекомбинират със свободните носители от другата страна), което води до обедняване на граничния слой откъм носители. Ако приложим външно напрежение в обратна посока т.е. отрицателно напрежение към р - слоя, дебелината на обеднения слой се увеличава. Това е чувствителната зона на детектора. При преминаване на йонизираща частица се получават двойки електрон - дупка, които под действието на електричното поле се отправят към електродите. Ако тези двойки се образуват в необеднената зона, ще рекомбинират в решетката на кристала.



Фигура 12.21: p - n преход

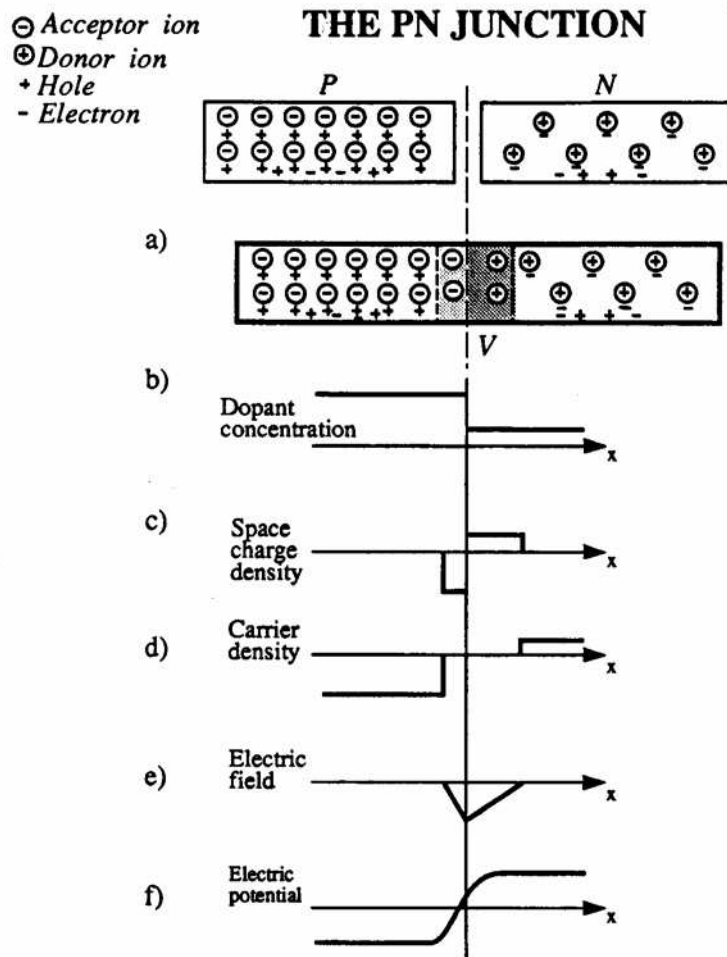
Избираме силиций (легиран с бор) със специфично съпротивление $100 - 1000 \Omega \text{cm}$, след това йони на лития се вкарват с дифузионен метод през повърхността на кристала. В резултат върху тази повърхност се образува n слой, а в междинната област може да се осъществи управляем процес на дифузия, при който броя йони на бора е равен на броя литиеви йони и те се компенсират. Специфичното съпротивление на обеднената зона нараства до $3 \cdot 10^5 \Omega \text{cm}$, което е собственото специфично съпротивление на чистия силиций, затова и този слой се нарича i - слой (собствена проводимост).

Броя двойки електрон - дупка се дава от $n = E_0/W_i$, където E_0 е енергията на налитащата частица, а W_i е енергията, нужна за образуване на двойка за дадения полупроводник. Едно от предимствата

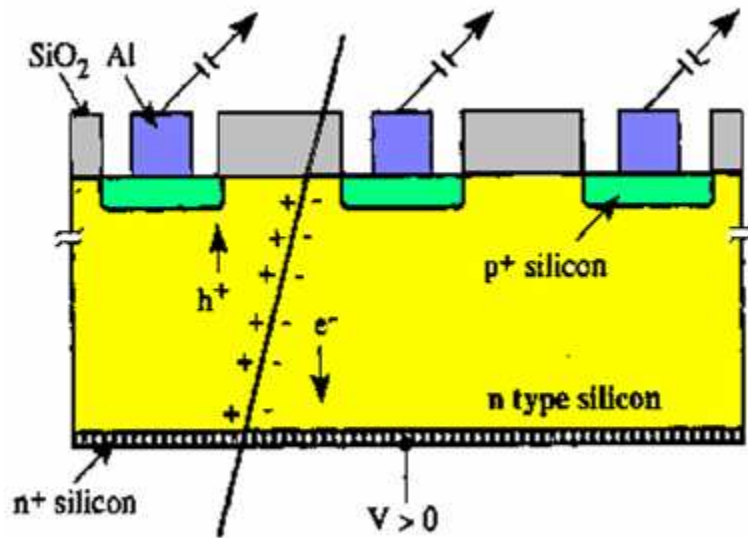


Фигура 12.22: зонна структура на кристалите - валентна зона и зона на проводимост

на твърдотелните детектори е, че сигналът, който дават е пропорционален на енергията, отдадена в обема на детектора и енергията за образуване на двойка електрон - дупка е малка. Имаме добро съотношение на сигнал към отдадена енергия. Сигналът е малък и трябва да се внимава с шума от readout електрониката. Решението по енергии може да се получи като квадратична сума от два фактора: шума от веригата на readout (+ ефекти от детектора, напр. ефекти на утечка) и статистически флуктуации при генерирането на зарядите. Тези детектори могат да работят в два режима : - нискоенергетичен режим – в този случай цялата енергия на частицата остава в обема на детектора. - високоенергетичен режим – частицата губи в детектора малка част от енергията си. В сравнение със Si детектори, Ge имат по - добро разрешение. Нужната енергия за образуване на двойка заряди е 2.96 eV (сравнено с 3.6eV). Неудобството при тях е, че трябва да се охлаждат до температури 77 K (заради шумовете). Проводимостта в тези детектори има две компоненти т.к. имаме два типа носители на заряда.



Фигура 12.23: Схема на р - п преход а. образуване на обеднена зона, б. концентрация на примесите, в. пространствена плътност на зарядите, г. електрично поле, д. електричен потенциал



Фигура 12.24: Схема на силициев полупроводников детектор

$$\sigma = en\mu_e + ep\mu_n, \quad (7.33)$$

където μ_i е подвижността на съответния тип носители, p, n - техните концентрации. Ако детектора е сегментиран на дълги тесни елементи, тогава говорим за стрипов детектор. Този тип детектори осигурява измерването на една от координатите при преминаване на частицата. Дебелината на един от елементите е около $3 - 10 \mu m$. Ако детектора е сегментиран на площадки, можем да извлечем информация за две от координатите на частицата. Обичайните размери на тези площадки са $200 - 2000 \mu m$. Ако размерите на площадките се намалят до $20 - 200 \mu m$, тогава говорим за пикселни детектори. Ето и някои от характеристиките на силициевите детектори: Широчината на обеднената зона $d = 0.309\sqrt{U_0 r_p}$ за $p - Si$ и $d = 0.505\sqrt{U_0 r_n}$ за $n - Si$, където $d[\mu m]$, $U_0[V]$, $r[\Omega cm]$.

$$E_x(0) = \frac{2U_0}{d} \quad (7.34)$$

Характерните стойности на горните величини са : $d = 100 \mu m$, $U_0 = 200 V$, $E = 4 \cdot 10^6 V/m$. Времето за събиране на заряда е $t_c = s/\mu E \approx 2 ns$, където $\mu_e = 2 \cdot 10^4 cm^2/(V.s)$, а $E = 2 \cdot 10^5 V/m$.

- скорост 10 ns
- стрипове 3 – 10 μm
- $\rho_n \sim 1 - 10 k\Omega cm$
- SiO_2 100 – 200nm
- разстояние между стриповете $\sim 20 \mu m$
- неопределеност за пространствено разделяне $\sigma = a/\sqrt{12}$
- отношение сигнал-шум S/N 15 – 25 за бърза електроника
- отлични механични свойства
- линейност на вложената енергия

12.8 Сцинтилации в материалите

- Неорганични кристали
- Органични течности
- Пластмаси
- Газове

12.8.1 Кристали**12.8.2 Органични сцинтилатори**

- Възбуждане на молекули

$\sim 3\%$ излъчват γ квант ; $E_{\gamma}^{abs} > E_{\gamma}^{emitted} \longrightarrow$ “shifters”.

Примери : polystyrene, polyvinyltoluene.

12.8.3 Пластмаси

Пластмасовите сцинтилатори се насищат.

$$N_{\gamma} \sim E$$

$$N = N_0 \frac{dE/dx}{1 + k_B dE/dx} \quad (8.35)$$

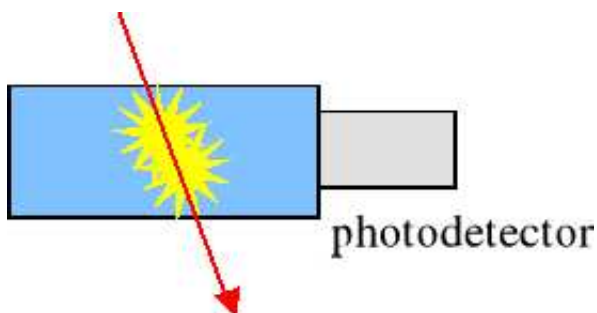
където k_B е константата на Бирк (Birk density parameter), а N_0 са брой фотони при ниска плътност на отделената енергия.

- Пример : за протон с енергия 100 [MeV] имаме $dE/dx \approx 10 \text{ MeV}/(\text{g}/\text{cm}^2)$ и $k_B \approx 5 \text{ mg}/(\text{cm}^2 \text{ MeV})$
- saturation effect $\sim 5\%$
- За малки dE/dx

$$N = N_0 dE/dx \quad (8.36)$$

- За големи dE/dx насищане настъпва при

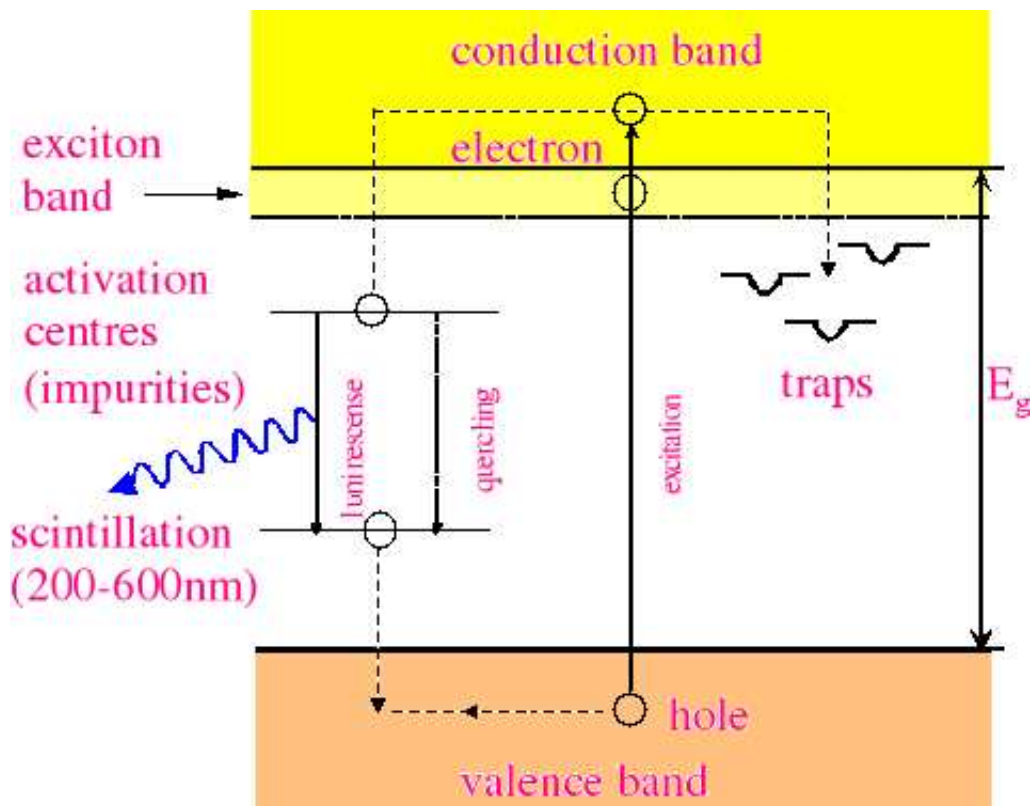
$$N = \frac{N_0}{k_B} \quad (8.37)$$



Фигура 12.25:

12.9 Сцинтилационни детектори

Сцинтилационният детектор имат две функции: конвертира предизвиканото от йонизираната частица възбуждане на прозрачния материал в светлина и извежда тази светлина към фотокатода. Механизмът на сцинтилация се различава за неорганични кристални сцинтилатори и органични сцинтилатори, които съществуват под формата на кристали, течности и полимерни твърди тела. Неорганичните сцинтилатори представляват кристали, които са легирани с активационни центрове. Йонизиращите частици образуват свободни електрони, свободни дупки и екситони (двойка електрон-дупка). Тези възбудени състояния се разпространяват в кристалната решетка докато не срещнат активационен център А. Той преминава във възбудено състояние A^* , което се връща в основно състояние А чрез изпускане на квант светлина. Времето за изсветване на сцинтилатора се определя от времето на живот на нестабилното възбудено състояние A^* , което зависи от температурата по следния начин: $\exp(-E_1/(kT))$, където E_1 е енергията на възбуденото състояние A^* . Под светлинен добив се разбира количеството фотони, отнесено към единица енергия, която губи йонизиращата частица.



Фигура 12.26: Механизъм на сцинтилация при неорганични кристали

Обратно на неорганичните кристални сцинтилатори, органичните сцинтилатори имат кратки времена на изсветване от порядъка на няколко наносекунди. Механизмът на сцинтилация тук не е свързан с ефекти на кристалната решетка, а се основава на възбуждания на молекулярно ниво в основния флуоресциращ материал, което се сменя чрез изпускане на гама кванти в ултравиолетовата област.

Тъй като дължината за поглъщане на УВ - квантите в повечето прозрачни материали е много малка (от порядъка на няколко милиметра), светлинният сигнал може да бъде регистриран благодарение на това, че в сцинтилационния материал се добавят примеси, които превръщат УВ - квантите в кванти видима светлина (wavelength shifter или преобразувател на дължината на вълната). Този втори флуоресциращ материал се подбира по такъв начин, че неговият спектър на поглъщане съответства на спектъра на изсветване на основния сцинтилатор, а дължината на вълната на неговото собствено излъчване се съгласува добре със спектралната чувствителност на фотокатода.

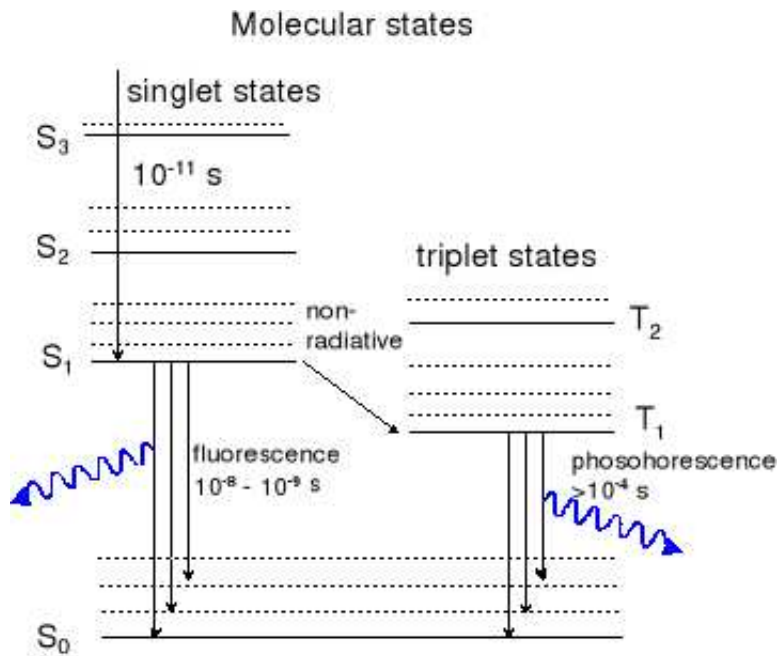
Двете активни компоненти се разтварят или в органична течност или се смесват с мономери, образувайки полимер. Полимеризацията може да обезпечи желаната форма на материала. Най - често

Table A6.2 Properties of some inorganic scintillators

scintillator composition	density (g/cm ³)	index of refraction	wavelength of maximum emission (nm)	decay time constant (μ s)	scintillation pulse height ¹⁾	notes
NaI	3.67	1.78	303	0.06	190	2)
NaI(Tl)	3.67	1.85	410	0.25	100	3)
CsI	4.51	1.80	310	0.01	6	3)
CsI(Tl)	4.51	1.80	565	1.0	45	3)
CaI(Na)	4.51	1.84	420	0.63	85	3)
KI(Tl)	3.13	1.71	410	0.24/2.5	24	3)
⁶ LiI(Eu)	4.06	1.96	470-485	1.4	35	3)
CaF ₂ (Eu)	3.19	1.44	435	0.9	50	
BaF ₂	4.88	1.49	190/220 310	0.0006 0.63	5 15	
Bi ₄ Ge ₃ O ₁₂	7.13	2.15	480	0.30	10	
CaWO ₄	6.12	1.92	430	0.5/20	50	
ZnWO ₄	7.87	2.2	480	5.0	26	
CdWO ₄	7.90	2.3	540	5.0	40	
CsF	4.65	1.48	390	0.005	5	3)
CeF ₃	6.16	1.68	300 340	0.005 0.020	5	
ZnS(Ag)	4.09	2.35	450	0.2	150	4)
GSO	6.71	1.9	440	0.060	20	
ZnO(Ga)	5.61	2.02	385	0.0004	40	4)
YSO	4.45	1.8	420	0.035	50	
YAP	5.50	1.9	370	0.030	40	

¹⁾ relative to NaI(Tl) ²⁾ at 80 K ³⁾ hygroscopic ⁴⁾ polycrystalline

Фигура 12.27: Свойства на някои неорганични кристали



Фигура 12.28: Механизъм на сцинтилация при органични кристали

	solvent	secondary fluor	tertiary fluor
Liquid scintillators	Benzene	p-terphenyl	POPOP
	Toluene	DPO	BBO
	Xylene	PBD	BPO
Plastic scintillators	Polyvinylbenzene	p-terphenyl	POPOP
	Polyvinyltoluene	DPO	TBP
	Polystyrene	PBD	BBO DPS

Фигура 12.29: Някои основни органични сцинтилатори

Table A6.3 Properties of some organic scintillators

scintillator	density (g/cm ³)	index of refraction	wavelength of maximum emission (nm)	decay time constant (ns)	scintillation pulse height ¹⁾	H/C ratio ²⁾
Monocrystals						
naphthalene	1.15	1.58	348	11	11	0.800
anthracene	1.25	1.59	448	30-32	100	0.714
trans-stilbene	1.16	1.58	384	3-8	46	0.857
p-terphenyl	1.23		391	6-12	30	0.778
Plastics ³⁾						
NE 102 A	1.032	1.58	425	2.5	65	1.105
NE 104	1.032	1.58	405	1.8	68	1.100
NE 110	1.032	1.58	437	3.3	60	1.105
NE 111	1.032	1.58	370	1.7	55	1.096
Plastics ⁴⁾						
BC-400	1.032	1.581	423	2.4	65	1.103
BC-404	1.032	1.58	408	1.8	68	1.107
BC-408	1.032	1.58	425	2.1	64	1.104
BC-412	1.032	1.58	434	3.3	60	1.104
BC-414	1.032	1.58	392	1.8	68	1.110
BC-416	1.032	1.58	434	4.0	50	1.110
BC-418	1.032	1.58	391	1.4	67	1.100
BC-420	1.032	1.58	391	1.5	64	1.100
BC-422	1.032	1.58	370	1.6	55	1.102
BC-422Q	1.032	1.58	370	0.7	11	1.102
BC-428	1.032	1.58	480	12.5	50	1.103
BC-430	1.032	1.58	580	16.8	45	1.108
BC-434	1.049	1.58	425	2.2	60	0.995

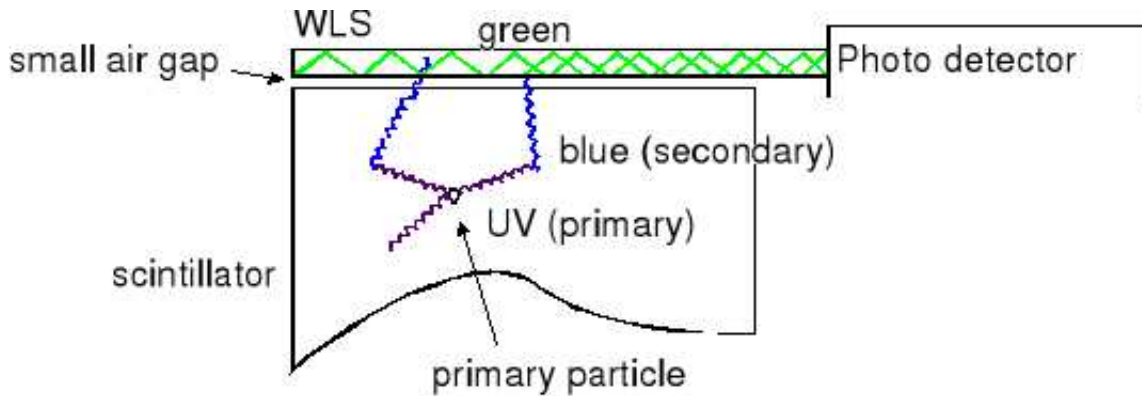
1) relative to anthracene

2) ratio of hydrogen to carbon atoms

3) Nuclear Enterprises Ltd. Sighthill, Edinburgh, U.K.

4) Bicon Corporation, Newbury, Ohio, USA

Фигура 12.30: Свойства на някои органични сцинтилатори

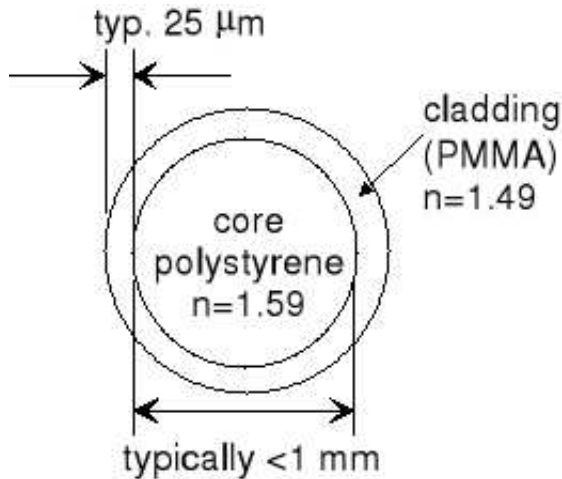


Фигура 12.31: Преобразувател на дължината на вълната

уботребяваната форма е пластина с обичайни размери: дебелина 0.5 - 30 mm и площ $2 \times 2 m^2$. Важни характеристики на сцинтилатора се явяват светлинният добив и характерната дължина на самопоглъщане. За пластмасови сцинтилатори в качеството на свързващ елемент се използват полимери от ароматни съединения (полиестерол, поливинилтулуол са най - често използваните). Пластмасовите сцинтилатори се използват често в големите калориметри във формата на тънки (мм) и дълги (м) пръчки. ФЕУ е свързан към всяка пръчка. В този случай е важно светлинният добив да е еднакъв по цялата дължина. Отслабването на светлинния сигнал в следствие на ефекта на самопоглъщане се наблюдава най - вече в областта на късовълновия участък на спектъра на излъчване. Сцинтилационните детектори работят в режим да/не (тригери) или служат за измерване на енергията на преминалата частица. Броят фотони е пропорционален на енергията на преминалата частица и е равен на:

$$N_{\gamma} = \frac{dE}{dx} dY \quad , \quad (9.38)$$

където Y е добивът на фотони. MIP дава $\sim 1000\gamma$ в $500\mu m$., но те не достигат ФЕУ. Дължината на затихване на влакното е $\sim 3m$. За



Фигура 12.32: Световодно влакно

събиране на светлината към фотокатода се използват световоди.

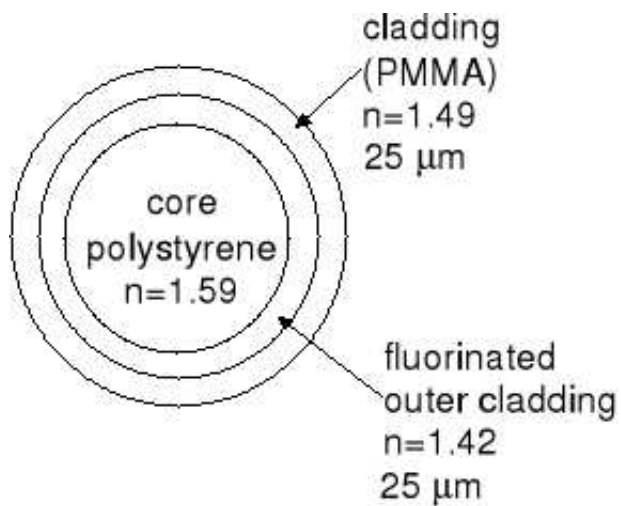
Синята светлина се разпространява в пластмасовите сцинтилатори за сметка на многократно пълно вътрешно отражение от повърхностите.

При пълно вътрешно отражение

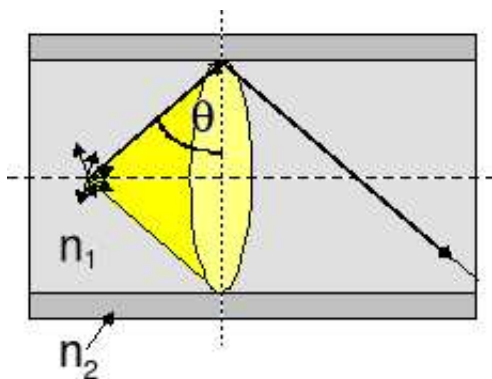
$$\sin \Theta \geq \frac{n_{ext}}{n} , \quad (9.39)$$

като за въздух $n_{ext} = 1$. За полистерол коефициентът на пречупване $n = 1.581$, т.е. ще се отразяват всички лъчи разпространяващи се под ъгли до 39° относно нормалата.

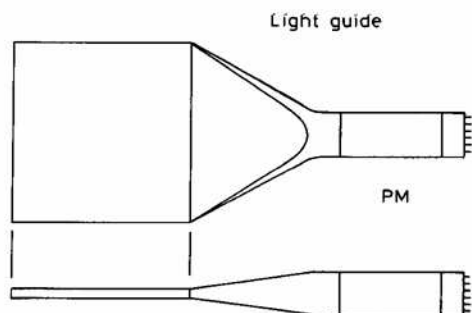
Обикновено правоъгълни повърхности на сцинтилатора с напречно сечение F се свързват с повърхността на катода с площ s



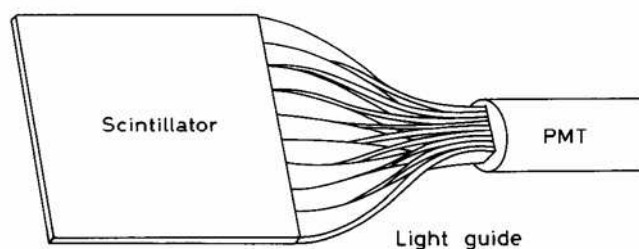
Фигура 12.33: Световодно влакно



Фигура 12.34: Пълно вътрешно отражение



Фигура 12.35: Свързване на сцинтилатора и ФЕУ чрез световодни влакна



Фигура 12.36: Свързване на сцинтилатора и ФЕУ чрез световодни влакна

помощта f на извити световоди. Т.к. радиуса на кривините е доста по-голям от дебелината им, светлината пада на повърхността под ъгли относно нормалата по-големи отколкото ъгълът на пълно вътрешно отражение. За плексиглас този ъгъл е 42° , а $n = 1.49$. Светлината, достигаща фотокатода е по-малко от f/F .

Времето разрешение на сцинтилационен детектор се определя от времето (разхвърляне) на пробег на електроните в ФЕУ и различните пътища на разпространение на светлината в сцинтилаторът. Вторият фактор е определящ при сцинтилатори с големи размери

(≈ 2 m). За дълги сцинтилационни детектори най - доброто времево разрешение е от порядъка на 200 ps. Алтернативен метод за събиране на светлината е: синята светлина от преобразувател на дължината на вълната излиза и попада на пластинка плексиглас, активиран преобразувател. Този флуоресциращ материал поглъща синята светлина и изпуска изотропно зелена светлина с дължина на вълната например 480 nm. Някаква част (10 - 15 процента) от зелената светлина благодарение на пълното вътрешно отражение остава в пластината и достига до фотокатода.

Сцинтилационните детектори се характеризират със своята бързина, което ги прави надеждни за използване като тригери. Неорганичните сцинтилатори са с голям атомен номер което ги прави подходящи за заредени частици и гама - кванти. Органичните сцинтилатори се използват за мерене на енергията на частиците, поради малкия си атомен номер са неподходящи за регистрация на гама - кванти.

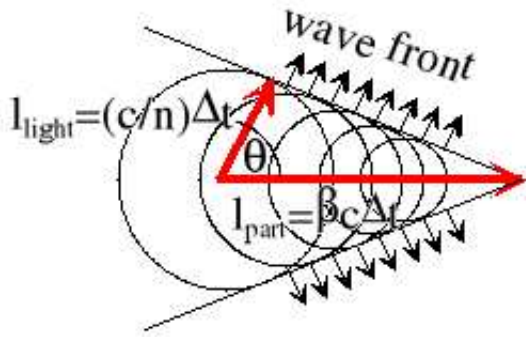
12.10 Черенковско излъчване

Нека означим скоростта на светлината за дадена среда с индекс n със

$c_m \equiv c_{medium}$. Както знаем $c_m = \frac{c}{n}$, а условието за съществуване на Черенковско лъчение е $v > c_m$, което води до

$$\begin{aligned} \theta_{max} &= \arccos \frac{1}{\beta\gamma} \quad \Rightarrow \\ \cos \theta_c &= \frac{1}{\beta n} \end{aligned} \quad (10.40)$$

Ясно е, че $|\cos \theta_c| \leq 1$. Ако означим $\gamma_{tr} = (1 - \frac{1}{n^2})^{-\frac{1}{2}}$, при $\beta \rightarrow 1$, $\theta_c^{max} = \arccos \frac{1}{n}$



Фигура 12.37: Образуване на вълнови фронт

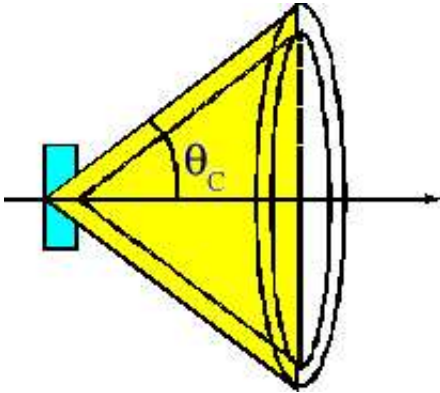
$$\frac{dN}{dx} = 2\pi\alpha z^2 \int_{\beta n > 1} \left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right) \frac{d\lambda}{\lambda^2} = 2\pi\alpha z^2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1\lambda_2} \sin^2 \theta_c \quad (10.41)$$

$$\frac{dN}{dx} = 490z^2 \sin^2 \theta_c \text{ [cm}^{-1}\text{]}, \quad 400 \leq \lambda \leq 700 \text{ nm}$$

12.11 Черенковски броячи

Черенковско светене се получава когато заредена частица се движи в среда със скорост, по-висока от скоростта на светлината за дадената среда. Класическата теория на ефекта го свързва с асиметричната поляризация на средата отпред и отзад на движещата се частица, което води до променлив във времето диполен момент. Както и за акустична ударна вълна, по направление на движението се образува вълнови фронт.

Ако приемем, че по направление на движението на частицата се разпространяват елементарни вълни, за времеви интервал t вълната и частицата изминават съответно разстояния tc/n и $t\beta c$. Оттук



Фигура 12.38: Черенковското светене е в конус

получаваме :

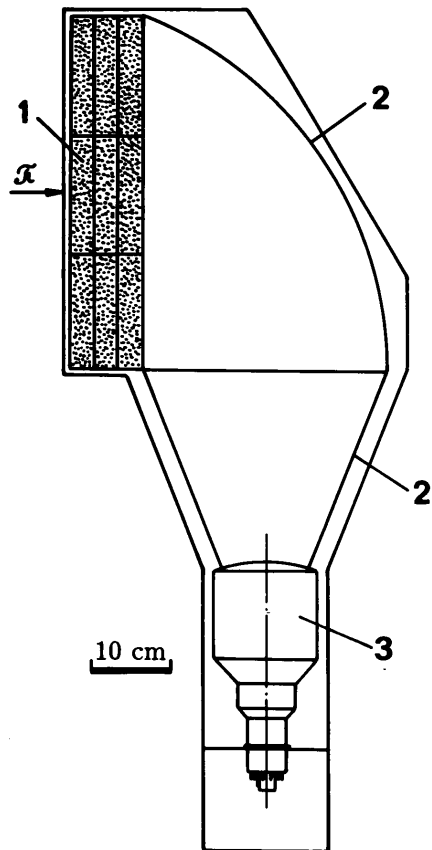
$$\cos \Theta_c = (ct/n)(\beta ct) = 1/(\beta n), \quad (11.42)$$

където Θ_c е ъгълът между направлението, в което се излъчва светлината и направлението на движението на частицата. Излъчването на светлината е в конус.

При такова разглеждане, черенковско излъчване се наблюдава само ако е изпълнено $\beta > 1/n$ и е под ъгъл Θ_c спрямо направлението на движението. Минималната скорост $v_s = \beta_s c = c/n$ се нарича критична скорост, а ъгълът Θ_c - Черенковски ъгъл. Критичната скорост съответства на критична стойност на Лоренц - факторът на частицата:

$$\gamma_{tr} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (11.43)$$

Ако разглеждаме радиатор с крайна дължина L , можем да видим, че излъчването не се изпуска само под ъгъл Θ_c , но с някакво разпределение на интензивността, подобно на явлението дифракция. Това разпределение има максимум при $\Theta = \Theta_c$. Черенковският детектор представлява цилиндър с газ под налягане. Изменяйки налягането

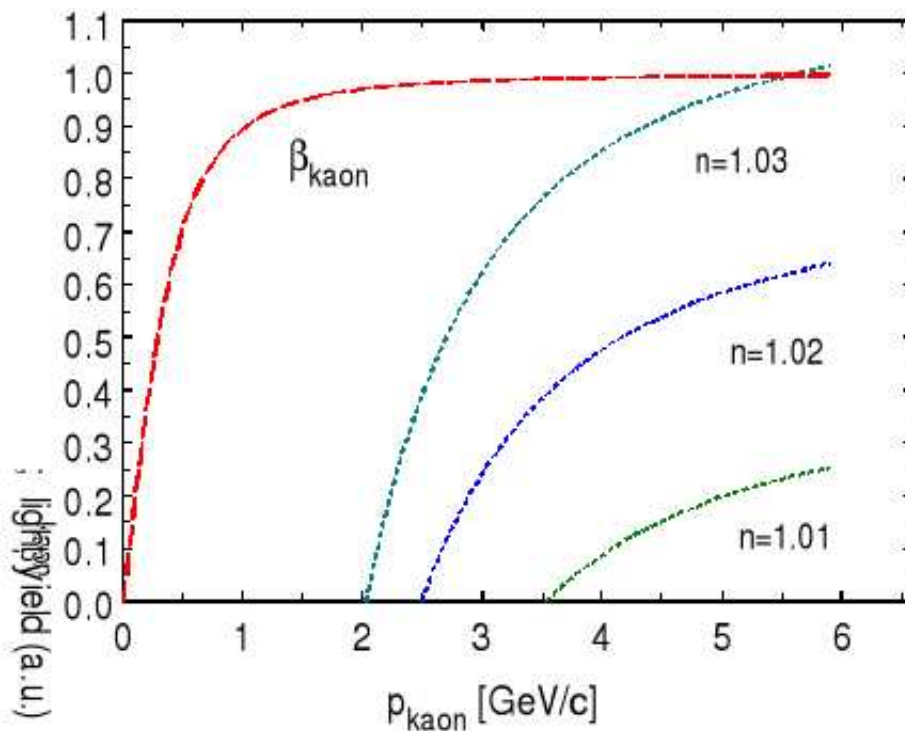


Фигура 12.39: Схема на Черенковски брояч 1. аерогел с $n = 1.1$, 2.сферично огледало, 3. ФЕУ

можем да изменяме коефициентът на пречупване на средата. Сферично огледало, поставено в единия край събира светлината и я подава на ФЕУ. Важни характеристики на материалите, които се използват като радиатори на черенковско лъчение са коефициентът на пречупване и праговата стойност γ_s . В някои детектори е възможно газът да бъде заменен с течност или твърдо тяло. В днешно време е възможно да се приготвят аерогелове с $n = 1.03 - 1.05$. В този случай недостатъкът е, че на пътя на частицата има много вещество и това може да измени характеристиките. В случая с газ има минимално взаимодействие. Да предположим че трябва да разделим частици с маси m_1 и $m_2 > m_1$ с помощта на прагови черенковски детектори. Можем да изберем показателя на пречупване, така че по-тежката частица с маса m_2 още не предизвиква светене, т.е. е малко под прага $\beta_2^2 = 1/n^2$ или $n^2 = \gamma_2^2/(\gamma_2^2 - 1)$, т.е. при фиксирани условия две частици с един и същ импулс, но с различна β едната свети, другата – не. Нека разгледаме $\pi(138 \text{ MeV})$ и $p(1\text{GeV})$. Ако имат един и същ импулс, разликата в скоростите е 7-8 пъти. Тогава $\gamma_p < \gamma_s$, а $\gamma_\pi > \gamma_{tr}$. Следователно пионът ще излъчва, а протонът – не. Ако сложим 3 черенковски брояча и 2 сцинтилатора, свързани в схема на съвпадения (за да имаме указания за това дали е минала частица). Трите брояча $s1, s2, s3$ се разполагат между двата сцинтилатора $s1, s2$. Ако $s1$ и $s2$ работят, значи е минала частица. Можем да подберем праговете по следния начин :

брояч	сработва при	не сработва при
$s1$	e	π, K, p
$s2$	e, π	K, p
$s3$	e, π, K	p

Тогава ако сработят трите брояча е преминал електрон, ако сработят $s2$ и $s3$ е преминал пион, ако сработи $s3$ е преминал каон, и ако не

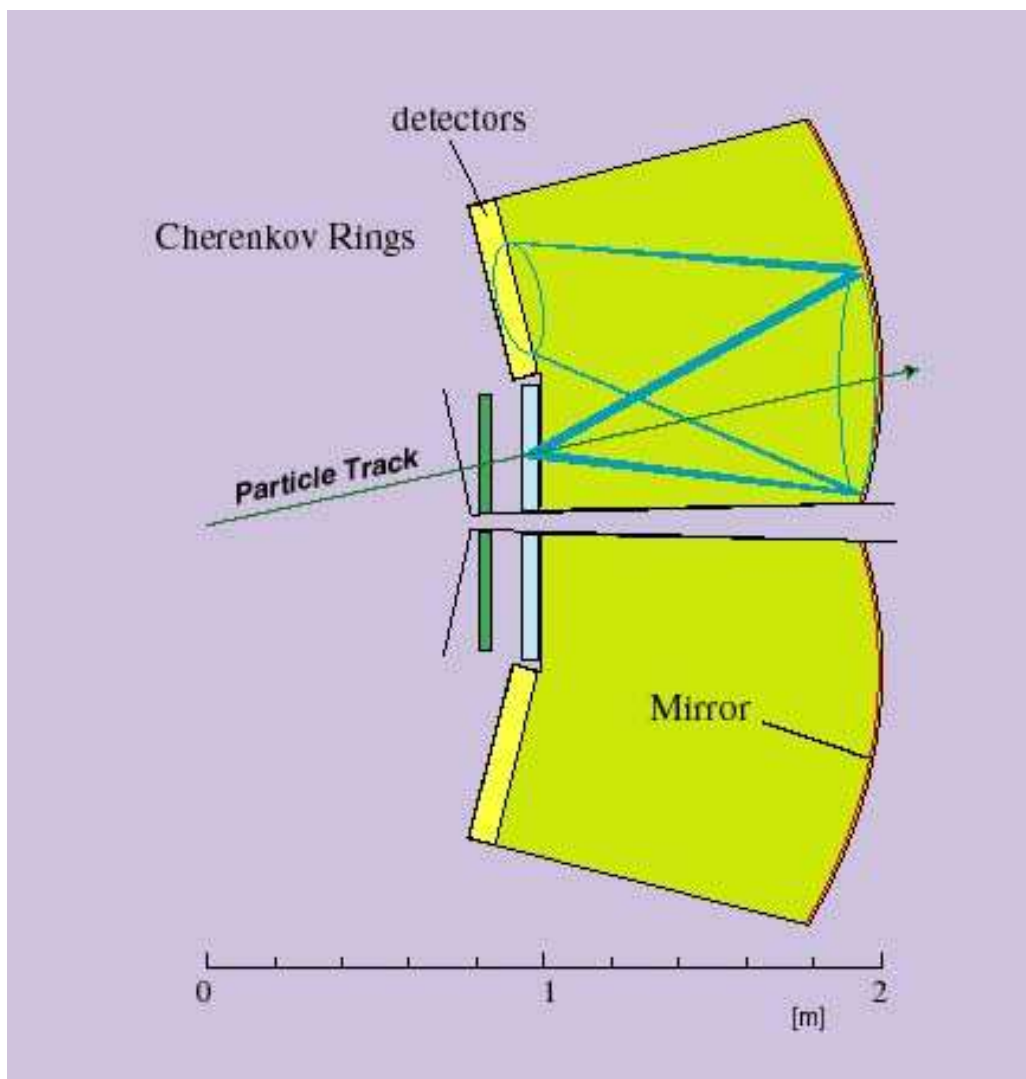


Фигура 12.40: Зависимост на Черенковския ъгъл от скоростта на частицата за различни показатели на пречупване

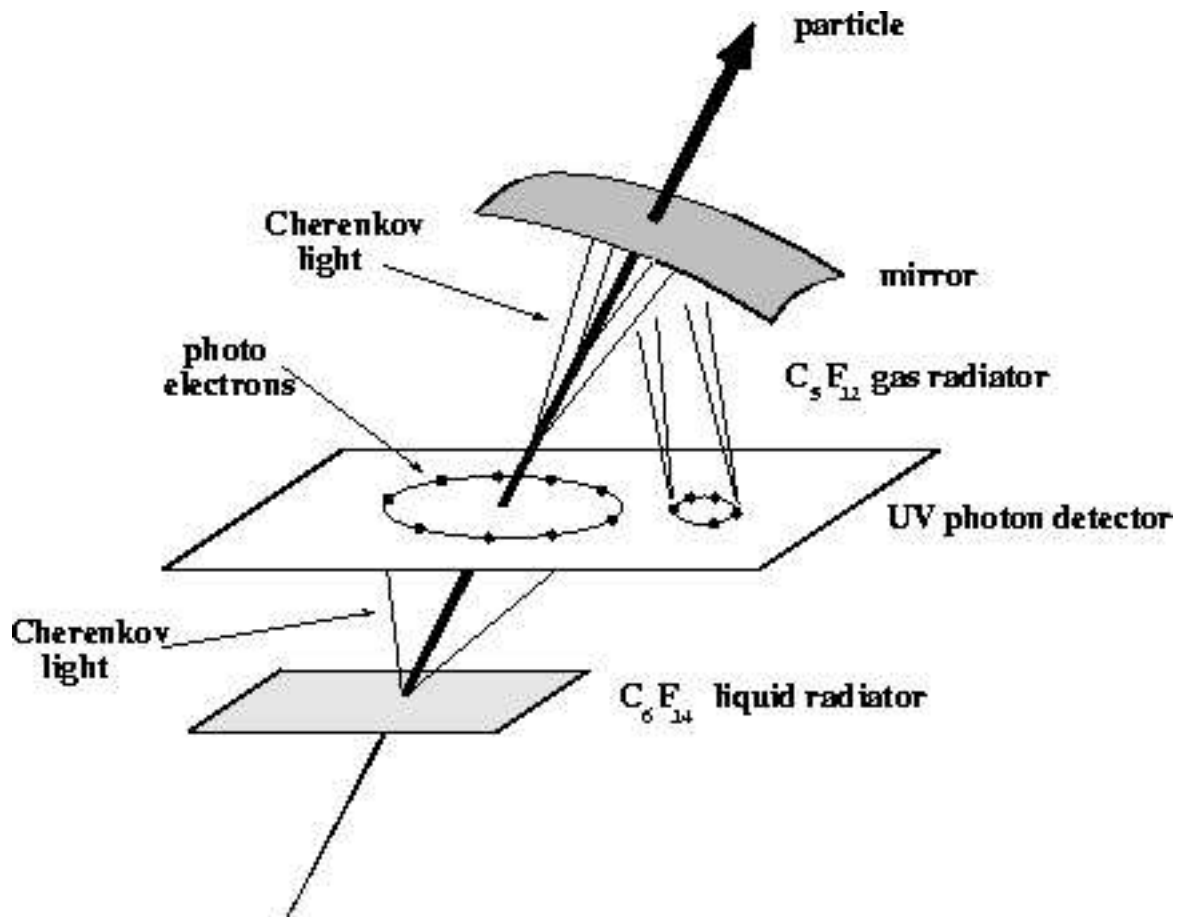
сработи нито един от черенковските броячи - имаме протон.

RICH (ring imaging cherenkov counter)

RICH детекторите позволяват измерването на стойностите на β за няколко частици с определен различен импулс чрез определяне на позицията на определен брой Черенковски фотони. В този детектор, черенковското светене, излъчено от няколко различни частици от едно и също събитие се предава чрез сферично огледало на фотодетектор, който преобразува фотоните във фотоелектрони с високо пространствено и времево разрешение. Черенковските следи се визуализират върху равнината на детектиране под формата на Черен-



Фигура 12.41: ring imaging cherenkov counter



Фигура 12.42: ring imaging cherenkov counter

ковски пръстени и по този начин може да бъде определен ъгълът на излъчване Θ_c за всеки детектиран фотон. Масата на частица m с известен импулс p се дава от:

$$m = p(n^2 \cos^2(\Theta_c) - 1)^{(1/2)} \quad (11.44)$$

Предизвикателство пред тези детектори е измерването на сигнали от единични електрони, т.е. аналогични на шума на детектора. Основните два елемента на този детектор са прозрачна диелектрична среда, наречена радиатор, чийто коефициент на пречупване е подходящ за диапазона на импулса на частиците и фотодетектор. Последният дава информация за позицията на фотоелектроните, получени от превръщането на Черенковите фотони. Сферичните фокусиращи огледала осигуряват достатъчен брой детектирани фотоелектрони за Черенковски пръстен. Разрешението на Черенковските пръстени зависи от отношението на плътността на радиатора и разстоянието от сферичното огледало до фотодетектора.

Сферично огледало с радиус R_s , фокусира конус черенковска светлина, образувана в радиатора, който се намира между сферичното огледало и детектора. Черенковският светлинен конус обикновено има ъгъл на разтваряне $\Theta_c = \arccos[1/(\beta n)]$

Измерваме радиуса на Черенковските пръстени r_c , оттам $\Rightarrow \Theta_c$ и така може да бъде определена $\Rightarrow \beta$.

12.12 Преходно излъчване

картинки разни

формира се дипол, чийто вектор на електричното поле \vec{E} се мени с времето, т.е. диполът излъчва се светлина. Излъчената енергия се дава с израза :

$$S = \frac{1}{3} \alpha z^2 \omega_p \gamma \sim \gamma$$

където $\hbar\omega$ е плазмената енергия, която за пластмаса е от порядъка на 20 eV.

$$\theta = \frac{1}{\gamma}$$

За $\omega > \omega_p$, практически изчезва.

$$N_\gamma \sim \alpha z^2$$

Интерференцията налага условие $\gamma \sim 1000$; $D = \frac{\gamma c}{\omega_p}$.
За $\hbar\omega = 20\text{eV}$ и $\gamma = 5.10$, $D = 50 \mu\text{m}$.

12.13 Спирачно лъчение (Bremsstrahlung)

Частичка, която навлиза във вещество, взаимодейства електромагнитно с ядрото на атома, в следствие на което траекторията и се изкривява, губи енергия и излъчва γ кванти. Тези γ кванти се наричат спирачно лъчение.

$$-\frac{dE}{dx} = 4\alpha N_A \frac{Z^2}{A} z^2 r^2 \ln \frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}} \quad (13.45)$$

където $r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^2}$ и важи най - вече за леки частици, като $r_e \sim \frac{1}{m_e}$.
За e^- (1.38) приема вида :

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{X_0} \quad (13.46)$$

където X_0 е радиационната дължина на вълната :

$$X_0 = \frac{A}{4\alpha N_A Z(Z+1)r_e^2 \ln(183Z^{-\frac{1}{3}})} \quad (13.47)$$

Ако се отчетат и ефектите на екраниране радиационната дължина на вълната X_0 [g/cm^2] се свежда до израза :

$$X_0 = \frac{716.4A}{Z(Z+1) \ln(287/\sqrt{z})} \quad (13.48)$$

За физическия смисъл на X_0 можем да съдим от формулата $E = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}} \Rightarrow X_0$ е тази дебелина на веществото, за която e^- губи e пъти от първоначалната си енергия E_0 .

12.14 Критична енергия

При тази енергия съществува равенство между загубата на енергия при спирано лъчение и йонизационната загуба на енергия.

$$(dE/dx)_{ion} = (dE/dx)_{brem} \quad (14.49)$$

т.е. в критичната точка се осъществява смяна на механизма на загуба на енергии.

- при високи енергии $(dE/dx)_{ion} < (dE/dx)_{brem}$
- при ниски енергии $(dE/dx)_{ion} > (dE/dx)_{brem}$

Нека отбележим, че високоенергетичен позитрон не анихилира, а се държи като йонизираща частица, докато при ниски енергии се осъществява процесът на анихилация. Важно е да споменем, че при енергии $E < 0.255 \text{ MeV}$ йонизационните загуби преминават в $Bhabha$ - $(dE/dx)_{Bhabha}$.

Апроксимираната формула за критичната енергия в [MeV] на електрона, преминаващ през твърди тела и течности има вида

$$E_c = \frac{610 \text{ MeV}}{Z + 1.24} \quad (14.50)$$

докато за газове

$$E_c = \frac{710 \text{ MeV}}{Z + 0.92} \quad (14.51)$$

Трябва да отбележим, че за високоенергетични частици $(dE/dx)_{Brem} \sim \frac{1}{m^2}$ т.е. поради най - малката си маса, електронът излъчва най - много, докато преминава през вещество. Ако пресметнем критичната енергия в [GeV] за мюон, преминаващ през желязо, ще установим, че такава частица с енергия под 960 GeV само йонизира средата, а може да излъчва едва над тази стойност.

$$E_c = \frac{610 \text{ MeV}}{Z + 1.24} \left(\frac{m_\mu^2}{m_e} \right) = 960 \text{ GeV}$$

12.15 Ядрени взаимодействия

Ядрените взаимодействия заемат важно място и във физиката на елементарните частици, тъй като това са взаимодействията на неутралните частици. Най-общо те биват еластични и нееластични и сумата от двете сечения дава общото сечение на процеса.

$$\sigma_{tot} = \sigma_{inel} + \sigma_{el} \quad (15.52)$$

Ако означим със σ_0 сечението на протон-протонното взаимодействие, то сечението на нееластичното взаимодействие на произволен процес може да се изрази като многократно протон-протонно взаимодействие в зависимост от ядрената материя :

$$\sigma_{inel} \approx \sigma_0 A^\alpha \quad (15.53)$$

където $\alpha = 0.71$, а $A[\text{g/mol}]$ е количеството ядрено вещество.

Сега ще дефинираме две нови величини, наречени дължини на поглъщане:

$$\lambda_a \equiv \text{absorbtion length [cm]}$$

$$\lambda_N \equiv \text{Nuclear interaction length [cm]}$$

където

$$\lambda_a = \frac{A}{N_A \rho \sigma_{inel}} \quad (15.54)$$

а ядрената дължина λ_N има вида:

$$\lambda_N = \frac{A}{N_A \rho \sigma_{tot}} \quad (15.55)$$

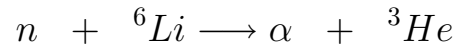
Важно е да се разбере, че λ е тази дължина, която трябва да измине една частица, така че да намалее енергията и е пъти. Ясно е, че $\lambda_N < \lambda_a$, тъй като $\sigma_{tot} > \sigma_{inel}$. Ето и дължините на поглъщане [cm] на някои материали: Al(26.2), Fe(10.6), Pb(10.4), въздух(48000).

12.16 Взаимодействие на неутрони с веществото

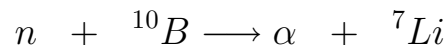
Ще разгледаме взаимодействието на неутрони в различни енергетични диапазони.

- Ниски енергии ($E_{kin}^n < 20\text{GeV}$)

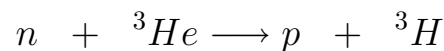
За детектиране на такива неутрони се използват следните ядрени реакции:



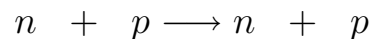
детектор : сцинтилатор LiI(Tl)



газов детектор : BF_3

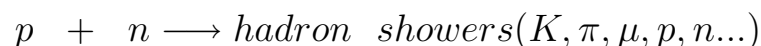


детектор : пропорционална камера ${}^3\text{He}$



детектор : пропорционална камера с CH_4 (в метана енергията на връзка е много по-ниска от енергията на налитащите нейтрони).

- Средни енергии ($20 \text{ MeV} \leq E_{kin} \leq 1 \text{ GeV}$)
Това е енергетичният интервал, в който се осъществяват т.н. recoil reactions, при които се бомбардират СН-верижки с нейтрони, които ги разкъсват и избиват протонното им ядро, което става квазисвободно. Т.е. това е една (n,p) реакция.
- Високи енергии ($E_{kin}^n > 1 \text{ GeV}$)
Това е енергетичната област, в която нейтроните адронизират материята, т.е. силните взаимодействия са изцяло доминиращи.



12.17 Електромагнитни каскади

Един високоенергетичен гама квант предиавиква електромагнитна каскада, докато енергията му е по-голяма от критичната енергия за конкретното вещество, където се развива процеса. Разрастването на лавината продължава дотогава, докато $E_\gamma = E_c$. При по-ниски енергии от E_c започва процес на йонизация, при което електроните и позитроните губят енергията си и се поглъщат във веществото. По този начин електромагнитната лавина угасва в средата, в която се е развила.

Една електромагнитна каскада се състои от електрони, позитрони и гама кванти, така че от горе направените разсъждения можем да запишем броя на частиците като функция на радиационната дължина на вълната (t е в единици $[X_0]$).

$$N(t) = 2^t \tag{17.56}$$

$$\Rightarrow E(t) = E_0 2^{-t} \quad (17.57)$$

Вече споменахме, че умножението продължава до $E_e \sim E_c \Rightarrow$

$$E_c = E_0 2^{-t_{max}} \quad (17.58)$$

За времена $t > t_{max}$ частиците започват да се поглъщат, лавината престава да се размножава и започва да умира.

$$t_{max} = \frac{\ln\left(\frac{E_0}{E_c}\right)}{\ln 2} \approx \ln E_0 \quad (17.59)$$

Пълният брой частици

$$S = \sum_{t=0}^{t_{max}} N(t) = \sum_t 2^t = 2^{t_{max}+1} - 1 \approx 2^{t_{max}+1} \quad (17.60)$$

$$S = 2 \cdot 2^{t_{max}} = 2 \frac{E_0}{E_c} \approx E_0$$

Един електрон, попадайки в калориметър, оставя цялата си енергия, ако калориметърът е оразмерен правилно. С помощта на фотоелектронен умножител се отчитат изсветванията при всеки акт на умножаване на електромагнитната каскада. Важно е да се отбележи, че между броят на фотоните и енергията на първичния гама квант, предизвикал лавината, съществува линейна връзка. Т.е.

$$N_{ph.} \sim S \sim E_0$$

Ако извършваме измервания през време $t \Rightarrow$

$$S^* = \frac{S}{t} = 2 \frac{E_0}{E_c} \frac{1}{t} \quad (17.61)$$

$$\frac{\sigma}{E_0} = \frac{\sqrt{S^*}}{S^*} = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2 \frac{E_0}{E_c}}} \sim \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{E_0}} \quad (17.62)$$

$$\frac{\sigma}{E} \sim \frac{a}{\sqrt{E}},$$

където $a = const$, а $\frac{\sigma}{E}$ е относителната грешка, при измерването на енергията. При по-реалистично описание надлъжното развитие се апроксимира с :

$$dE/dx = const.t^a e^{-bt}, \quad (17.63)$$

където dE/dx зависи от началната енергия E_0 и от веществото, т.е. $a = f(E_0)$ и $b = f(E_0)$. Напречното разпределение може да се запише с помощта на радиуса на Молие (Moliere) :

$$R_m = \frac{21 \text{ MeV}}{E_c} X_0 \quad [g/cm^2] \quad (17.64)$$

Трябва да се отбележи, че X_0 и E_c са различни за различните вещества. В калориметър, който можем да разглеждаме като цилиндър с радиус $r = R_m$, 95% от енергията се поглъща. За хомогенни калориметри $R_m(Fe) = 14 \text{ g/cm}^2 \sim 1.8 \text{ cm}$, $R_m(Pb) = 18 \text{ g/cm}^2 \sim 1.6 \text{ cm}$.

12.18 Адронни лавини

Адронизацията е процес, аналогичен на образуването на електромагнитна лавина, който се осъществява при високи енергии, при което силното взаимодействие взема връх над електромагнитното. При това, вместо радиационната дължина на вълната X_0 ще използваме ядрената дължина λ_I . Друго, което трябва да се отбележи е, че при електромагнитно взаимодействие и високи енергии, ъглите между образуваните се частици (e^- и e^+) са много малки, т.е. те летят близо едни до други. При силно взаимодействие това не е така, там p_{\perp} е много по-голям.

Особености при адронизация :

- адронната лавина е с по-голяма дължина $\lambda_I > X_0$ (6-7 пъти). Добра дължина на адронен калориметър

е $(10 - 12)\lambda_I$, което гарантира, че 98% от енергията остава в калориметъра.

- адронната лавина е по-широка

$$p_{\perp}^h > p_{\perp}^{e.m.}$$

- адронната лавина има и EM компонента (заради π_0)

$$\pi_0 \longrightarrow 2\gamma \longrightarrow EM \text{ showers}$$

$$E_{e.m.} = 0.11 \ln E_0 \text{ [GeV]} \quad (18.65)$$

- невидима енергия

Нека разгледаме реакцията $n + A \longrightarrow p + B$

Част от енергията, която носят неутроните отива в кинетична енергия на протоните, а останалата част отива в т.н. енергия на връзката (binding energy). Тъй като се осъществяват ядрени превръщания и самите процеси стават вече в самите ядра, то тази енергия на свързване (ЕСв) е доста голяма. Ние можем да броим протоните и да отчетем цялата енергия, която те носят, докато ЕСв не може да се детектира и остава загубена за експериментатора. Точно тази енергия се нарича невидима.

12.19 Адронни лавини

Адронизацията е процес, аналогичен на образуването на електромагнитна лавина, който се осъществява при високи енергии, при което силното взаимодействие взема връх над електромагнитното. При това, вместо радиационната дължина на вълната X_0 ще използваме ядрената дължина λ_I . Друго, което трябва да се отбележи е, че при електромагнитно взаимодействие и високи енергии, ъглите

между образуващите се частици (e^- и e^+) са много малки, т.е. те летят близо едни до други. При силно взаимодействие това не е така, там p_{\perp} е много по-голям.

Особености при адронизация :

- адронната лавина е с по-голяма дължина
 $\lambda_I > X_0$ (6-7 пъти). Добра дължина на адронен калориметър е $(10 - 12)\lambda_I$, което гарантира, че 98% от енергията остава в калориметъра.
- адронната лавина е по-широка
 $p_{\perp}^h > p_{\perp}^{e.m.}$
- адронната лавина има и EM компонента (заради π_0)

$$\pi_0 \longrightarrow 2\gamma \longrightarrow EM \text{ showers}$$

$$E_{e.m.} = 0.11 \ln E_0 \text{ [GeV]} \quad (19.66)$$

- невидима енергия

Нека разгледаме реакцията $n + A \longrightarrow p + B$

Част от енергията, която носят неутроните отива в кинетична енергия на протоните, а останалата част отива в т.н. енергия на връзката (binding energy). Тъй като се осъществяват ядрени превръщания и самите процеси стават вече в самите ядра, то тази енергия на свързване (ЕСв) е доста голяма. Ние можем да броим протоните и да отчетем цялата енергия, която те носят, докато ЕСв не може да се детектира и остава загубена за експериментатора. Точно тази енергия се нарича невидима.

12.20 Електромагнитни и адронни калориметри

Калориметрите се използват за измерване на енергията на частиците. Имаме два основни типа калориметри:

Material	Z	A	ρ [g/cm ³]	X_0 [g/cm ²]	λ_a [g/cm ²]
Hydrogen (gas)	1	1.01	0.0899 (g/l)	63	50.8
Helium (gas)	2	4.00	0.1786 (g/l)	94	65.1
Beryllium	4	9.01	1.848	65.19	75.2
Carbon	6	12.01	2.265	43	86.3
Nitrogen (gas)	7	14.01	1.25 (g/l)	38	87.8
Oxygen (gas)	8	16.00	1.428 (g/l)	34	91.0
Aluminium	13	26.98	2.7	24	106.4
Silicon	14	28.09	2.33	22	106.0
Iron	26	55.85	7.87	13.9	131.9
Copper	29	63.55	8.96	12.9	134.9
Tungsten	74	183.85	19.3	6.8	185.0
Lead	82	207.19	11.35	6.4	194.0
Uranium	92	238.03	18.95	6.0	199.0

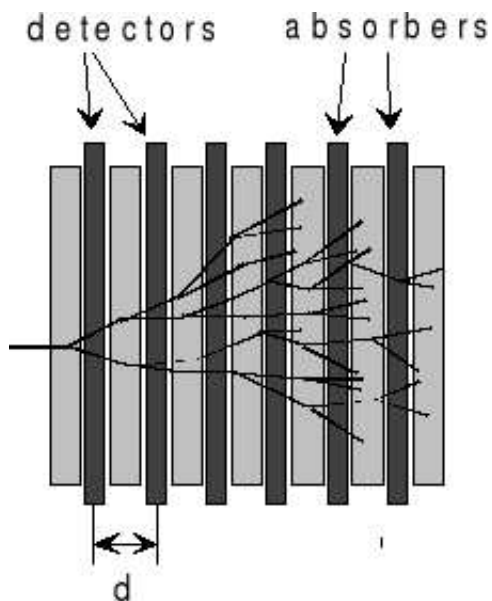
Фигура 12.43: Характеристики на различни материали, които се използват в калориметрите

1. Хомогенни калориметри: Представяват кристали, свързани с ФЕУ. Типичната им дължина е около $25 X_0$.
2. Семплинг калориметри или сандвичов тип: Представяват последователно наредени абсорбери и сцинтилатори. Абсорбера е с голям атомен номер, там се развива лавината. Енергията, която се отставя там, остава невидима. Активния елемент е сцинтилатора. Той е с малък атомен номер. Можем да премерим енергията, която се депозира там.

12.20.1 Разделителна способност по енергии

Относителната грешка, с която мерим енергиите е:

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{a}{\sqrt{E}} \oplus \frac{a}{E} \oplus c \quad (20.67)$$



Фигура 12.44: Семплинг калориметър

$$a \oplus b = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (20.68)$$

с параметри a, b, c , които съответствуват на :

1. a стохастичен (или *sampling* член, ако калориметъра е *sampling* тип), а параметърът a съответствува на статистически флуктуации. т.к. процесите са случайни (има флуктоации в развитието на лавината), дори да имаме една и съща първоначална енергия пак ще наблюдаваме размазване на сигнала. Причината за съществуването на този член е физиката на процесите. При *sampling* калориметрите имаме втори източник на такива статистически флуктоации. Т.к. при този тип калориметри част от енергията е невидима т.е. погълнала се е в абсорбера, въпросът е как се разпределя енергията между абсорбера и сцинтилаторите.
2. b параметризира шумовете на електрониката
 - шумове на фотодетектори и електрониката

- приноси в енергията от частици, които не са генетично свързани с интересуващото ни събитие. Това може да е частица от предишно събитие или инцидентно преминаваща частица.

3. c е константен член, който се дължи на :

- проблеми в конструкцията на детектора
- нееднородност в събирането на сигнала
- относителни грешки при калибрирането на клетките една спрямо друга
- флуктуации в електромагнитните компоненти на адронните лавини
- утечки
- при адронните калориметри имаме адронна и електромагнитна компонента, но развитието на лавината е случаен процес. Не знаем каква част на лавината е електромагнитна и каква - адронна.

12.20.2 Електромагнитни калориметри

Една от причините, даваща основен принос към стохастичния член на разделителната способност по енергии на електромагнитния калориметър са т.н. присъщи или вътрешни флуктуации. Ако W е енергията за раждане на двойка електрон-йон (или фотон), то броят на двойките е $n = E/W$

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \sqrt{\frac{W}{E}}, \quad (20.69)$$

реално

$$\frac{\sigma}{E} = \sqrt{\frac{FW}{E}}, \quad (20.70)$$

където F е факторът на Фано ($F < 1$), който зависи от конкретните процеси, включително и тези, които не са свързани пряко с отделянето на енергия (например фононни възбуждания).

Семплинг калориметри

Броят на заредените частици в лавината, пресичащи активната плоскост е

$$n = E/\Delta E_{abs}, \quad (20.71)$$

където ΔE_{abs} е енергията, която губи MIP в абсорбера.

$$\Delta E_{abs} = t_{abs}(dE/dx), \quad (20.72)$$

където t_{abs} е дължината на абсорбера в радиационни дължини на вълната $[X_0]$.

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\sqrt{n}}{n} \sim \frac{\sqrt{t_{abs}}}{\sqrt{E}} \quad (20.73)$$

Общата формула е

$$\frac{\sigma_s}{E} = \frac{5\%}{\sqrt{E}}(1 - f_{samp})\Delta E_{cell}^{0.5(1-f_{samp})}, \quad (20.74)$$

където ΔE_{cell} е енергията депозирана в една клетка т.е. в една активна и една пасивна плоскост, а f_{samp} е семплинг fraction

$$f_{samp} = 0.6f_{MIP} = 0.6 \frac{d(dE/dx)_{act}}{[d(dE/dx)_{act} + t_{abs}(dE/dx)_{abs}]}, \quad (20.75)$$

където d е дебелината на активната плоскост.

Пример : За 1 cm Pb и 1 cm Si $f_{MIP} \approx 13.5\%$.

Опитваме се да пазим f_{samp} по - малки от флуктоациите в лавините.

12.20.3 Адронни калориметри

Знаем, че за електромагнитни калориметри видимата енергия, която мерим е пропорционална на началната енергия на частицата.

$$E_{vis} = eE_{init} ; e = f_{samp} \quad (20.76)$$

За адронни калориметри формулата се трансформира до :

$$E_{vis} = eE_{e.m.} + \pi E_{ch} + nE_n + NE_{nucl}, \quad (20.77)$$

където $E_{e.m.}$ е енергията, която се отделя при развитието на лавини; E_{ch} е енергията от заредени частици; E_n е енергията от неутрони, която сме успели да премерим; E_{nucl} е енергията за ядрени реакции и тя може да достигне $\sim 40\%$ от E_{vis} , Хомогенни адронни калориметри не се правят. Флуктуациите в E_{vis} се дължат на семплинг флуктуации и присъщи, вътрешни флуктуации ($\delta E_{e.m.}$, δE_{ch} и т.н.)
 \Rightarrow

$$\sigma = \sigma_{samp} + \sigma_{intr}, \quad (20.78)$$

където $\sigma_{samp} = \frac{a}{\sqrt{E}}$; $a \approx 0.1\sqrt{\Delta E_{cell}}$, а $\sigma_{intr} = \frac{a_{intr}}{\sqrt{E}} + c$. ΔE_{cell} е енергията, депозирана в една клетка от калориметъра. С е свързан с това, как се разпределя енергията между електромагнитната и адронната част.

$$E_n = [eF_0 + h(1 - F_0)]E, \quad (20.79)$$

където $F_0 = E_{e.m.}/E$.

Нека имаме електрон e и пион π . Нека са с една и съща енергия, но двата типа енергия се виждат по различен начин. Важна характеристика на адронния калориметър е:

$$\frac{e}{\pi} = \frac{(e/h)}{[(e/h)F_0 + (1 - F_0)]}, \quad (20.80)$$

където числителят не зависи от енергията, а знаменателят зависи чрез F_0 .

При $\frac{e}{h} = 1$ имаме компенсиращ калориметър, т.е. виждаме еднакво енергията от пиони и електрони (електромагнитният сигнал се подтиска, но това се прави рядко). При $\frac{e}{h} \neq 1$ имаме некомпенсиращ детектор.

$$F_0 = 0.11 \ln E \quad (20.81)$$

- 42 % (invisible) за разрушаване на ядрата.
- 43 % заредени частици
- 12 % неутрони
- 3 % γ кванти с енергии $\sim 1 \text{ MeV}$

Идентификация на частици става по

- съотношение (E_{ECAL}/E_{HCAL}) e , π , $jets$
- ширината на лавината



Фигура 12.45: Адронен калориметър на CMS

Глава 13

Ускорители

13.1 Ускорители: Принципи на действие, видове, основни характеристики

Основният принцип за изучаване на структурата на ядрата и частиците остава непроменен още по време на първите опити на Ръдърфорд (1911г.) за откриване на атомното ядро. С времето физиците са намерили различни начини за получаване на снопове от високоенергетични частици, които при сблъсък с различни мишени дават събития спомагащи за изследването на микрообектите. През 1919 г. Ръдърфорд осъществил в лабораторни условия първата ядрена реакция:



в която α -частицата била получена при разпад на естествени източници (Ra, Th). В този случай снопа от α -частици бил с малка интензивност и неколимиран. След тези първи успехи в изучаване на ядрата започнала епохата на създаване и развитие на специални машини - ускорители за изследване на сноп частици с висока интензивност, с малък уширение по ъгли и по импулси. Колкото е по-голяма енергията (импулса) на ускорените частици, толкова на по-малки разстояния се приближават частиците към мишената. То-

ва дава възможност по характеристиките на взаимодействията на микрообектите да се получи информация за тяхната структура при малки разстояния, например, в интервала от 1 MeV до 1 TeV енергия на частицата могат да се изследват структури на обекти от “размери” ($\approx 10^{-12}$ cm) на атомното ядро до разстояния $r \leq 10^{-16}$ cm.

13.1.1 Ускорители с пряко действие

Такива са генераторите на Ван-де-Граф (1931г) и Кокрофт-Уолтън (1932г). Те ускоряват частици до енергии $E_p \approx 10 \text{ MeV}$ (в момента максималните енергии достигнати с помоща на такива ускорители са от порядъка на 30 MeV). Характеризират се с непрекъснато действие, стабилност и голяма прецизност:

$$\frac{\delta E}{E} \lesssim 0,01\% \quad (1.2)$$

Историята на развитието на ускорителната техника започнала в средата на 20-те години на 20 век, когато са създадени ускорители на пряко действие при енергии до няколко стотин килоелектрон волти (keV). Те представляват съчетание от източник на постоянно високо напрежение (генератор) и ускорителна вакуумна тръба, в която заредени частици преминават от единия до другия полюс на генератора, т.е. придобиват енергия съответстваща на напрежението на съответния полюс на генератора ($U \leq 30 \text{ MV}$).

Най-употребяваните от този тип ускорители са генератора на Ван дер Граф (1931 г.) и генератора на Кокрофт-Уолтън (1932 г.). С тяхна помощ се получават ускорени снопове от протони с $E_p \leq 10 \text{ MeV}$. Използват се за презареждане на ускорявания снап и също така за увеличаване на кинетичската енергия до 20 MeV/нуклон . Съществени достойнства на тези ускорители се явяват: непрекъснато действие, висока стабилност на енергии ($\Delta E/E \leq 0.01\%$) и голяма интензивност на ускоряваните частици. Тези генератори на

Ван дер Грааф и Кокрофт-Уолтън имат широко приложение в ядрената, атомната и молекулярната физики и също така се използват като инжектори в ускорители на по-високи енергии. Възможните енергии на ускоряваните частици ограничават максималните възможни стойности на напрежение ($U_{max} \approx 30\text{MeV}$) на полюсите на генераторите.

Снопове частици с високи енергии ($E \geq 100\text{MeV}$) се получават с помощта на линейни и циклични ускорители, в които ускоряването на частиците се реализира с променливо високочестотно (ВЧ) електрично поле. В този случай частиците трябва да се движат в резонанс с изменящото се поле. Частиците могат да наберат голяма енергия преминавайки многократно между ускоряващите промеждутъци дори и при не много високи напрежения ($U \approx 20\text{kV}$).

13.1.2 Резонансни ускорители

Използват се за ускоряване на частици до енергии $E \gtrsim 100\text{MeV}$. Те биват линейни и циклични, като използват високочестотно електромагнитно поле.

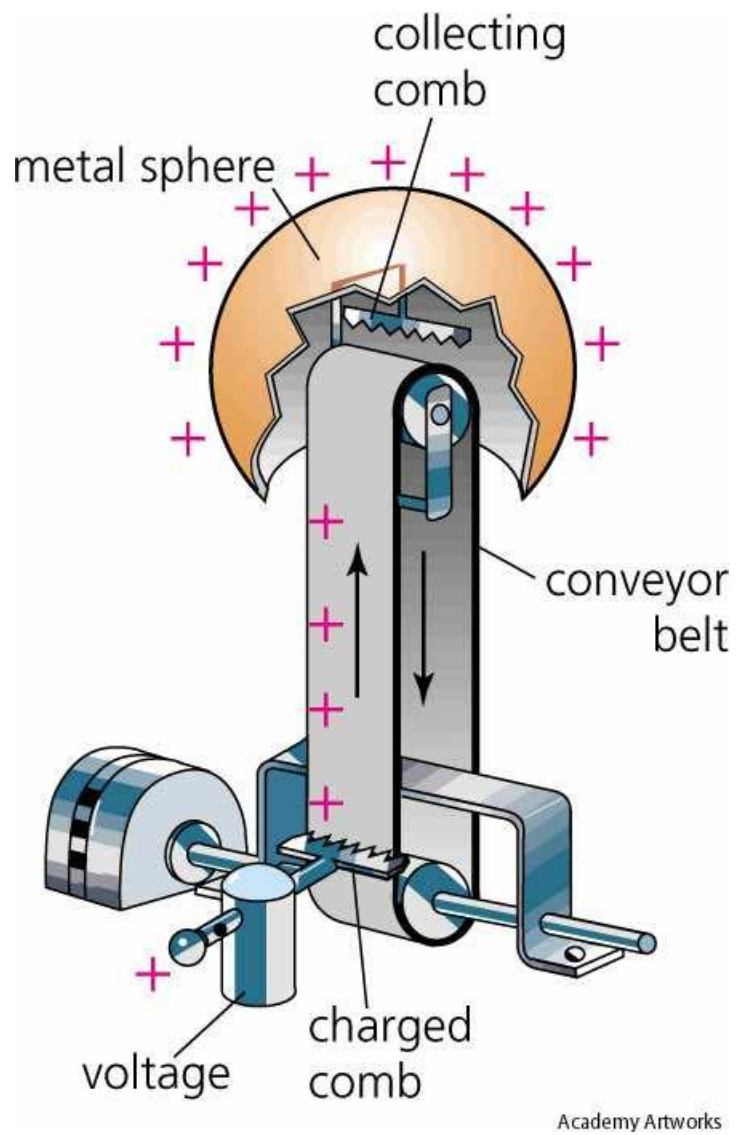
$$T = \frac{2\pi E}{eB_0} = \frac{2\pi m}{eB_0} \quad (1.3)$$

$$m = m_0\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (1.4)$$

В тях се използва $T_y = T$. Пример за подобен ускорител е циклотрона (1932г).

$$\omega_y = \frac{2\pi}{T} \quad (1.5)$$

$$R = \frac{mV}{eB_0} = \frac{p}{eB_0} \quad (1.6)$$



Фигура 13.1: Генератор на Ван дер Грааф



Фигура 13.2: Генератор на Ван дер Грааф

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{e^2}{2m_0} B_0^2 R_{max}^2 \quad (1.7)$$

При $R = 1m$ достижимата енергия е $E_k \approx 20MeV$.

13.1.3 Синхротрон, фазотрон, синхрофазотрон

За да има резонанс при въртенето на частицата в кръг трябва

$$E = \frac{eBn}{\omega_y}, \quad (1.8)$$

където n е кратност на честотата.

За да увеличим енергията имаме 2 подхода:

1. Да намалим ω_y . Такъв ускорител се нарича фазотрон.
2. Да увеличим B . Такъв ускорител се нарича синхротрон
3. Ако изменяме едновременно както ω_y , така и B , то този ускорител е синхрофазотрон.

Принципът на работа на цикличните ускорители се базира на комбинация от ВЧ-ускорения и отклонения на заредени частици в магнитно поле (фиг. 13.3). В резултат е възможно многократно използване на ускоряващите промеждутъци на ускорителя. Периодът на въртене (T) на частица със заряд (e) е свързан с магнитното поле (B_0) по следния начин:

$$T = 2\pi \frac{E}{eB_0} = 2\pi \frac{m}{eB_0}, \quad (1.9)$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \nu^2}} = m_0 \gamma c^2, \quad (1.10)$$

където m_0 , ν и γ са маса на покой, скорост и лоренц-фактор съответно ($E = M$ - пълната енергия). За нерелативистка частица ($\nu \ll c$)

$E \approx m_0$ и периода на въртене (T) не зависи от скоростта на частицата при постоянно B_0 . Затова, ако периодът (T) е кратен на периода (T_y) на ускоряващото поле, то се наблюдава резонанс между завъртането на частицата и изменението на ускоряващото напрежение. Енергията на частицата при всяко нейно минаване през ускоряващия промеждутък се увеличава с:

$$\Delta E = eU_{max} \cos \phi, \quad (1.11)$$

където U_{max} е максималното напрежение, а ϕ - фазата на електричното поле. На този принцип е бил построен циклотрона (1932 г.) - ускорител с непрекъснато действие с постоянно магнитно поле и ускоряващо променливо електрично поле с фиксирана честота ($\omega_y = 2\pi/T$). В циклотрона частицата се ускорява от нулева енергия до максимална като се движи по спираловидна траектория, чийто радиус нараства

$$R = \frac{mV}{eB_0} = \frac{p}{eB_0} \quad (1.12)$$

до R_{max} .

Крайната кинетична енергия на ускоряваната частица е

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{e^2}{2m_0} B_0^2 R_{max}^2, \quad (1.13)$$

където R_{max} - радиус на магнита на ускорителя.

Ускорението продължава до този момент до който релативистичните зависимости влизат в сила (увеличаване на масата на частицата, респективно нарушаване на отношението T и T_y). Поради тази причина в тези циклотрони протоните могли да се ускорят до $E_k \approx 20 MeV$ при $R \approx 1m$. Оказало се, че при конкретни модификации на циклотроните можело ускоряваните протони да достигнат до няколко стотин мегаелектрон волта, но било невъзможно да се достигнат по-високи енергии.

След откритието на В.И. Векслер, принципа на автофазировката, ограниченията на ускорителите до този момент отпадат.

13.2 Принцип на автофазировката

Същността на принципа на автофазировката за заключава в следното: Съгласно (1.9)

$$E = eB \frac{n}{\omega_y}, \quad (2.14)$$

където n - цяло число, кратност на честота и е равно на отношението на ω_y към честота на обръщане на частицата в магнитното поле. Енергията на частицата автоматично приема стойност близка до резонансното при достатъчно бавно изменение във времето на $\omega_y(t)$ и $B(t)$ - това се нарича механизъм на автофазировка. На фиг. 13.4 е показана кривата на ускоряващото напрежение ($eV_0 \cos \phi$). Нека ϕ_0 е “равновесната фаза”, т.е. фазата на частицата намираща се в резонанс на с ускоряваща поле. Ако частицата случайно попадне във фаза $\phi_1 < \phi_0$, то тя придобива енергия по-малка от равновесната и нейния период (фиг. 13.3) намалява. Частицата изостава по фаза, т.е. приближава се към равновесие ϕ_0 . Точно обратното, изоставащата частица ($\phi_2 < \phi_0$) придобива излишната енергия, нейния период се увеличава и тя отива в ускоряващия промеждутък, следователно се приближава към равновесното състояние. Изместването по фаза на неравновесната частица оказва ограничения както и изместването на една страна спрямо ϕ_0 променя движението в обратно направление. Неравнестите частици започват да извършват колебания по ϕ около ϕ_0 (фазови колебания) и за конкретен период колебания те набират точно енергията отговаряща на равновесната. В посока на движещата се частица се образува така наречената област на надлъжна устойчивост, в която се ускорява група от частици (bunch).

На орбитат на пръстоновидния ускорител може да бъде сформирано голям набор от надлъжно устойчиви области (няколко десетки) и позволяват да се получи висока интензивност (до 10^{14}) ускорени частици с висока енергия. В противен случай всяко случайно изменение на фазата на частиците, свързано с тяхното разсейване с остатъчния газ във вакуумната камера или други флуктуации, биха довели до загуба на всички частици при ускорителния процес. Откритието на принципа на автофазировката довело до поява на нов тип ускорители. Съгласно (фиг. 2.14), за увеличаването на равновесната енергия е необходимо да се намалява честотата - фазотрон (фиг. 13.5), или увеличаване на магнитното поле - синхротрон (фиг. 13.6), при увеличаване на магнитното поле и намаляване на честота - синхрофазотрон (фиг. 13.7), а при увеличаване на кратността на ускорението - микротрон (фиг. 13.9) съответно.

Автофазировката обезпечават устойчивост на движението на частиците в азимутално направление (в направление на тяхната траектория). За успешната работа на ускорителя е необходимо да се осигури устойчивост на движението на частиците (фокусировка) в напречно направление, перпендикулярно на тяхната орбита. Това се постига, например, в случай на слабо намаляване на магнитното поле с увеличение на радиуса на орбитата:

$$B = B_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^n \quad (2.15)$$

с $0 < n < 1$ (мека фокусировка). Синхрофазотрона (виж. фиг.13.8 и фиг. 13.7) с $E_p = 10 GeV$ се явява ускорител със мека фокусировка. Магнитното поле на ускорителя расте заедно с енергията на ускоряващите се частици, поради което радиуса на орбитата на частиците не се променя. При мека фокусировка размерът на ускорявания сноп е голям, поради което напречното сечение на вакуумната камера на ускорителя представлява от порядъка на $\sim 1 m^2$, което от своя стра-

на води до обща маса на магнита на ускорителя 36000 тона! Затова за създаването на ускорител на високи енергии се прилага дуг тип фокусировка - силна фокусировка (1952 г.). Силната фокусировка представлява участък от пръстеновидния магнит със силно намаляващо и силно нарастващо по радиуса поле водещо до намаляване на напречния размер на снопа до няколко квадратни сантиметра. Всички ускорители на $E \gtrsim 100 GeV$ построени с използвания метод на силна фокусировка са позволили съществено намаляване на масата на магнита.

Този вид, принципната схема за получаване на енергетично заредени частици остава непроменен - ускоряването на частици е за сметка на високочестотно електрично поле, а конфигурацията на ускорителя (линеен или пръстеновиден) се избира в зависимост от типа и енергията на частицата. Движението на леки частици в пръстеновиден ускорител е съпроводено с електромагнитно (синхротронно) лъчение (фиг.13.10), мощност (P), която расте с енергията на частиците (E):

$$P = \frac{2}{3} \frac{Z^2}{R^2} \left(\frac{E}{m_0} \right)^4, \quad (2.16)$$

където Z е електричният заряд на частицата, а R - радиуса на кривината на траекторията на частицата. Следователно при ускоряване на леки частици в пръстеновиден ускорител е необходимо наличие на голям R и коенсирание на загуба на енергията на излъчване. Пример за такова съоръжение е ускорителя на електрони и позитрони е LEP, намира се в CERN (Европейска организация за ядрени изследвания), при енергии до 100 GeV и с периметър 27 km. Загубата на енергия на излъчване за едно завъртане на снопа е 2,56 GeV. Мощността на излъчване на двата снопа достига 47 MW ($E = 50 GeV$) и за нейната компенсация в ускорителя е поставена мощна високочестотна система. Построяването на пръстеновидни машини за

леки частици за тяхното ускорение до още по-високи енергии е вече нецелесъобразно, понеже катастрофален ръст на загуба на синхротронно лъчение би имало и следователно ще се наложи да се увеличи размера на установката и използването на мощност.

При линейните ускотители се ускорява само един сноп частици, а при ускорители, при които се ускоряват два снопа частици се наричат *colliders* (ускорители на насрещни снопове).

С помощта на линейните ускорители се изучават взаимодействията на ускорения сноп частици с маса m_1 до енергии E с неподвижна мишена, която се състои се от частици с маса m_2 . От квантовата механика е известно, че информация за структурата на частиците на разстояние r_{12} може да бъде получена от предадената енергия (импулс) в процеса на взаимодействие:

$$\Delta E r_{12} \sim \hbar \quad (2.17)$$

където (2.17) - е известното съотношение на неопределеността.

Една неголяма част от енергията на ускорени частици може да бъде изразходвана във вид на взаимодействие, понеже голяма част от тяхната E отива за движението на цялата система като цяло, а това не носи информация за структурата на частиците. Това може да се види от следното съотношение, получено на базата на закона за запазване на енергията и импулса:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E \approx 2m_2E, \quad (2.18)$$

където втората част от уравнението е вярна при $E \gg m$. Тук s е квадратът на пълната енергия в система център на масата (СЦМ), определящ полезната енергия (\sqrt{s}), която може да бъде изразходвана за взаимодействие. Отношението:

$$R = \frac{\sqrt{s}}{E} = \frac{\Delta E}{E} \approx \frac{\sqrt{2m_2}}{\sqrt{E}} < 1 \quad (2.19)$$

и при $E \ll m - R \ll 1$. Наприме, при стълкновение на протон, ускорен до 200 GeV, с протон в покой имаме $R \approx 1$, т.е. само 10 % енергия ефективно може да се използва за получаване на нужната информация. Този факт е бил веднъж забелязан от физиците и естествения изход бил създаването на ускорител с два насрещни снопа, например, с еднакви енергии E . В този случай СЦМ на взаимодействащите частици съвпадала с лабораторната система и цялата енергия на ускорение ($\sqrt{s} = 2E$) може да бъде използвана за взаимодействие. Необходими са били 30 години, за да се развие техниката и физиката на ускорителите и да се създаде ускорител на насрещни снопове (1965 г.).

Ускорителите с насрещни снопове са лидери по полезна енергия във връзка със съотношението (2.19). Действително, максималната енергия достигната на линеен ускорител е $\approx 1TeV$ (FNAL, USA) като в същото време пълната енергия (\sqrt{s}) за насрещни снопове на същия ускорител е $\sqrt{s} \approx 2TeV$. Ако се изчисли така наречената еквивалентната енергия E_{eq} , която трябва да има и линейния ускорител, то полезната енергия би била равна на $\sqrt{s} = 2TeV$, то от (2.19) се получава:

$$E_{eq} \approx \frac{\sqrt{s}}{2m} \cong \frac{4}{2} \cdot 10^{-3}TeV \approx 10^3TeV \quad (2.20)$$

Тази стойност E_{eq} на два порядъка е по-голям от най-грандиозния проект създаден за линеен ускорител ($E = 20TeV$). Оттук е очевидно, че ускорителите на насрещни снопове винаги ще бъдат лидери по енергии и вероятно в бъдеще ще бъде достигната енергия $\sqrt{s} \approx 40TeV$, т.е. ще имаме възможност да изучаваме структурата на микросвета на разстояния до $10^{-18}cm$.

13.2.1 Автофазировка

Нека φ е ъгъла между ω_y и преминаването на частицата от едната полусфера в другата. Тогава за един период имаме:

$$\delta E = eV_{max} \cos \varphi \quad (2.21)$$

При достатъчно бавно изменение на $\omega(t)$ и $B(t)$ енергията на частицата автоматично приема стойности близки до резонансната.

13.2.2 Фокусировка на снопа**13.2.3 Мека фокусировка**

В магнитите \vec{B} се прави в зависимост от радиуса. Най често има вида:

$$\vec{B} = B_0 \frac{R_0^n}{R} \quad (2.22)$$

като $0 < n < 1$.

По този начин външните частици се закривяват повече, а вътрешните по-малко т.е се доближават към центъра на снопа. Използват се вакуумни тръби, които достигат размери от $1m \times 60cm$ и маса $m_{\frac{1}{4}} \approx 36t$.

13.2.4 Твърда фокусировка

Нейния принцип се състои в редуване на магнити със силно намаляващо и силно нарастващо поле по R.

За ЛНС магнитното поле в тези магнити е $\approx 8,5T$ х.

13.2.5 Излъчване

При своето движение по кръгови орбити частиците излъчват синхротронно, като за 1 период излъчената мощност е:

$$P = \frac{2}{3} \frac{z^2}{R^2} \frac{E^4}{m_0} \quad (2.23)$$

Конкретно за LEP това излъчване е:

$$d = 9km, L = 27km, \text{ за } E = 2x45GeV$$

За 1 оборот един електрон губи 2,56GeV. Ако разгледаме сумарния ток, който е $I = 9,15MA$, то намираме, че излъчената мощност е $P \approx 47MW$.

13.2.6 Ускорители на насрещни снопове

Разглеждаме реакция с неподвижна мишена:

$$S = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E \approx 2m_2E \quad (2.24)$$

където E е енергията на снопа.

Дефинираме полезна енергия:

$$R = \frac{\sqrt{S}}{E} \quad (2.25)$$

За фиксирана мишена имаме $R = \frac{\sqrt{2m_2}}{\sqrt{E}}$. При

$$p = 200GeV \implies R = 0,1 \quad (2.26)$$

R може да се повиши ако се използват ускорители на насрещни снопове. Нека разгледаме 2 частици с импулси

$$p_1 = (E, \vec{p}), \quad p_2 = (E, -\vec{p}) \quad (2.27)$$

Тогавата ще имаме:

$$S = (p_1 + p_2)^2 = 4E^2, \quad R = 2 \quad (2.28)$$

Да разгледаме ускорителя Tevatron, във FNAL. Той ускорява протони и антипротони до енергия 1TeV . За него имаме $\sqrt{S} = 2\text{TeV}$. Ако мишената беше фиксирана, то необходимата ни енергия би била $E = 2 \cdot 10^3 \text{TeV}$

13.2.7 Светимост

Разглеждаме реакция между елементарни частици. Броят взаимодействия е пропорционален на сечението за реакция:

$$N = L\sigma \quad (2.29)$$

Коефициента L се нарича светимост. Нека в първия сноп има n_1 , а във втория n_2 на брой частици. Означаваме с f честотата на пресичане на двата снопа. Тогава

$$L = \frac{n_1 n_2}{s} f, \quad (2.30)$$

където s е сечението на сноповете.

$$s = 4\pi\sigma_x\sigma_y \quad (2.31)$$

$$L = \frac{n_1 n_2}{4\pi\sigma_x\sigma_y} f \quad (2.32)$$

Ако разгледаме продължителен интервал от време, то можем да дефинираме интегрална светимост:

$$L_{int} = \int L dt \quad (2.33)$$

Ако $L = const$, то $L_{int} = LT$ с размерност pb^{-1} . За ускорителя LEP $\ell_{bunch} = 1\text{cm}$, $l_{LEP} = 26,66\text{km}$, $n_{bunch} = 30 \cdot 10^{10}$, в ускорителя се движат 4 bunch-a, като размерите им са

$$\sigma_x = 200 \mu\text{m}, \quad \sigma_y = 8 \mu\text{m}. \quad (2.34)$$

Да пресметнем

$$L = \frac{n_1 n_2}{4\pi\sigma_x\sigma_y} = \frac{3 \cdot 10^{20} \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 10^6}{4\pi 200 \cdot 10^{-4} \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 22} \approx 2 \cdot 10^{31} \quad (2.35)$$

В справочника има стойност $L = 2,4 \cdot 10^{31}$

13.3 Ускорители в CERN

- Синхроциклотрон

Работи в периода от 1957 до 1980 година. Ускорява протони до енергии 600MeV.

- Протонен Синхротрон

Ускорява протрони до 28 GeV. За инжектори му служат : LINAC - 50 MeV

Синхротрон: 100MeV

Диаметъра му е $d \approx 200m$.

- ISR - Пресичащи се натрупващи пръстени

Ускорител на насрещни снопове - протон-антипротон до енергии $2 \times 31 GeV$, като диаметърът у е $d \approx 300m$. Работи в периода 1971-1981 година, като времето за живот на снопа е няколко дни.

- SPS

Започва работа през 1976 година, като се използва и досега (като инжектор за по-мощни ускорители и самостоятелно). Неговият диаметър е $d = 2.2km$ и достига енергии до 450GeV.

Обозначение на експериментите:

WA+номер: West Area p, π^\pm ($\sim 200GeV$), WANF: ν_μ ($\sim 27GeV$)

NA+номер: North Area (slow+fast extraction)

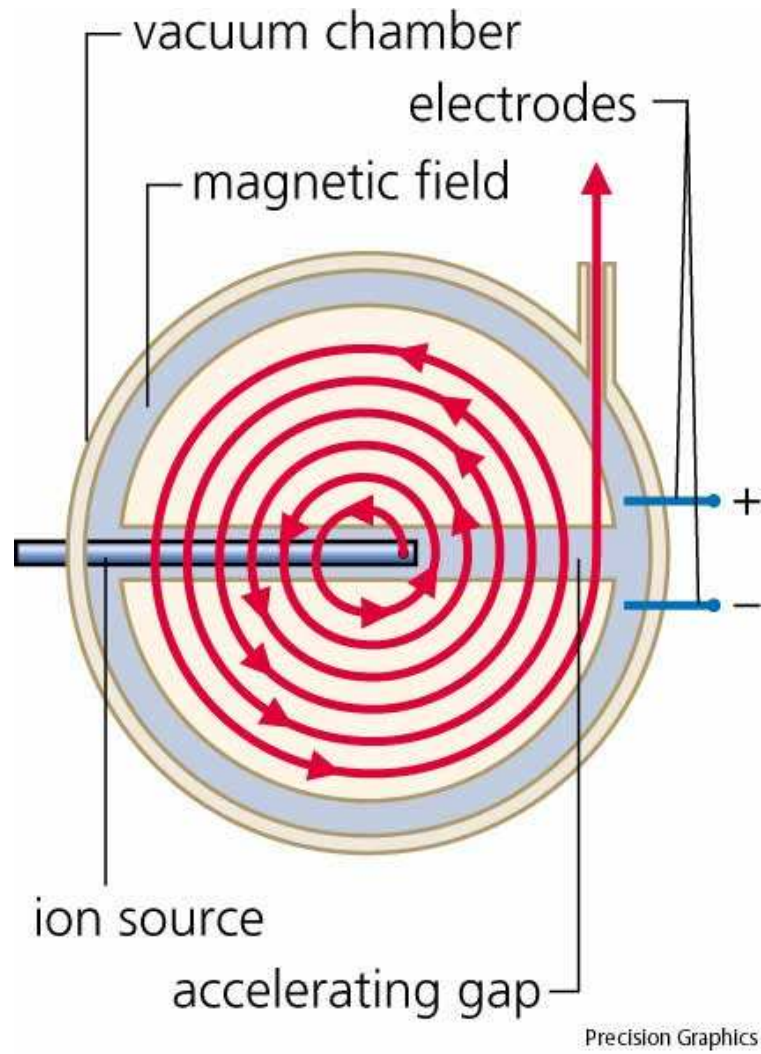
$Spp\bar{p}S$ включва антипротронен акумулатор (AA) със стохастично охлаждане. Започва работа през 1981, като двата снопа са с енергии $2 \times 270 \text{ GeV}$. На него са разположени детекторите $UA1, UA2$

- LEP

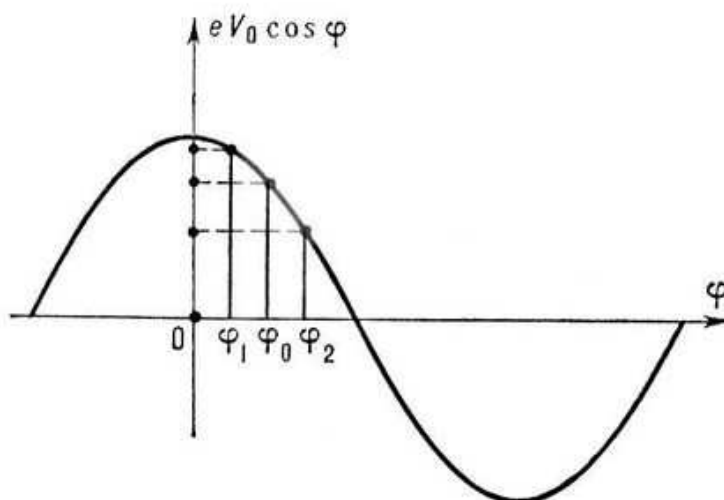
Пуснат е в експлоатация през 1989 година. Това е ускорител на насрещни снопове, като пусковата енергия е $2 \times 50 \text{ GeV}$. Има диаметър $d = 9 \text{ m}$, $l = 27 \text{ km}$, като цената му възлиза на $1.5 \times 10^9 \text{ CHF}$. На него са разположени детекторите:

$$\begin{aligned} ALEPH &- 3000t, 500000 \text{ CHF} \\ DELPHI &- 3500t, 200000 \text{ CHF} \\ L3 &- 7500t, \\ OPAL &- 2700t, \end{aligned}$$

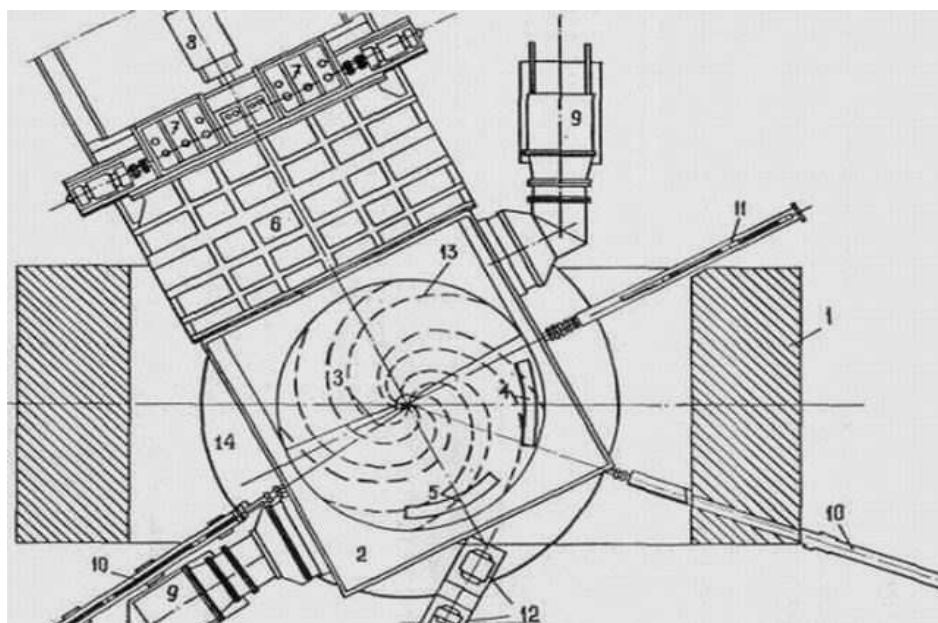
Ускорителя изразходва около 900 GWh годишно.



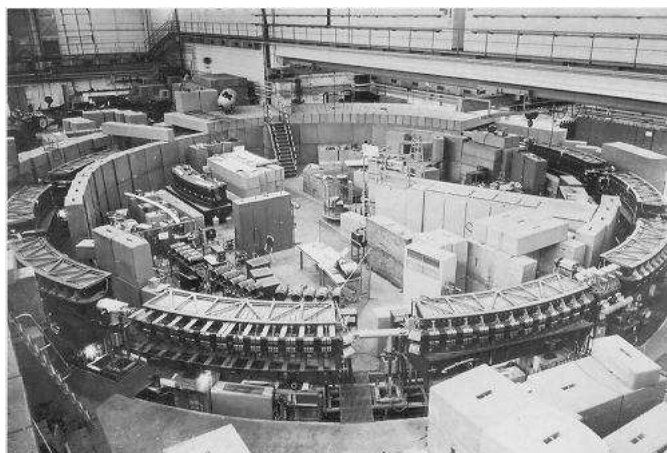
Фигура 13.3: Схема на движение на частица в циклотрон.



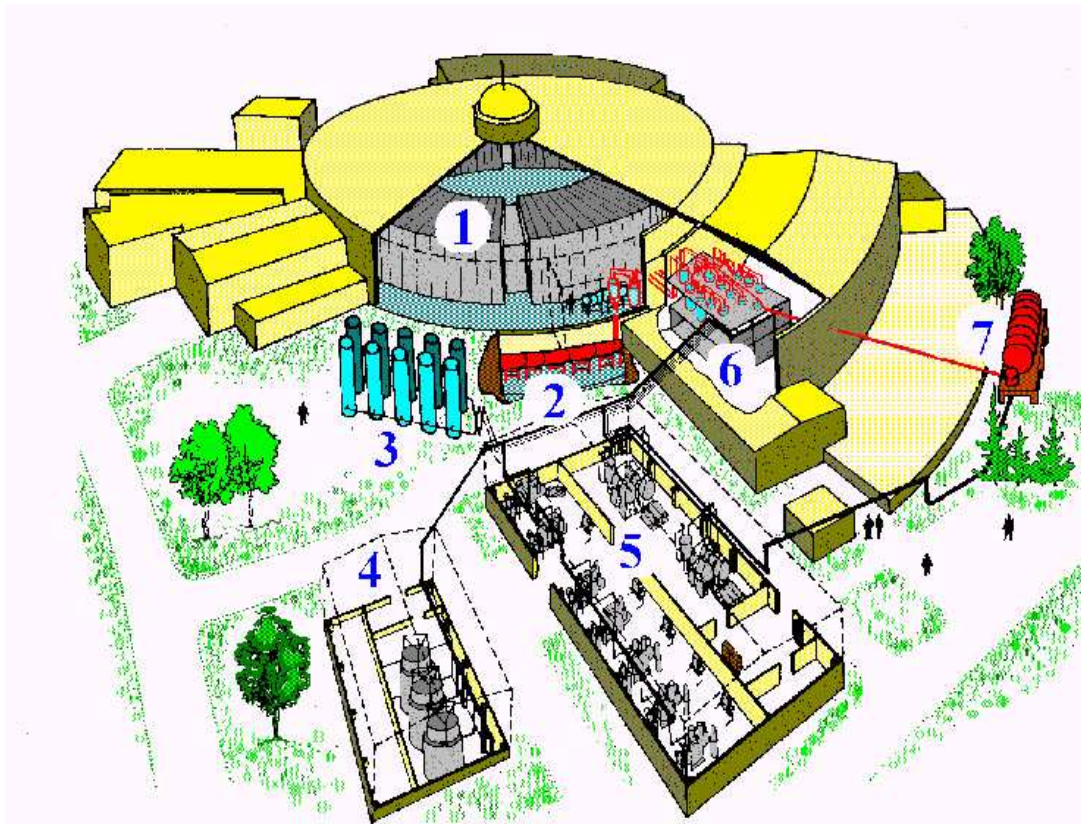
Фигура 13.4: Механизъм на автофазировка.



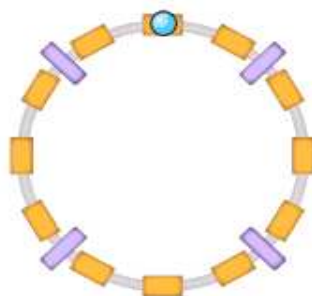
Фигура 13.5: Схематично представяне на фазотрона в Дубна



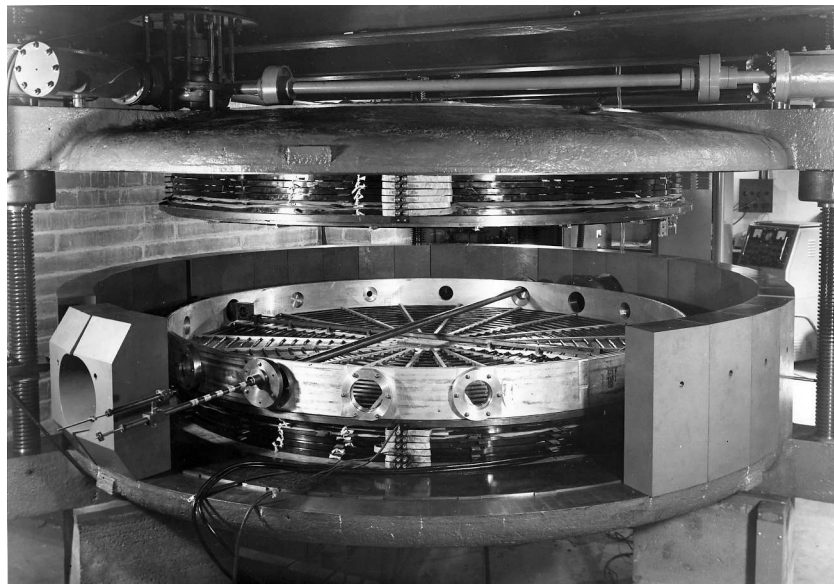
Фигура 13.6: Синхротрон на ELSA



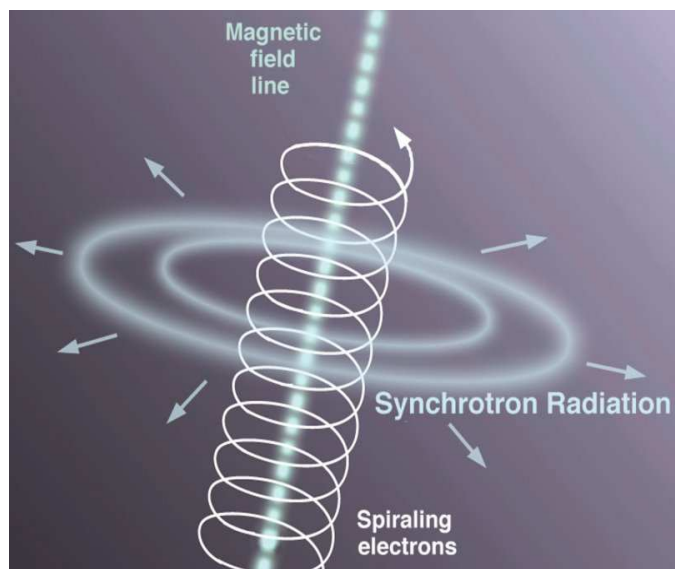
Фигура 13.7: Синхрофазотрон: 1- ускорител Nuclotron; 2- ускорител; 3-7 криогенна система. Този синхрофазотрон се в книгата на рекордите на Гинес като най-големия електромагнит в света. Магнитната система се състои от 4 квадранта с радиус 28 m и всеки от тях тежи по 36000 тона.



Фигура 13.8: Схематично представяне на синхрофазотрон



Фигура 13.9: Микротрон



Фигура 13.10: На тази фигура е представено електромагнитното (синхротронното) лъчение, което съпровожда леките частици ускоряващи се в пръстеновиден ускорит.

References

- [1] S.L. Glashow, Nucl. Phys. 22 (1961) 579.
- [2] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264.
- [3] A. Salam, in *Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm (Almqvist and Wiksells, Stockholm, 1969), p. 367.
- [4] S.L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. D2 (1970) 1285.
- [5] D. Espriu, *Perturbative QCD*, these proceedings;
A. Pich, *Quantum Chromodynamics*, lectures given at the 1994 CERN-JINR Summer School (Sorrento, Italy, September 1994).
- [6] W. Fetscher, H.-J. Gerber and K.F. Johnson, Phys. Lett. B173 (1986) 102.
- [7] T. Kinoshita and A. Sirlin, Phys. Rev. 113 (1959) 1652.
- [8] Particle Data Group, *Review of Particle Properties*, (2002).
<http://pdg.web.cern.ch/pdg/>
- [9] W.J. Marciano and A. Sirlin, Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 3629.
- [10] G. Danby et al., Phys. Rev. Lett. 9 (1962) 36.
- [11] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. 10 (1963) 531.
- [12] T.D. Lee and C.N. Yang, Phys. Rev. Lett. 4 (1960) 307.
- [13] H.J. Hasert et al., Phys. Lett. 46B (1973) 121.
- [14] T. Kinoshita (editor), *Quantum Electrodynamics*, Advanced Series on Directions in High Energy Physics, Vol. 7 (World Scientific, Singapore, 1990);
T. Kinoshita, Phys. Rev. D47 (1993) 5013.
- [15] J. Goldstone, Nuov. Cim. 19 (1961) 154.
- [16] P.W. Higgs, Phys. Rev. 145 (1966) 1156;
T.W.B Kibble, Phys. Rev. 155 (1967) 1554.
- [17] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B33 (1971) 173.
- [18] G. Arnison et al. (UA1), Phys. Lett. B122 (1983) 103; B126 (1993) 398;

- M. Banner et al. (UA2), Phys. Lett. B122 (1983) 476; B129 (1983) 130.
- [19] The LEP Collaborations and the LEP Electroweak Working Group, <http://lepewwg.web.cern.ch/LEPEWWG/stanmod/>
- [20] The LEP Collaborations, the LEP Electroweak Working Group and the SDL Heavy Flavour and Electroweak Groups, hep-ex/0112021v2, 2002.
- [21] M. Demarteau et al., CDF/PHYS/CDF/PUBLIC/2552 and D0 NOTE 2115.
- [22] J.J. Aubert et al., Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 1404;
J.E. Augustin et al., Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 1406; 1453.
- [23] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. 42 (1973) 652.
- [24] F. Abe et al (CDF), Phys. Rev. D50 (1994) 2966; Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 225.
- [25] K. Abe et al. (SLD), Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 25.
- [26] H. Burkhardt et al., Z. Phys. C43 (1989) 497.
- [27] M. Veltman, Nucl. Phys. B123 (1977) 89.
- [28] J. Bernabéu, A. Pich and A. Santamaría, Phys. Lett. B200 (1988) 569; Nucl. Phys. B363 (1991) 326.
- [29] A. Sirlin, Phys. Rev. D22 (1980) 971.
- [30] T. Appelquist and J. Carazzone, Phys. Rev. D11 (1975) 2856.
- [31] A.A. Akhundov, D. Yu. Bardin and T. Riemann, Nucl. Phys. B276 (1986) 1;
W. Beenakker and W. Hollik, Z. Phys. C40 (1988) 141;
B.W. Lynn and R.G. Stuart, Phys. Lett. B252 (1990) 676.
- [32] J.M. Benlloch et al., Z. Phys. C59 (1993) 471.
- [33] P. Vilain et al. (CHARM II), Phys. Lett. B335 (1994) 246.
- [34] A. Pich, *QCD Predictions for the τ Hadronic Width: Determination of $\alpha_s(M_\tau^2)$* , to appear in Proc. QCD 94 Workshop (Montpellier, 1994) [Valencia preprint FTUV/94-71].
- [35] W.J. Marciano, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 41 (1991) 469.

- [36] J.C. Hardy et al., Nucl. Phys. A509 (1990) 429.
- [37] W.J. Marciano and A. Sirlin, Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 22;
A. Sirlin and R. Zucchini, Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 1994;
A. Sirlin, Phys. Rev. D35 (1987) 3423;
W. Jaus and G. Rasche, Phys. Rev. D35 (1987) 3420; D41 (1990) 166.
- [38] M. Ademollo and R. Gatto, Phys. Rev. Lett. 13 (1964) 264.
- [39] J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. B250 (1985) 465; 517; 539.
- [40] A. Pich, *Introduction to Chiral Perturbation Theory*, Proc. Fifth Mexican School of Particles and Fields (Guanajuato, Mexico, 1992), eds. J.L. Lucio M. and M. Vargas, AIP Conference Proceedings 317 (New York, 1994), p. 95.
- [41] H. Leutwyler and M. Roos, Z. Phys. C25 (1984) 91.
- [42] J.F. Donoghue, B.R. Holstein and S.W. Klimt, Phys. Rev. D35 (1987) 934.
- [43] H. Abramowicz et al., Z. Phys. C15 (1982) 19.
- [44] R. Patterson, *Weak and rare decays*, to appear in Proc. of the 27th Int. Conf. on High Energy Physics (Glasgow, 1994).
- [45] M. Neubert, Phys. Lett. B264 (1991) 455.
- [46] M. Luke, Phys. Lett. B252 (1990) 447.
- [47] M. Neubert, Phys. Lett. B338 (1994) 84.
- [48] L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 1945.
- [49] R. Forty, *CP Violation and B^0 - \bar{B}^0 Mixing*, to appear in Proc. of the 27th Int. Conf. on High Energy Physics (Glasgow, 1994).
- [50] A. Pich and J. Prades, Valencia preprint FTUV/94-37.
- [51] A. Pich, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 31 (1993) 213.
- [52] H. Albrecht et al. (ARGUS), Phys. Lett. B337 (1994) 383.
- [53] J. Bernabéu and P. Pascual, *Electro-Weak Theory*, GIFT report (University Aut3noma of Barcelona, Bellaterra, 1981).
- [54] V. Cirigliano et al., Eur. Phys. J., **C23**, 121 (2002).

- [55] LEP Heavy Flavour Steering Group,
<http://lephfs.web.cern.ch/LEPHFS>
- [56] M. Guichini et al.: JHEP **0107**, 013 (2001)