

Слаби взаимодействия на елементарните частици

Михаил Чижов

Физически факултет, катедра Атомна физика

София, юни 2021

Това е кратък курс основан на лекциите, които авторът е чел от 1994 г. до сега (2021 г.) за магистрите от Физическия факултет на Софийския университет „Св. Климент Охридски“. Курсът лекции е посветен на основите на теорията и феноменологията на слабите взаимодействия на елементарните частици. В него е разгледано също така нарушението на основните симетрии във физиката: P- и CP- четностите и спонтанното нарушение на симетрията на вакуума. Основна цел на курса е да представи стандартния модел на елементарните частици от гледна точка на придобиване на практически умения за аналитично пресмятане на вероятности и сечения във физиката на елементарните частици. Този апарат намира широко приложение както във физиката на елементарните частици така и в астрофизиката и космологията на ранната Вселена. Задължително изискване за започване на обучението по този курс е владението на математическия апарат от бакалавърската университетска програма и разбирането на квантово-механичните принципи. Желателно е също читателите да имат начални познания в областта на квантовата теория на полето.

1. Увод

В тази уводна глава ще бъдат изброени всички известни елементарни частици¹ и типовете взаимодействия, и ще бъдат представени кратки исторически факти за тяхното откритие. Ние ще използваме естествената система единици за измерване, а именно ще положим фундаменталните константи: c – скоростта на светлината във вакуум и \hbar – редуцираната константа на Планк (Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858 – 1947), равни на единица:

$$(1.1) \quad c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1} = 1; \quad \begin{array}{l} \text{s} \rightarrow \text{m}; \\ \downarrow \\ \text{s} \rightarrow \text{kg}^{-1}. \end{array}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1, \text{ където } h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s};$$

В тази система всички размерни величини могат да бъдат изразени само чрез една размерна константа, например, секунда.

Първата открита елементарна частица е електрона и се обозначава като e^- . Тя има отрицателен електричен заряд

$$(1.2) \quad e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$$

и маса $m_e \approx 0.511 \text{ MeV}$ ($1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}$), и е открита през 1897 година от Томсън (Joseph John Thomson, 1856 – 1940) в катодни лъчи, за което той получава нобеловата награда по физика за 1906 година. Ядрото на водородния атом – протона p е било открито през 1919 година от Ръдърфорд (Ernest Rutherford, 1871 – 1937). В настоящия момент ние знаем, че p не е елементарна частица и се състои от кварки и свързващите ги глюони.

Според теорията на Дирак (Paul Adrien Maurice Dirac, 1902 – 1984) всяка заредена елементарна или субатомна частица, като протона, трябва да има съответна античастица с противоположен заряд и същата маса. Тази теория е била триумфално потвърдена през 1932 година от Андерсън (Carl David Anderson, 1905 – 1991) с откритието на античастицата на електрона – позитрона e^+ в космични лъчи. Дирак и Андерсън получават нобеловите награди по физика за 1933 и 1936 година, съответно. Антипротона е открит през 1955 година от Сегре (Emilio Gino Segrè, 1905 – 1989) и Чембърлейн (Owen Chamberlain, 1920 – 2006), които получават нобеловата награда по физика за 1959 година.

Ключовата за слабите взаимодействия почти безмасова неутрална елементарна частица – неутрино, е била въведена от Паули (Wolfgang Ernst Pauli, 1900 – 1958) за да спаси закона за запазване на енергията и импулса в радиоактивния бета разпад през 1930 година. Неутриното е продукт от новото за онова време слабо взаимодействие, теорията на което не е била построена. Първият камък в основа на тази теория е поставен от Ферми (Enrico Fermi, 1901 – 1954) през 1934 година. Той е измислил и названието “неутрино” за новата хипотетична частица, заменяйки названието “неутрон”, предложено от Паули. Това е било необходимо заради откритието на неутралния компаньон на протона – неутрона n през 1932 година от Чадуик (James Chadwick, 1891 – 1974), който получава нобеловата награда по физика за 1935 година. Нещо повече, италианската наставка «ино» означава умалително име, което по-точно отговаря на свойствата на новата частица.

¹ Частици, за които не е открита структура към днешна дата.

Антинеутрино е открито през 1956 година от Коуан (Clyde Lorrain Cowan Jr, 1919 – 1974) и Райнес (Frederick Reines, 1918 – 1998). Обаче, чак през 1995 година последният получава нобелова награда за това откритие. Антинеутрино е открито използвайки обратната реакция на радиоактивния бета разпад

$$(1.3) \quad \bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n.$$

То се нарича електронно, защото се асоциира с позитрона – античастицата на електрона.

Много интересни неща стават през 1937 година, когато Андерсън и Недърмайер (Seth Henry Neddermeyer, 1907 – 1988) откриват в космичните лъчи частица приличаща по свойствата си на електрона, обаче с маса близо 200 пъти по-тежка от него, $m_\mu \approx 105.66 \text{ MeV}$. Тази частица е мюон μ и е от, така нареченото, второ поколение частици. За първо поколение е приета двойката частици (ν_e, e^-) . Съответното на μ мюонно неутрино ν_μ е открито през 1962 година от Ледърман (Leon Max Lederman, 1922 – 2018), Шварц (Melvin Schwartz, 1932 – 2006) и Щайнбергер (Hans Jakob Steinberger, 1921 – 2020), които получиха нобеловата награда за това откритие през 1988 година.

Заредената частица от третото поколение τ е описана от Цай (Yung-su Tsai, 01.02.1930) още през 1971 година и открита през 1977 година от Пърл (Martin Lewis Perl, 1927 – 2014) с маса $m_\tau \approx 1777 \text{ MeV}$. Пърл получава нобеловата награда по физика за 1995 година. Съответното на τ тауонно неутрино ν_τ е открито през 2000 година в експеримента DONUT (Direct Observation of the Nu Tau) във Fermilab, САЩ. Всичките тези частици се наричат лептони, защото не участват в силните взаимодействия.

Съставните части на силно-взаимодействащите субатомни частици – адрони се наричат кварки и са били предсказани от Гел-Ман (Murray Gell-Mann, 1929 – 2019) през 1964 година, за което той е удостоен с нобеловата награда през 1969 година. Леките u (up), d (down) и s (strange) кварки са били открити от Фридман (Jerome Isaac Friedman, 28.03.1930), Кендъл (Henry Way Kendall, 1926 – 1999) и Тейлър (Richard Edward Taylor, 1929 – 2018) през 1968 година. На тях им е присъдена нобеловата награда по физика за 1990 година. Първите два кварка u и d , от които се състоят протона и неутрона, и съответно ядрата на химичните елементи, имат дробни заряди $(+ 2/3) e$ и $(- 1/3) e$, съответно, и са елементарни частици от първо поколение. Докато s кварка със заряд от $(- 1/3) e$ вече е елементарна частица от второ поколение. Ако масите на u и d кварките са от порядъка на няколко MeV, то масата на s кварка е със стотина MeV по-голяма.

За да има симетрия между поколенията и по други причини, които ще бъдат обсъдени в лекциите, през 1970 година Глаشوу (Sheldon Lee Glashow, 05.12.1932), Илиопулос (John Piopoulos, 1940) и Маяни (Luciano Maiani, 16.07.1941) въвеждат c (charm) кварк със заряд $(+ 2/3) e$ като елементарна частица от второ поколение. Този кварк беше открит от Рихтер (Burton Richter, 1931 – 2018) и независимо от Тинг (Samuel Chao Chung Ting, 27.01.1936) с маса $m_c \approx 1.3 \text{ GeV}$ през 1974 година. За откритието си те са удостоени с нобеловата награда по физика за 1976 година.

По-тежките кварки от третото поколение b (bottom) и t (top) бяха предсказани през 1973 година от Кобаяши (Makoto Kobayashi, 07.04.1944) и Маскава (Toshihide Maskawa, 07.02.1940), за което те получават нобеловата награда през 2008 година. Тези кварки бяха открити във Fermilab през 1977 и 1995 година с маси съответно $m_b \approx 4.2 \text{ GeV}$ и $m_t \approx 173.2 \text{ GeV}$.

Всеки от кварките може да се намира в състояние с един от трите цвята: червен, зелен или син, така че съставените от три кварка адрони са бели състояния. Силното взаимодействие на цветовете, което се пренася от 8 безмасови глюона, се описва от квантовата хромодинамика (QCD). Глуоните бяха открити през 1979 година на колайдера PETRA (Positron-Elektron-Tandem-Ring-Anlage), Германия.

До момента са известни четири основни типа на взаимодействие: гравитационно, електромагнитно, слабо и силно взаимодействие. Гравитационното взаимодействие е било открито през 1687 година от Нютон (Isaac Newton, 1643 – 1727). В него участват всички известни и неизвестни частици, но то е много слабо за елементарните частици в сравнение с други типове взаимодействия, поради малките им маси, и затова то, обикновено, не се отчита. Електромагнитното взаимодействие е било открито през 1864 година от Максвел (James Clerk Maxwell, 1831 – 1879), а неговият квантов преносител – фотона, през 1900, 1905 и 1923 година от Планк, Айнщайн (Albert Einstein, 1879 – 1955) и Комптън (Arthur Holly Compton, 1892 – 1962), които получават нобелови награди съответно през 1917, 1921 и 1927 година. Преносителите на слабото взаимодействие – W^\pm и Z бозоните бяха открити през 1983 година от Рубия (Carlo Rubbia, 31.03.1934) и Меер (Simon van der Meer, 1925 – 2011), които получават нобеловата награда по физика за 1984 година. Техните маси са

$$(1.4) \quad m_W^{\text{exp}} \approx 80.4 \text{ GeV} \quad \text{и} \quad m_Z^{\text{exp}} \approx 91.2 \text{ GeV}.$$

Има и още една елементарна частица – h бозона на Хигс (Peter Ware Higgs, 29.05.1929), която е следствие на механизъм за придобиване на маси на всички елементарни частици, с които тя има пряко взаимодействие. Тя беше открита през 2012 година в CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire), Швейцария, с маса

$$(1.5) \quad m_h^{\text{exp}} \approx 125.1 \text{ GeV},$$

а през 2013 година Англер (François Englert, 06.11.1932) и Хигс печелят нобеловата награда по физика за теоретичното откритие на механизма. На фигура 1 са представени всички открити, освен гравитона, елементарни частици. Сега е известно, че ν_e , ν_μ и ν_τ са квантови смеси от елементарните частици ν_1 , ν_2 и ν_3 с определени, обаче много малки маси, които още не са известни.

кварки		лептони		бозони		
2,3 MeV $u^{+\frac{2}{3}}$ up - quark	4,8 MeV $d^{-\frac{1}{3}}$ down - quark	I	<1 eV ν_1^0 first neutrino	0,511 MeV e^- electron	0 eV γ^0 photon	80,4 GeV W^\pm W - boson
1,275 GeV $c^{+\frac{2}{3}}$ charm - quark	95 MeV $s^{-\frac{1}{3}}$ strange - quark	II	<1 eV ν_2^0 second neutrino	105,66 MeV μ^- muon	0 eV g^0 gluon	91,2 GeV Z^0 Z - boson
173,2 GeV $t^{+\frac{2}{3}}$ top - quark	4,18 GeV $b^{-\frac{1}{3}}$ bottom - quark	III	<1 eV ν_3^0 third neutrino	1776,8 MeV τ^- tau - lepton	0 eV G^0 graviton	125,1 GeV h^0 Higgs - boson

Фиг. 1.

2. Уравнения на Клайн – Гордън и Дирак

Основното релятивистко уравнение за свободна частица е

$$(2.1) \quad E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2,$$

където E е пълната енергия на частицата, а \mathbf{p} и m са нейните импулс и маса. В квантовата механика импулсът \mathbf{p} е оператор в конфигурационното пространство $\mathbf{p} = -i\nabla$. От уравнението на Шрьодингер (Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, 1887 – 1961) E също можем да приемем за оператор $E = i\partial/\partial t$. Тогава в релятивистки обозначения

$$(2.2) \quad p^\mu = i\partial/\partial x_\mu \equiv i\partial^\mu,$$

където $p^\mu = (E, \mathbf{p})$, $x^\mu = (t, \mathbf{x})$, а $\mu = 0, 1, 2, 3$ е контравариантен лоренц-индекс.

Ковариантният вектор $x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} x^\nu$ се получава от x^μ с помощта на метричния тензор

$$(2.3) \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и използвайки правилото на сумиране на Айнщайн може да бъде записан като $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$.

Метричният тензор е матрица в пространството на лоренц-индексите. Тогава уравнението на Клайн (Oskar Benjamin Klein, 1894 – 1977) и Гордън (Walter Gordon, 1893 – 1939) за свободна частица, която се описва с полето φ в конфигурационното пространство x^μ , е

$$(2.4) \quad (\partial^2 + m^2)\varphi(x) = 0, \quad \partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu.$$

В импулсното пространство:

$$(2.5) \quad (p^2 - m^2)\tilde{\varphi}(p) = 0, \quad p^2 \equiv p_\mu p^\mu,$$

където $\tilde{\varphi}(p) = \int \varphi(x) e^{ip_\mu x^\mu} d^4x$ е Фурие образ на $\varphi(x)$.

Квадратното уравнение (2.1) има два решения $E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, едното от които съответства на нефизична отрицателна енергия. За да се избегне появяването на решение с отрицателната енергия Дирак предлага линеаризация на квадратното уравнение (2.5)

$$(2.6) \quad p^2 - m^2 = (\gamma_\nu p^\nu + m)(\gamma_\mu p^\mu - m) = 0.$$

Обаче, за да е валидно разложението (2.6), коефициентите γ_μ трябва да удовлетворяват уравнението

$$(2.7) \quad p^2 = \gamma_\nu p^\nu \gamma_\mu p^\mu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) p^\mu p^\nu = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu.$$

Щом γ_μ и γ_ν с различни лоренц-индекси антикомутират те трябва да са матрици в спинорното пространство:

$$(2.8) \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}\mathbb{1}.$$

За четиримерно лоренц-пространство това може да се реализира с матрици 4×4 в спинорното пространство². Използвайки последното равенство в (2.6), получаваме уравненията на Дирак

$$(2.9) \quad \left[(\gamma_\mu)_a^b p^\mu - m \delta_a^b \right] \tilde{\psi}_b(p) = 0 \quad \rightarrow \quad \left[i(\gamma_\mu)_a^b \partial^\mu - m \delta_a^b \right] \psi_b(x) = 0$$

в импулсно и конфигурационно пространство, съответно. Спинорните индекси a и b приемат значения от 1 до 4.

Ясно е, че уравнение (2.8) за γ -матрици е ковариантно относително унитарното преобразование

$$(2.10) \quad \gamma \rightarrow \gamma' = U \gamma U^\dagger$$

и следователно съществуват безброй представяния. Едното от представянията на γ -матриците в блочна 2×2 форма е

$$(2.11) \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

където σ^μ са матриците на Паули

$$(2.12) \quad \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Това представяне се нарича енергетично заради диагоналната γ^0 матрица.

Уравнение (2.9) в импулсното пространство е алгебрично и може лесно да се реши. Нека представим биспинора $\tilde{\psi}(p)$ с помощта на два спинора φ и ζ

$$(2.13) \quad \tilde{\psi}(p) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}.$$

Тогава първото уравнение в (2.9) можем да представим в матрична форма като

$$(2.14) \quad (\gamma_\mu p^\mu - m) \tilde{\psi}(p) = \begin{pmatrix} E - m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \zeta \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{(a): } (E - m)\varphi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\zeta \\ \text{(b): } (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\varphi = (E + m)\zeta \end{array}$$

За неотрицателна енергия $E \geq 0$ от уравнение (2.14b) получаваме

$$(2.15) \quad \zeta = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \varphi \quad \rightarrow \quad \tilde{\psi}^{(+)}(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \end{pmatrix} \varphi.$$

Обаче, за да бъде решението на системата (2.14) само съгласувано, от уравнение (2.14a)

$$(2.16) \quad (E - m)\varphi \stackrel{(2.15)}{=} \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{E + m} \varphi = \frac{\mathbf{p}^2}{E + m} \varphi \quad \rightarrow \quad E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

получаваме и решение с отрицателна енергия.

Така че дори използвайки линеаризираното уравнение, пак има две решения. Дирак е предположил, че второто решение описва античастици. За да бъде енергията за това решение неотрицателна трябва да сменим четири-импулса p с противоположен

$$(2.17) \quad (\gamma_\mu p^\mu + m) \tilde{\psi}^{(-)}(-p) = \begin{pmatrix} E + m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \zeta \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{(a): } (E + m)\varphi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\zeta \\ \text{(b): } (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\varphi = (E - m)\zeta \end{array}$$

² Размерността на спинорното представяне в d -мерно пространство е $2^{\lfloor d/2 \rfloor}$, където квадратните скобки обозначават цялата част на стойността $d/2$.

Тогава за $E \geq 0$ от уравнение (2.17a) получаваме

$$(2.18) \quad \varphi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \zeta \rightarrow \tilde{\psi}^{(-)}(-p) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \\ 1 \end{pmatrix} \zeta.$$

3. Свойства на вълновата спинорна функция

Уравненията на Дирак (2.9) могат да бъдат записани и като уравнение на Шрьодингер

$$(3.1) \quad i \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\pm p}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = H(\mathbf{p}) \psi_{\pm p}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta) \psi_{\pm p}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\alpha} \equiv \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}, \beta \equiv \gamma^0.$$

Квадратът на абсолютната стойност на решенията на това уравнение $|\psi_p^{(\pm)}(t, \mathbf{x})|^2$ има смисъл на плътност на вероятността да се намери частица в точка \mathbf{x} в даден момент от време t . За една (анти)частица тя е нормирана като

$$(3.2) \quad \int |\psi_p^{(\pm)}(t, \mathbf{x})|^2 d^3 \mathbf{x} = 1.$$

От (3.2) е ясно, че плътността на вероятността в дадена точка е безкрайно малка. За да преминем към крайни стойности ще въведем спинори $u(\pm p)$ по инвариантен начин

$$(3.3) \quad \psi_p^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2p^0 V}} u(\pm p) e^{\mp i p x}; \quad p x \equiv p_\mu x^\mu, \quad p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad V = \int d^3 \mathbf{x}.$$

Тогава от уравнение (3.2) получаваме съотношение за спинорите $u(\pm p)$

$$(3.4) \quad u^\dagger(\boldsymbol{\varepsilon} p) u(\boldsymbol{\varepsilon} p) = \bar{u}(\boldsymbol{\varepsilon} p) \gamma^0 u(\boldsymbol{\varepsilon} p) = 2p^0,$$

където знакът на $\boldsymbol{\varepsilon} = \pm 1$ отговаря на частица или античастица, а $\bar{u} \equiv u^\dagger \gamma^0$ е дираков спрегнат спинор. Щом изразът $\bar{u}(\boldsymbol{\varepsilon} p) \gamma^0 u(\boldsymbol{\varepsilon} p)$ се преобразува като нулевата компонента на четири-вектор, можем да запишем (3.4) в лоренц инвариантна форма:

$$(3.5) \quad \bar{u}(\boldsymbol{\varepsilon} p) \gamma^\mu u(\boldsymbol{\varepsilon} p) = 2p^\mu \xrightarrow{\times p_\mu} \bar{u}(\boldsymbol{\varepsilon} p) \hat{p} u(\boldsymbol{\varepsilon} p) = 2p^2 = 2m^2, \quad \hat{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu.$$

От уравненията (3.1) и (3.3) можем да получим уравнения за спинорите u и \bar{u}

$$(3.6) \quad (\hat{p} - \boldsymbol{\varepsilon} m) u(\boldsymbol{\varepsilon} p) = 0 \rightarrow \bar{u}(\boldsymbol{\varepsilon} p) (\hat{p} - \boldsymbol{\varepsilon} m) = 0.$$

За да получим уравнението за спинора \bar{u} в (3.6) ние използваме свойството на γ -матриците

$$(3.7) \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

Умножавайки първото уравнение в (3.6) отляво на $\bar{u}(\boldsymbol{\varepsilon} p)$ и използвайки (3.5) за нормировката на спинорите u получаваме

$$(3.8) \quad \bar{u}(\boldsymbol{\varepsilon} p) u(\boldsymbol{\varepsilon} p) = 2\boldsymbol{\varepsilon} m.$$

Ако умножим първото уравнение в (3.6) отляво на $\bar{u}(\boldsymbol{\varepsilon}' p)$, $\boldsymbol{\varepsilon}' \neq \boldsymbol{\varepsilon}$, и използваме второто уравнение в (3.6), получаваме свойството ортогоналност за спинорите u

$$(3.9) \quad \bar{u}(\boldsymbol{\varepsilon}' p) u(\boldsymbol{\varepsilon} p) = 2\boldsymbol{\varepsilon} m \delta_{\boldsymbol{\varepsilon}' \boldsymbol{\varepsilon}}.$$

Спинорите $u(\pm p)$ имат четири независими спинорни компоненти, значи освен квантовото число $\varepsilon = \pm 1$ трябва да съществува и още едно квантово число, да речем, $\chi = \pm 1$ за да установим пълно съответствие между степените на свобода на спинорите и техните квантови числа. Нека да разгледаме оператора $\gamma^5 \hat{s}$, където

$$(3.10) \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma^{5\dagger} : (\gamma^5)^2 = 1, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0,$$

а s_μ е четири-вектор със следните свойства

$$(3.11) \quad s_\mu p^\mu = 0, \quad s^2 = -1.$$

Тогава той комутира³ с \hat{p} и може да приема собствени стойности χ едновременно с ε

$$(3.12) \quad \gamma^5 \hat{s} u^\chi(\varepsilon p) = \chi u^\chi(\varepsilon p) \xrightarrow{\dagger\gamma^0} \bar{u}^\chi(\varepsilon p) \gamma^5 \hat{s} = \chi \bar{u}^\chi(\varepsilon p).$$

Понеже квадратът на този оператор $\gamma^5 \hat{s} \gamma^5 \hat{s} = -s^2 = 1$ е равен на единица, то неговите собствени значения са $\chi = \pm 1$. Това квантово число се нарича *киралност*. Използвайки уравненията (3.12) може да се покаже, че спинорите с различни киралности $\chi' \neq \chi$ са ортогонални

$$(3.13) \quad \bar{u}^{\chi'}(\varepsilon' p) u^\chi(\varepsilon p) = 2\varepsilon m \delta_{\varepsilon'\varepsilon} \delta_{\chi'\chi}.$$

Нека да изясним физичното значение на квантовото число киралност, което е свързано с оператора на спина

$$(3.14) \quad \Sigma = \frac{1}{2} \gamma^5 \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Ще започнем със случая, когато частица е в покой $p^{(0)} = (m, \mathbf{0})$, тогава $s^{(0)} = (0, \mathbf{s})$. От първото уравнение в (3.6) получаваме, че спинорът $u^\chi(\varepsilon p^{(0)})$ е собствена функция на оператора γ^0

$$(3.15) \quad \gamma^0 u^\chi(\varepsilon p^{(0)}) = \varepsilon u^\chi(\varepsilon p^{(0)}).$$

Ако умножим първото уравнение в (3.12) отляво на $\frac{1}{2} \gamma^0$ в лявата част получаваме скалярно произведение на оператора на спина и вектора \mathbf{s} , а вдясно квантовите им числа

$$(3.16) \quad (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{s}) u^\chi(\varepsilon p^{(0)}) = \frac{1}{2} \chi \gamma^0 u^\chi(\varepsilon p^{(0)}) \stackrel{(3.15)}{=} \frac{1}{2} \chi \varepsilon u^\chi(\varepsilon p^{(0)}).$$

Това означава, че за частица в покой киралността указва посоката на спина спрямо вектора \mathbf{s} .

За частица в движение се въвежда оператор на спиралност $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p} / |\mathbf{p}|$ (проекция на спина върху посоката на движение), който може да се построи от оператора на киралност, ако векторът \mathbf{s} е успореден на \mathbf{p} . Затова много често ги бъркат един с друг. Ако $\mathbf{s} = a\mathbf{p}$, тогава от условията на ортогоналност и нормировка (3.11) следва

$$(3.17a) \quad s^0 p^0 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} = a p^2 \quad \rightarrow \quad a = \frac{s^0 p^0}{p^2} : \quad \stackrel{(3.17b)}{\rightarrow} \quad \mathbf{s} = \frac{p^0}{m} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|},$$

³ $[\gamma^5 \hat{s}, \hat{p}] = 2\gamma^5 s_\mu p^\mu = 0.$

$$(3.17b) \quad 1 = s^2 - (s^0)^2 = a^2 \mathbf{p}^2 - (s^0)^2 \stackrel{(3.17a)}{=} \frac{(s^0 \mathbf{p}^0)^2}{\mathbf{p}^2} - (s^0)^2 = \frac{(s^0 m)^2}{\mathbf{p}^2} : s^0 \stackrel{\uparrow}{=} \frac{|\mathbf{p}|}{m}.$$

Тогава операторът

$$(3.18) \quad \frac{1}{2m} \gamma^5 \hat{s} \hat{p} = \frac{1}{2m} \gamma^5 \left(\frac{|\mathbf{p}|}{m} \gamma^0 - \frac{p^0}{m} \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{|\mathbf{p}|} \right) (p^0 \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

съвпада с оператора на спиралност и за да намерим собствените му значения λ трябва да използваме уравнения (3.6) и (3.12)

$$(3.19) \quad \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} u^\chi(\boldsymbol{\varepsilon} p) = \frac{1}{2m} \gamma^5 \hat{s} \hat{p} u^\chi(\boldsymbol{\varepsilon} p) \stackrel{(3.6)}{=} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \gamma^5 \hat{s} u^\chi(\boldsymbol{\varepsilon} p) \stackrel{(3.12)}{=} \frac{1}{2} \boldsymbol{\chi} \boldsymbol{\varepsilon} u^\chi(\boldsymbol{\varepsilon} p) = \lambda u^\chi(\boldsymbol{\varepsilon} p).$$

От това уравнение, както и от (3.16), следва, че киралността пак е свързана с проекцията на спина. Ако $\lambda > 0$, то такива частици се наричат десни, ако $\lambda < 0$ – леви. Обаче това понятие за масивни частици не е лоренц инвариантно.

Нека в заключение да разгледаме случай на безмасови частици $m = 0$. Тогава

$$(3.20) \quad 2 \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} u^\chi(\boldsymbol{\varepsilon} p) \stackrel{\substack{\gamma \cdot p = \gamma^0 p^0 \\ p^0 = |\mathbf{p}|}}{=} \gamma^5 u^\chi(\boldsymbol{\varepsilon} p) \stackrel{(3.19)}{=} \boldsymbol{\chi} \boldsymbol{\varepsilon} u^\chi(\boldsymbol{\varepsilon} p).$$

Това означава, че съществува представяне където γ^5 е диагонална

$$(3.21) \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : \gamma^0 \stackrel{(2.10)}{=} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i \stackrel{(2.10)}{=} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 \stackrel{(2.10)}{=} \begin{pmatrix} -\sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 \end{pmatrix}.$$

То се нарича кирално представяне. По-нататък ще използваме следните означения за частици и античастици

$$(3.22a) \quad u^\chi(+p) = u^\chi(p),$$

$$(3.22b) \quad u^\chi(-p) = v^\chi(p).$$

От (3.20) е ясно, че проекционните оператори

$$(3.23) \quad \Pi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}, \Pi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} : \Pi_R + \Pi_L = 1, \Pi_R \Pi_L = 0, \Pi_R \Pi_R = \Pi_R, \Pi_L \Pi_L = \Pi_L,$$

избират дясната или лявата частица. Тогава за безмасови частици имаме

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \Pi_R u^1(p) &= u^1(p), \quad \Pi_L u^1(p) = 0; & \Pi_R v^{-1}(p) &= v^{-1}(p), \quad \Pi_L v^{-1}(p) = 0; \\ \Pi_L u^{-1}(p) &= u^{-1}(p), \quad \Pi_R u^{-1}(p) = 0; & \Pi_L v^1(p) &= v^1(p), \quad \Pi_R v^1(p) = 0. \end{aligned}$$

Имайки пълната система на ортонормирани собствени вектори (3.13) всяка 4×4 матрица може да бъде представена като тяхна линейна комбинация. Например, за дираковата скобка (2.6) можем да запишем

$$(3.25) \quad (\hat{p} + \boldsymbol{\varepsilon} m)_a^b = \sum_{\boldsymbol{\varepsilon}', \boldsymbol{\chi}' = \pm 1} u_a^{\boldsymbol{\chi}'}(\boldsymbol{\varepsilon}' p) \omega^{\boldsymbol{\chi}b}(\boldsymbol{\varepsilon}' p).$$

За да намерим коефициентите $\omega^{\boldsymbol{\chi}b}(\boldsymbol{\varepsilon}' p)$ умножаваме уравнение (3.25) с $\bar{u}^{\boldsymbol{\chi}a}(\boldsymbol{\varepsilon}'' p)$ и използвайки второто уравнение в (3.6) и уравнение (3.13) получаваме

$$(3.26) \quad m(\boldsymbol{\varepsilon}'' + \boldsymbol{\varepsilon}) \bar{u}^{\boldsymbol{\chi}b}(\boldsymbol{\varepsilon}'' p) = \sum_{\boldsymbol{\varepsilon}', \boldsymbol{\chi}' = \pm 1} \bar{u}^{\boldsymbol{\chi}a}(\boldsymbol{\varepsilon}'' p) u_a^{\boldsymbol{\chi}'}(\boldsymbol{\varepsilon}' p) \omega^{\boldsymbol{\chi}b}(\boldsymbol{\varepsilon}' p) \stackrel{(3.13)}{=} \downarrow 2m \boldsymbol{\varepsilon}'' \omega^{\boldsymbol{\chi}b}(\boldsymbol{\varepsilon}'' p) \\ \omega^{\boldsymbol{\chi}b}(\boldsymbol{\varepsilon}' p) = \delta_{\boldsymbol{\varepsilon}' \boldsymbol{\varepsilon}''} \bar{u}^{\boldsymbol{\chi}b}(\boldsymbol{\varepsilon} p).$$

В резултат получаваме следното представяне

$$(3.27) \quad (\hat{p} + \varepsilon m)_a^b = \sum_{\chi=\pm 1} u_a^\chi(\varepsilon p) \bar{u}^{\chi b}(\varepsilon p)$$

или

$$(3.28a) \quad \sum_{\chi=\pm 1} u_a^\chi(p) \bar{u}^{\chi b}(p) = (\hat{p} + m)_a^b,$$

$$(3.28b) \quad \sum_{\chi=\pm 1} v_a^\chi(p) \bar{v}^{\chi b}(p) = (\hat{p} - m)_a^b.$$

Това са основните формули, които ще използваме по нататък през целия курс.

4. Свойства на γ -матриците и тъждествата на Фирц

В спинорното пространство на матриците 4×4 освен единичната матрица $\mathbb{1}$ трябва да има 15 независими безследови матрици, 4 от които (2.11) ние вече знаем. В съответствие с основното свойство на γ -матриците (2.8) симетризацията им води до единичната матрица или нулевата. Затова за да се построят нови матрици ще следваме алгоритъма на тяхната антисиметризация. Така първите 6 нови матрици са

$$(4.1) \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

Антисиметризацията на трите γ -матрици води до още 4 матрици

$$(4.2) \quad \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha = i \gamma^5 \gamma_\beta.$$

И най-накрая антисиметризацията на четирите γ -матрици определя матрицата γ^5 (3.10)

$$(4.3) \quad \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta = i \gamma^5.$$

Напълно антисиметричният тензор на Леви-Чивита (Tullio Levi-Civita, 1873 – 1941) се определя като

$$(4.4) \quad \varepsilon^{0123} = +1, \quad \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\mu'\nu'\alpha'\beta'} = - \begin{vmatrix} \delta_\mu^{\mu'} & \delta_\mu^{\nu'} & \delta_\mu^{\alpha'} & \delta_\mu^{\beta'} \\ \delta_\nu^{\mu'} & \delta_\nu^{\nu'} & \delta_\nu^{\alpha'} & \delta_\nu^{\beta'} \\ \delta_\alpha^{\mu'} & \delta_\alpha^{\nu'} & \delta_\alpha^{\alpha'} & \delta_\alpha^{\beta'} \\ \delta_\beta^{\mu'} & \delta_\beta^{\nu'} & \delta_\beta^{\alpha'} & \delta_\beta^{\beta'} \end{vmatrix},$$

от което следват полезни съотношения

$$(4.5) \quad \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\mu'\nu'\alpha'\beta'} = - \begin{vmatrix} \delta_\mu^{\mu'} & \delta_\mu^{\nu'} & \delta_\mu^{\alpha'} \\ \delta_\nu^{\mu'} & \delta_\nu^{\nu'} & \delta_\nu^{\alpha'} \\ \delta_\alpha^{\mu'} & \delta_\alpha^{\nu'} & \delta_\alpha^{\alpha'} \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\mu'\nu'\alpha\beta} &= 2 (\delta_\mu^{\nu'} \delta_\nu^{\mu'} - \delta_\mu^{\alpha'} \delta_\nu^{\alpha'}), \\ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\mu'\nu\alpha\beta} &= -6 \delta_\mu^{\mu'}, \\ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} &= -24. \end{aligned}$$

Нека да асоциираме всички 16 матрици със символите Γ^k ($k = S, V, T, A, P$) като индексът k има смисъл на трансформационните свойства на билинейни комбинации от спинорите $\bar{u} \Gamma^k u$ по отношение на лоренц преобразованията и инверсията на пространството

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \Gamma^S &= 1, \Gamma^V = \gamma^\mu, \Gamma^T = \sigma^{\mu\nu} (\mu < \nu), \Gamma^A = i\gamma^5 \gamma^\mu, \Gamma^P = \gamma^5; \\ \Gamma_S &= 1, \Gamma_S = \gamma_\mu{}^\mu, \Gamma_T = \sigma_{\mu\nu} (\mu < \nu), \Gamma_A = i\gamma^5 \gamma_\mu, \Gamma_P = \gamma^5. \end{aligned}$$

Те образуват пълния набор от матрици в спинорното пространство със следните свойства

$$(4.7) \quad \Gamma_k \Gamma^k = 1 \text{ (няма сумиране по } k), \quad \text{Tr}[\Gamma_k \Gamma^j] = 4\delta_k^j.$$

Тогава произведението на елементи от две произволни матрици Q и R може да бъде представено чрез произведение на елементи от матрици Γ^k с разменени горни спинорни индекси като

$$(4.8) \quad Q_a{}^b R_c{}^d = \sum_{k,j=S,V,T,A,P} C_{kj} (\Gamma^k)_a{}^d (\Gamma^j)_c{}^b.$$

Това са тъждествата на Фирц (Markus Eduard Fierz, 1912 – 2006). За да намерим коефициентите в разложението (4.8) трябва да умножим и двете страни на равенството с $(\Gamma_m)_d{}^a (\Gamma_n)_b{}^c$. Тогава, използвайки (4.7) получаваме

$$(4.9) \quad C_{mn} = \frac{1}{16} \text{Tr}[Q \Gamma_n R \Gamma_m].$$

За да използваме разложението (4.8) ние трябва да знаем как се изчисляват следите от произведението на γ -матриците:

$$(4.10a) \quad \text{Tr}[\gamma^5] = \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^5] = \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^5] = 0, \quad \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}] = 0;$$

$$(4.10b) \quad \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5] = -4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n}}] = 4 \sum_P (-1)^P \prod_{i<j}^n \eta^{\mu_i \mu_j},$$

където P са всички възможни пермутации

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & \dots & \dots & \mu_{2n} \\ \dots & \mu_i & \dots & \mu_j & \dots \end{pmatrix}.$$

Например, за следите от две и четири γ -матрици получаваме

$$(4.11) \quad \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu}, \quad \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] = 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}).$$

Нека да докажем тъждеството на Фирц

$$(4.12) \quad [\gamma_\mu (1 - \gamma^5)]_a{}^b [\gamma^\mu (1 - \gamma^5)]_c{}^d = -[\gamma_\mu (1 - \gamma^5)]_a{}^d [\gamma^\mu (1 - \gamma^5)]_c{}^b,$$

използвайки следващите формули за произведение на γ -матрици от типа на $\gamma_\mu \mathcal{O} \gamma^\mu$, където има сумиране по лоренц индекса μ ,

$$(4.13) \quad \gamma_\mu (\gamma^{\nu_1} \gamma^{\nu_2} \dots \gamma^{\nu_{2n+1}}) \gamma^\mu = -2\gamma^{\nu_{2n+1}} \dots \gamma^{\nu_2} \gamma^{\nu_1}, \quad \gamma_\mu (\gamma^\alpha \gamma^\beta) \gamma^\mu = 4\eta^{\alpha\beta}.$$

Тогава коефициентите (4.9) са

$$(4.14a) \quad C_{kS} = C_{Sk} = \frac{1}{16} \text{Tr}[\gamma_\mu (1 - \gamma^5) \Gamma_S \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Gamma_k] \stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{4} \text{Tr}[\gamma_\mu \Pi_L \Pi_R \gamma^\mu \Gamma_k] = 0,$$

$$(4.14b) \quad C_{kT} = C_{Tk} = \frac{1}{16} \text{Tr}[\gamma_\mu (1 - \gamma^5) \Gamma_T \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Gamma_k] \stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{4} \text{Tr}[\gamma_\mu \Pi_L \Gamma_T \Pi_R \gamma^\mu \Gamma_k] = 0,$$

$$(4.14c) \quad C_{kP} = C_{Pk} = \frac{1}{16} \text{Tr}[\gamma_\mu (1 - \gamma^5) \Gamma_P \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Gamma_k] \stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{4} \text{Tr}[\gamma_\mu \Pi_L \Gamma_P \Pi_R \gamma^\mu \Gamma_k] = 0,$$

$$(4.14d) \quad C_{VV} = \frac{1}{16} \text{Tr}[\gamma_\mu (1 - \gamma^5) \Gamma_V \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Gamma_V] \stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{4} \text{Tr}[\Pi_R \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma_\beta \Pi_R] \stackrel{(4.13)}{\stackrel{(3.23)}{=}} -\eta_{\alpha\beta},$$

$$(4.14e) \quad C_{VA} = C_{AV} = \frac{1}{16} \text{Tr} \left[\gamma_\mu (1 - \gamma^5) \Gamma_V \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Gamma_A \right] \stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\Pi_R \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma^\mu i \gamma^5 \gamma_\beta \Pi_R \right] \stackrel{(4.13)}{=} i \eta_{\alpha\beta},$$

$$(4.14f) \quad C_{AA} = \frac{1}{16} \text{Tr} \left[\gamma_\mu (1 - \gamma^5) \Gamma_A \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \Gamma_A \right] \stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\Pi_R \gamma_\mu i \gamma^5 \gamma_\alpha \gamma^\mu i \gamma^5 \gamma_\beta \Pi_R \right] \stackrel{(4.13)}{=} \eta_{\alpha\beta},$$

и

$$(4.15) \quad \begin{aligned} & \left[\gamma_\mu (1 - \gamma^5) \right]_a^b \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \right]_c^d = \eta_{\alpha\beta} \left\{ - \left[\gamma^\alpha \right]_a^d \left[\gamma^\beta \right]_c^b + i \left[\gamma^\alpha \right]_a^d \left[i \gamma^5 \gamma^\beta \right]_c^b \right. \\ & \left. + i \left[i \gamma^5 \gamma^\alpha \right]_a^d \left[\gamma^\beta \right]_c^b + \left[i \gamma^5 \gamma^\alpha \right]_a^d \left[i \gamma^5 \gamma^\beta \right]_c^b \right\} = -\eta_{\alpha\beta} \left[\gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \right]_a^d \left[\gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right]_c^b. \end{aligned}$$

5. Действие на Дирак и C , P и T инвариантности

Лагранжева плътност на Дирак и действие можем да получим от уравнение (2.9) предполагайки, че биспинорите $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ са независими

$$(5.1) \quad \mathcal{A} = \int L(t) dt = \int \mathcal{L}(t, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} dt = \int \bar{\psi}(x) (i \hat{\partial} - m) \psi(x) d^4 x.$$

Лагранжевата плътност⁴ се определя с точност до пълна четиримерна дивергенция, например,

$$(5.2) \quad \mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x) (i \hat{\partial} - m) \psi(x) - i \alpha \partial_\mu \left[\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \right],$$

където α е произволна константа. Тогава освен формата (5.1) при $\alpha = 0$ можем да запишем още две специални форми

$$(5.3a) \quad \alpha = 1: \quad \mathcal{L}(x) = -i \bar{\psi}(x) \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x),$$

$$(5.3b) \quad \alpha = \frac{1}{2}: \quad \mathcal{L}(x) = \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x),$$

където $\overleftrightarrow{\partial}_\mu \equiv \partial_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu$. Известно е, че действието на Дирак е P , C и T инвариантно, затова ще действаме прагматично и ще определим тези три дискретни преобразования използвайки този факт.

Ще започнем с преобразованието инверсия на пространството

$$(5.4) \quad \mathcal{P}: \quad \begin{aligned} \psi'(x') &= P \psi(x), \quad x' = (x'^0, \mathbf{x}') = (x^0, -\mathbf{x}); \\ \bar{\psi}'(x') &= \bar{\psi}(x) D. \end{aligned}$$

Матрицата D се определя от инвариантността на масовия член

$$(5.5) \quad m \bar{\psi}(x) \psi(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} m \bar{\psi}'(x') \psi'(x') = m \bar{\psi}(x) D P \psi(x): \quad D = P^{-1}.$$

За да определим свойствата на матрицата P , трябва да разгледаме времевата и пространствената част на производната в кинетичния член отделно

$$(5.6a) \quad i \bar{\psi}(x) \gamma^0 \partial_0 \psi(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} i \bar{\psi}'(x') \gamma^0 \partial'_0 \psi'(x') = i \bar{\psi}(x) P^{-1} \gamma^0 P \partial_0 \psi(x): \quad P^{-1} \gamma^0 P = \gamma^0,$$

$$(5.6b) \quad i \bar{\psi}(x) \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\partial} \psi(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} i \bar{\psi}'(x') \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\partial}' \psi'(x') = -i \bar{\psi}(x) P^{-1} \boldsymbol{\gamma} P \cdot \boldsymbol{\partial} \psi(x): \quad P^{-1} \boldsymbol{\gamma} P = -\boldsymbol{\gamma}.$$

Използвайки основното съотношение на γ -матриците (2.8), от двете условия (5.6) получаваме

⁴ За краткост, по-нататък ще използваме термина лагранжиан, подразбирайки $\mathcal{L}(x)$, а не $L(t)$.

$$(5.7) \quad P = \gamma^0 = P^{-1} = P^\dagger.$$

Разбира се, тази матрица винаги е определена с точност до фазов множител $e^{i\varphi}$.

В (4.6) въведохме индекс k , смисъла на който можем да разберем използвайки \mathcal{P} преобразованието. Например, уравненията (5.5) показват, че билинейната комбинация на спинорите $\bar{\psi}\Gamma^S\psi$ не се преобразува при инверсия на пространство, т.е. е скалар. В същото време инвариантната при лоренц преобразования комбинация

$$(5.8) \quad \bar{\psi}\Gamma^P\psi \xrightarrow{\mathcal{P}} \bar{\psi}'\gamma^5\psi' = \bar{\psi}P^{-1}\gamma^5P\psi \stackrel{(3.10)}{=} -\bar{\psi}\gamma^5\psi \stackrel{(5.7)}{=}$$

сменя знака си при инверсия на пространство, т.е. е псевдоскалар. Четиримерният вектор $\bar{\psi}\Gamma^V\psi$ съдържа времева компонента, която е инвариантна, и тримерен вектор, който сменя знака си при \mathcal{P} преобразование,

$$(5.9) \quad \bar{\psi}\Gamma^V\psi \xrightarrow{\mathcal{P}} \bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \bar{\psi}P^{-1}\gamma^\mu P\psi \stackrel{(5.6)}{=} \begin{cases} \bar{\psi}\gamma^0\psi \\ -\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi \end{cases}.$$

Четиримерният вектор

$$(5.10) \quad \bar{\psi}\Gamma^A\psi \xrightarrow{\mathcal{P}} i\bar{\psi}'\gamma^5\gamma^\mu\psi' = i\bar{\psi}P^{-1}\gamma^5\gamma^\mu P\psi \stackrel{(5.6)}{=} \begin{cases} -i\bar{\psi}\gamma^5\gamma^0\psi \\ i\bar{\psi}\gamma^5\boldsymbol{\gamma}\psi \end{cases}$$

има противоположни свойства и се нарича псевдовектор или аксиален вектор.

Нека да преминем към по-сложно преобразование – зарядово спрягане

$$(5.11) \quad \mathcal{C}: \quad \begin{aligned} \psi'(x') &= C\bar{\psi}^T(x), \quad x' = x; \\ \bar{\psi}'(x') &= \psi^T(x)D. \end{aligned}$$

Отново ще използваме масовия член за да определим матрицата D . Обаче в този случай трябва да използваме антикомутативността на полевите оператори

$$(5.12) \quad \bar{\psi}(x)\psi(x) \xrightarrow{\mathcal{C}} \bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \psi^T(x)DC\bar{\psi}^T(x) = -\bar{\psi}(x)(DC)^T\psi(x): \quad D = -C^{-1}.$$

Преобразуването \mathcal{C} не засяга координатите, затова ще използваме пълния кинетичен член

$$(5.13) \quad i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi \xrightarrow{\mathcal{C}} i\bar{\psi}'\hat{\partial}'\psi' = -i\psi^T C^{-1}\gamma^\mu C \partial_\mu \bar{\psi}^T = i\bar{\psi}\hat{\partial}_\mu (C^{-1}\gamma^\mu C)^T \psi \stackrel{(5.3a)}{=} \quad C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}.$$

Матрицата C е свързана със свойствата на симетрия на γ -матриците. От четири γ -матрици (2.11) следните две γ^0 и γ^2 са симетрични, а γ^1 и γ^3 – антисиметрични. Лесно е да се провери, че произведението на симетричните матрици удовлетворява (5.13)

$$(5.14) \quad C = \gamma^0\gamma^2 = C^{-1} = C^\dagger.$$

Последното дискретно преобразование е обръщане на времето T . То е още по-сложно, защото освен обръщане на знака на времето, то трябва да размени началното и крайното състояния:

$$(5.15) \quad \mathcal{T}: \quad \begin{aligned} \psi'^T(x') &= \bar{\psi}(x)T, \quad x' = (x'^0, \mathbf{x}') = (-x^0, \mathbf{x}), \quad |\text{in}\rangle \leftrightarrow \langle \text{out}|; \\ \bar{\psi}'^T(x') &= D\psi(x). \end{aligned}$$

Затова всички полени оператори в лагранжевата плътност трябва да се разменят, обаче, без да се сменя знака пред тях

$$(5.16) \quad \bar{\psi}(x)\psi(x) \xrightarrow{\mathcal{T}} \psi'^T(x')\bar{\psi}'^T(x') = \bar{\psi}(x)DT\psi(x): \quad D = T^{-1}.$$

Инвариантността на времевата и пространствената част на производната в кинетичния член води до следните уравнения на матрицата T

$$(5.17a) \quad i\bar{\psi}(x)\gamma^0\partial_0\psi(x) \xrightarrow{\mathcal{T}} i\psi'^T(x')\bar{\psi}'^0\gamma^{0T}\bar{\psi}'^T(x') = -i\bar{\psi}(x)\bar{\partial}_0 T^{-1}\gamma^{0T}T\psi(x) \quad : \quad T\gamma^0 T^{-1} = \gamma^{0T}, \quad (5.3a)$$

$$(5.17b) \quad i\bar{\psi}(x)\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\partial}\psi(x) \xrightarrow{\mathcal{T}} i\psi'^T(x')\bar{\boldsymbol{\partial}}'\cdot\boldsymbol{\gamma}^T\bar{\psi}'^T(x') = i\bar{\psi}(x)\bar{\boldsymbol{\partial}}\cdot T^{-1}\boldsymbol{\gamma}^T T\psi(x) \quad : \quad T\boldsymbol{\gamma}T^{-1} = -\boldsymbol{\gamma}^T. \quad (5.3a)$$

Комбинирайки свойствата на матриците P (5.6) и C (5.13) получаваме

$$(5.18) \quad T = \gamma^5 \gamma^2 = T^{-1} = T^\dagger.$$

Съществува интересна теорема на Людерс (Gerhart Lüders, 1920 – 1995) и Паули, че локалната лоренц инвариантна теория на полето е симетрична при нетривиално CPT преобразование

$$(5.19) \quad CPT : \quad \begin{aligned} x' &= (x'^0, \mathbf{x}') = (-x^0, -\mathbf{x}), |\text{in}\rangle \leftrightarrow \langle \text{out}|; \\ \psi &\xrightarrow{C} C\bar{\psi}^T \xrightarrow{P} C(P^{-1})^T \bar{\psi}^T \xrightarrow{\mathcal{T}} C(P^{-1})^T T^{-1}\psi = -\gamma^5\psi. \end{aligned}$$

6. S матрица и наблюдаеми величини

S матрицата описва всевъзможни преходи от начално в крайно състояние

$$(6.1) \quad S = I + iT : \quad T_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{f=1}^n p_f - \sum_{i=1}^k p_i \right) M_{fi},$$

където T_{fi} е матрица на прехода, а M_{fi} е амплитудата на процеса. Нетривиалната матрица на прехода отговаря на взаимодействия между частиците и интересующите ни преходи. Вероятността на прехода от начално в крайно състояние се задава като квадрат от абсолютната стойност на T_{fi}

$$(6.2) \quad \bar{\omega}_{fi} = |T_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{f=1}^n p_f - \sum_{i=1}^k p_i \right) \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \right] |M_{fi}|^2.$$

За да интерпретираме израза в квадратните скоби в (6.2) използваме представяне на δ -функцията на Дирак

$$(6.3) \quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p) = \int e^{ipx} d^4x \quad \rightarrow \quad (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = \int d^4x = \Delta T \cdot V,$$

където ΔT е интервала от време, а V е обема, отговарящи на прехода. Ясно е, че в цялото пространство и време, вероятността (6.2) е безкрайна. Ние трябва да намерим такива наблюдаеми, които не съдържат ΔT и V , и да приемат крайни стойности.

За да определим вероятността на прехода в крайно състояние с n частици трябва да умножим вероятността (6.2) с фазовия обем

$$(6.4) \quad d\bar{\Phi} = \prod_{f=1}^n \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} V.$$

Плътноста на спинорите (3.4) е нормирана на $2p^0$, затова за да получим нормираната вероятност трябва разделим (6.2) на N

$$(6.5) \quad N = \prod_{f=1}^n 2p_f^0 V \cdot \prod_{i=1}^k 2p_i^0 V.$$

Съответната нормирана вероятност на прехода за единица време е равна на

$$(6.6) \quad d\omega_{fi} = \frac{\bar{\omega}_{fi}}{\Delta T} \frac{d\bar{\Phi}}{N} = \frac{V |M_{fi}|^2}{\prod_{i=1}^k 2p_i^0 V} d\Phi,$$

където

$$(6.7) \quad d\Phi = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{f=1}^n p_f - \sum_{i=1}^k p_i \right) \prod_{f=1}^n \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2p_f^0}$$

е фазовия обем.

Ако в началното състояние има само една частица ($k = 1$), то безкрайния обем V в (6.6) се съкращава и вероятността (6.6) има смисъл на парциална ширина на разпад в n частици

$$(6.8) \quad d\Gamma = \frac{|M|^2}{2p^0} d\Phi.$$

Разсейването е процес, при който на частица a в покой налита частица b със скорост v_b ($k = 2$). В такъв случай сечението на процеса се определя като

$$(6.9) \quad d\sigma = \frac{d\omega}{j} = \frac{|M|^2}{4I} d\Phi,$$

където $j = v_b/V$ е плътност на потока на налитащите частици, а факторът I може да бъде преписан в инвариантен вид

$$(6.10) \quad I = m_a p_b^0 v_b = m_a |\mathbf{p}_b| = \sqrt{(p_a p_b)^2 - p_a^2 p_b^2}.$$

По този начин ние представихме вероятностите (6.8) и (6.9) като произведение от квадрата на абсолютната стойност на матричния елемент, който характеризира динамиката на процеса, и фазовия обем, който отговаря на кинематиката на процеса.

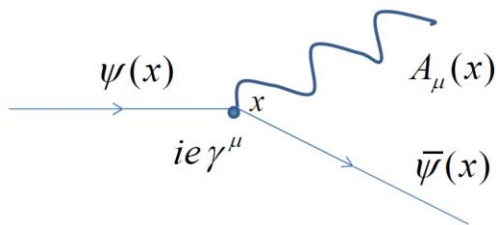
В съответствие с квантовата теория на полето S матрицата се определя като хронологично произведение от лагранжианите на взаимодействие

$$(6.11) \quad S = T \left[e^{i \int \mathcal{L}_{\text{int}}(x) d^4 x} \right] = 1 + i \int \mathcal{L}_{\text{int}}(x) d^4 x + \dots + \sum_{n>1} \frac{i^n}{n!} \int T [\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \dots \mathcal{L}_{\text{int}}(x_n)] d^4 x_1 \dots d^4 x_n.$$

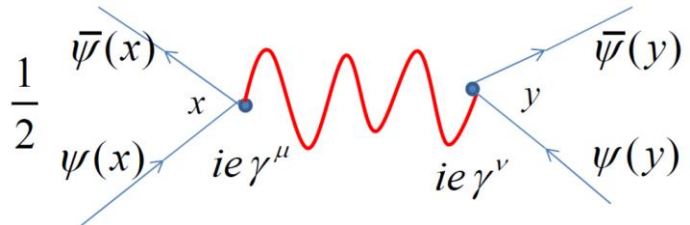
Това разложение може да се визуализира чрез диаграмите на Файнман (Richard Phillips Feynman, 1918 – 1988). Например, за квантовата електродинамика лагранжианът на взаимодействие е

$$(6.12) \quad \mathcal{L}_{\text{int}}(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \cdot A_\mu(x).$$

Ако означим $\bar{\psi}(x)$ като линия със стрелка излизаща от точка x , а $\psi(x)$ – като влизаща линия; фотона – с вълниста линия, а на точката x припишем стойност $ie\gamma^\mu$, то първия член в разложението (6.11) може да бъде представен със следната диаграма на Файнман (фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2

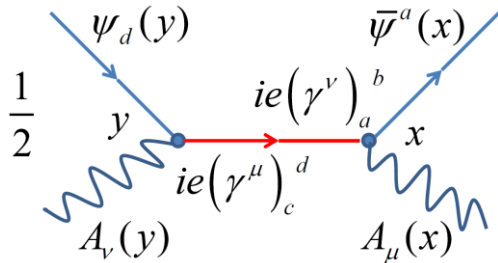
Понеже фотонът е безмасов от кинематични съображения тази диаграма не може да опише процеса на аниhilация на частица и античастица, а е приложима само за спирально излъчване на фотона.

За да пресметнем следващите членове на разложението (6.11) трябва да приложим теоремата на Вик (Gian Carlo Wick, 1909 – 1992), която позволява да представим хронологичното произведение от лагранжианите на взаимодействие, използвайки причинните функции на Грийн (George Green, 1793 – 1841) за съответните полета:

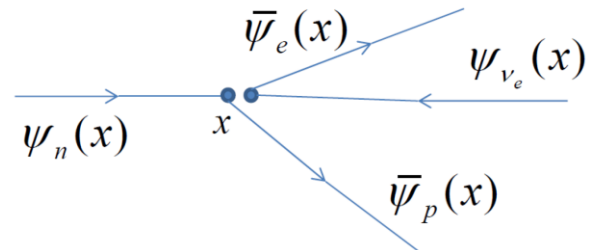
$$(6.13a) \quad \langle T(A_\mu(x)A_\nu(y)) \rangle_0 = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 + i\varepsilon} d^4 p,$$

$$(6.13b) \quad \langle T(\psi_b(x)\bar{\psi}^c(y)) \rangle_0 = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{(\hat{p} - m)_b^c}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} d^4 p.$$

Така, например, на фиг. 2 е представена диаграма⁵ от втория ред по константата на електромагнитното взаимодействие e (6.12), където две фотонни линии се превръщат във вътрешна линия (6.13a) на виртуалната частица. В зависимост от посоката на времето тази диаграма може да описва кулоново разсейване на електрони (отдолу нагоре) или позитрони (отгоре надолу), а също така и електрон-позитронна аниhilация (отляво надясно). Т.е. една и съща диаграма от разложението на S матрицата (6.11) може да описва няколко процеса. Например, диаграмата на фиг. 3, където вътрешната линия е образувана от сдвояването на спинорите $\psi_b(x)$ и $\bar{\psi}^c(y)$ (6.13b), може да описва комптъново разсейване върху електрон (ако стрелката на времето сочи в посока отляво надясно) или върху позитрон (отдясно наляво), а също така електрон-позитронна аниhilация в два фотона (отгоре надолу) или аниhilация на два фотона в електрон-позитронна двойка (отдолу нагоре).



Фиг. 3



Фиг. 4

7. Ефективна теория на Ферми и матричен елемент

В тази глава ние ще въведем ефективния лагранжиан на слабото взаимодействие и накратко ще опишем начина за получаване на матричния елемент от лагранжиана на взаимодействие. За да се опише бета разпада

$$(7.1) \quad n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Ферми използва аналогия с лагранжиана на квантовата електродинамика, показан на фиг. 2, без вътрешната фотонна линия (фиг. 4)

⁵ Коефициент $\frac{1}{2}$ се получава от разложението (6.11).

$$(7.2) \quad \mathcal{L}(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{\psi}_p(x) \gamma_\mu (g_V - g_A \gamma^5) \psi_n(x) \right] \cdot \left[\bar{\psi}_e(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e}(x) \right] + h.c.$$

където има локално взаимодействие между адронния и електронния ток.

Тук трябва да подчертаем разликата между безразмерната електромагнитна константа e и ефективната константа на Ферми G_F . За да пресметнем размерността на G_F ние трябва да знаем размерностите на лагранжиана и спинорните полета. В естествената система единици (1.1) действието е безразмерно и от (5.1) получаваме размерностите на лагранжевата плътност и на спинорните полета изразени в масови единици

$$(7.3) \quad [\mathcal{L}] = M^4, \quad [\psi] = M^{3/2}.$$

От (7.3) и (7.2) веднага следва, че размерността на ефективната константа на Ферми е

$$(7.4) \quad [G_F] = 1/M^2.$$

Комбинациите от γ -матрици между спинорните полета са плод на дългогодишни експерименти и теоретични предположения. За елементарните частици като електрона и неутрино то присъства проекционния оператор Π_L (3.23), а за съставните частици като протона и неутрона – формфакторите g_V и g_A , които ще обсъдим по-късно в курса. Интересно е да отбележим, че лагранжианът (7.2) не е инвариантен при \mathcal{P} преобразование

$$(7.5) \quad \mathcal{L}(x) \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathcal{L}'(x') = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{\psi}_p(x) \gamma_\mu (g_V + g_A \gamma^5) \psi_n(x) \right] \cdot \left[\bar{\psi}_e(x) \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \psi_{\nu_e}(x) \right] + h.c.,$$

обаче е CP симетричен.

В квантовата теория на полето спинорите $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ са оператори, затова освен ортонормираните спинори (3.22), които отразяват тяхната спинорна структура, те съдържат и оператори на раждане $a_\chi^+(p)$ ($a_\chi^{*+}(p)$) и аниhilация $a_\chi^-(p)$ ($a_\chi^{*-}(p)$)

$$(7.6a) \quad \psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\chi \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p^0}} \left[a_\chi^+(p) u^\chi(p) e^{ipx} + a_\chi^-(p) u^\chi(p) e^{-ipx} \right],$$

$$(7.6b) \quad \bar{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\chi \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p^0}} \left[a_\chi^{*-}(p) \bar{v}^\chi(p) e^{-ipx} + a_\chi^{*+}(p) \bar{u}^\chi(p) e^{ipx} \right].$$

За да преминем от S матрицата към матричния елемент M_{fi} , отговарящ на прехода

$$(7.7) \quad M_{fi} = \langle \text{out} | S | \text{in} \rangle,$$

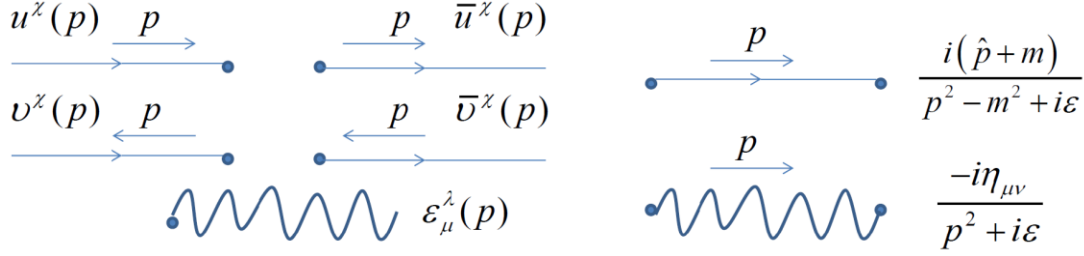
трябва да определим как действат операторите на раждане и аниhilация върху началното и крайното състояние. Най-просто е вакуумното състояние със следните свойства

$$(7.8) \quad a_\chi^-(p) |0\rangle = a_\chi^{*-}(p) |0\rangle = 0, \quad \langle 0 | a_\chi^{*+}(p) = \langle 0 | a_\chi^+(p) = 0.$$

Едночастичните начални (крайни) състояния се описват като $a_\chi^{*+}(p) |0\rangle$ ($\langle 0 | a_\chi^-(p)$) за частица и $a_\chi^+(p) |0\rangle$ ($\langle 0 | a_\chi^{*-}(p)$) – за античастица. Използвайки в (7.7) правилата за антикомутативност на оператори

$$(7.9) \quad \begin{aligned} \{a_\chi^{*-}(p), a_\chi^+(p')\} &= \delta_{\chi\chi'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), & \{a_\chi^-(p), a_\chi^{*+}(p')\} &= \delta_{\chi\chi'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \\ \{a_\chi^{*-}(p), a_\chi^-(p')\} &= \{a_\chi^-(p), a_\chi^{*-}(p')\} = \{a_\chi^-(p), a_\chi^{*+}(p')\} = \{a_\chi^{*+}(p), a_\chi^+(p')\} = 0, \\ \{a_\chi^{*+}(p), a_\chi^+(p')\} &= \{a_\chi^+(p), a_\chi^+(p')\} = \{a_\chi^+(p), a_\chi^-(p')\} = \{a_\chi^-(p), a_\chi^-(p')\} = 0, \end{aligned}$$

и свойствата (7.8) стигаме до правилата на Файнман за матричните елементи (фиг. 5):



Фиг. 5

Правилата на Файнман за фотона се получават аналогично, а вместо спинори се използва поляризацияния вектор $\varepsilon_{\mu}^{\lambda}(p)$.

8. Разпад на мюона

За да опишем разпадите на мюона и, евентуално, лептонните разпади на тау-лептона с ефективния лагранжиан на Ферми ние освен електронния ток трябва да включим всички лептонни токове

$$(8.1) \quad J_{\text{lept}}^{\alpha}(x) = \bar{\psi}_e(x) \gamma^{\alpha} (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e}(x) + \bar{\psi}_{\mu}(x) \gamma^{\alpha} (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_{\mu}}(x) + \bar{\psi}_{\tau}(x) \gamma^{\alpha} (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_{\tau}}(x),$$

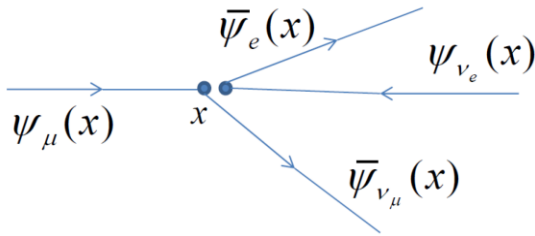
така че използвайки свойството на тяхната универсалност лагранжианът ще има вид

$$(8.2) \quad \mathcal{L}_{\text{lept}}(x) = -\frac{G_{\mu}}{\sqrt{2}} J_{\alpha \text{lept}}^{\dagger} J_{\text{lept}}^{\alpha}(x).$$

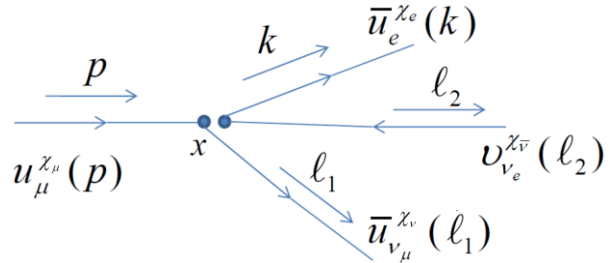
Тук вместо константата на Ферми G_F , която се определя от бета разпада, въвеждаме константа G_{μ} , която се определя от разпада на мюона, описващ се с лагранжиана

$$(8.3) \quad \mathcal{L}_{\mu}(x) = -\frac{G_{\mu}}{\sqrt{2}} \left[\bar{\psi}_{\nu_{\mu}}(x) \gamma_{\alpha} (1 - \gamma^5) \psi_{\mu}(x) \right] \left[\bar{\psi}_e(x) \gamma^{\alpha} (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e}(x) \right] + h.c.$$

В съответствие с правилата, описани в глава 6, той може да бъде представен чрез следната диаграма на Файнман (фиг. 6),



Фиг. 6



Фиг. 7

която може да описва и други процеси. Ако нас ни интересува разпада на мюона, то стрелката на времето трябва да е насочена отляво надясно. Използвайки правилата на Файнман за матричния елемент на фиг. 5 получаваме съответната диаграма за разпада на мюона $\mu^{-} \rightarrow \nu_{\mu} + e^{-} + \bar{\nu}_e$ (фиг. 7). Използвайки я много лесно можем да запишем аналитичния израз за матричния елемент

$$(8.4) \quad M = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{u}_{\nu_\mu}^{\chi_\nu}(\ell_1)^a [\gamma_\alpha (1-\gamma^5)]_a^b u_\mu^{\chi_\mu}(p)_b \right\} \left\{ \bar{u}_e^{\chi_e}(k)^c [\gamma^\alpha (1-\gamma^5)]_c^d u_{\nu_e}^{\chi_{\bar{\nu}}}(l_2)_d \right\}.$$

Тук явно са написани спинорните индекси a, b, c, d и съответните киралности $\chi_\nu, \chi_\mu, \chi_e, \chi_{\bar{\nu}}$ за мюонното неутрино, мюона, електрона и електронното антинеутрино.

За да пресметнем квадрата на абсолютната стойност на матричния елемент трябва да намерим

$$(8.5) \quad M^\dagger = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{u}_\mu^{\chi_\mu}(p)^e [\gamma_\beta (1-\gamma^5)]_e^f u_{\nu_\mu}^{\chi_\nu}(\ell_1)_f \right\} \left\{ \bar{v}_{\nu_e}^{\chi_{\bar{\nu}}}(l_2)_g [\gamma^\beta (1-\gamma^5)]_g^h u_e^{\chi_e}(k)_h \right\}.$$

В нашия курс ние няма да разглеждаме процеси с поляризирани частици, затова при пресмятане на $|M|^2$ можем просто да сумираме по киралностите използвайки формулите (3.28)

$$(8.6) \quad \begin{aligned} \sum_{\chi_\mu} u_\mu^{\chi_\mu}(p)_b \bar{u}_\mu^{\chi_\mu}(p)^e &= (\hat{p} + m_\mu)_b^e, & \sum_{\chi_e} u_e^{\chi_e}(k)_h \bar{u}_e^{\chi_e}(k)^c &= (\hat{k} + m_e)_h^c, \\ \sum_{\chi_\nu} u_{\nu_\mu}^{\chi_\nu}(\ell_1)_f \bar{u}_{\nu_\mu}^{\chi_\nu}(\ell_1)^a &= (\hat{\ell}_1 + m_{\nu_\mu})_f^a, & \sum_{\chi_{\bar{\nu}}} v_{\nu_e}^{\chi_{\bar{\nu}}}(l_2)_d \bar{v}_{\nu_e}^{\chi_{\bar{\nu}}}(l_2)^g &= (\hat{\ell}_2 - m_{\nu_e})_d^g. \end{aligned}$$

Тогава, приемайки че неутрината са безмасови частици $m_{\nu_\mu} = m_{\nu_e} = 0$, получаваме

$$(8.7) \quad \begin{aligned} \sum_\chi |M|^2 &= \frac{G_\mu^2}{2} [\gamma_\alpha (1-\gamma^5)]_a^b (\hat{p} + m_\mu)_b^e [\gamma_\beta (1-\gamma^5)]_e^f (\hat{\ell}_1)_f^a \\ &\quad \times [\gamma^\alpha (1-\gamma^5)]_c^d (\hat{\ell}_2)_d^g [\gamma^\beta (1-\gamma^5)]_g^h (\hat{k} + m_e)_h^c \\ &\equiv \frac{G_\mu^2}{2} \text{Tr} \left[\gamma_\alpha (1-\gamma^5) (\hat{p} + m_\mu) \gamma_\beta (1-\gamma^5) \hat{\ell}_1 \right] \text{Tr} \left[\hat{\ell}_2 \gamma^\beta (1-\gamma^5) (\hat{k} + m_e) \gamma^\alpha (1-\gamma^5) \right]. \end{aligned}$$

Сега всичко се свежда към изчисляването на следи от γ -матрици по формулите (4.10).

Обаче преди да започнем изчисляването на следите можем малко да опростим изразите в тях използвайки свойствата на проекционните оператори (3.23)

$$(8.8) \quad \begin{aligned} \gamma_\alpha \Pi_L (\hat{p} + m_\mu) \gamma_\beta \Pi_L \hat{\ell}_1 &= \gamma_\alpha \Pi_L \hat{p} \gamma_\beta \Pi_L \hat{\ell}_1 = \gamma_\alpha \hat{p} \gamma_\beta \hat{\ell}_1 \Pi_R, \\ \hat{\ell}_2 \gamma^\beta \Pi_L (\hat{k} + m_e) \gamma^\alpha \Pi_L &= \hat{\ell}_2 \gamma^\beta \Pi_L \hat{k} \gamma^\alpha \Pi_L = \hat{\ell}_2 \gamma^\beta \hat{k} \gamma^\alpha \Pi_L. \end{aligned}$$

Тогава

$$(8.9) \quad \begin{aligned} \sum_\chi |M|^2 &= 2G_\mu^2 \text{Tr} \left[\gamma_\alpha \hat{p} \gamma_\beta \hat{\ell}_1 (1+\gamma^5) \right] \text{Tr} \left[\hat{\ell}_2 \gamma^\beta \hat{k} \gamma^\alpha (1-\gamma^5) \right] \\ &= 32G_\mu^2 \left[L_{\alpha\beta}(\ell_1, p) - i\varepsilon_{\alpha\beta\ell_1} \right] \left[L^{\alpha\beta}(\ell_2, k) + i\varepsilon^{\alpha\ell_2\beta k} \right] \\ &\stackrel{(4.5)}{=} 128G_\mu^2 (\ell_1 k) (\ell_2 p), \end{aligned}$$

където $L^{\alpha\beta}(a, b)$ е симетричната част на следата

$$(8.10a) \quad L^{\alpha\beta}(a, b) = a^\alpha b^\beta + a^\beta b^\alpha - \eta^{\alpha\beta}(ab),$$

а индексът на антисиметричния тензор, по който има сумиране с индекса на импулса, за краткост можем да заменим с импулса:

$$(8.10b) \quad \varepsilon_{\dots\alpha\dots} p^\alpha \equiv \varepsilon_{\dots p\dots}.$$

Изчисленията във втория ред на (8.9) са много дълги, защото съдържат 11 ненулеви члена от 16 произведения. Ние ще покажем как можем да получим само една следа

използвайки тъждеството на Фирц (4.12). Нека да разменим горните индекси f и h на γ -матриците в (8.5)

$$(8.11) \quad M^\dagger = \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{u}_\mu^{\chi_\mu}(p)^e [\gamma_\beta(1-\gamma^5)]_e^h u_e^{\chi_e}(k)_h \right\} \left\{ \bar{v}_{\nu_e}^{\chi_\nu}(\ell_2)^g [\gamma^\beta(1-\gamma^5)]_g^f u_{\nu_\mu}^{\chi_\nu}(\ell_1)_f \right\}.$$

Тогава

$$(8.12) \quad \sum_\chi |M|^2 = -\frac{G_\mu^2}{2} [\gamma_\alpha(1-\gamma^5)]_a^b (\hat{p} + m_\mu)_b^e [\gamma_\beta(1-\gamma^5)]_e^h (\hat{k} + m_e)_h^c \\ \times [\gamma^\alpha(1-\gamma^5)]_c^d (\hat{\ell}_2)_d^g [\gamma^\beta(1-\gamma^5)]_g^f (\hat{\ell}_1)_f^a \\ \equiv -\frac{G_\mu^2}{2} \text{Tr} \left[\gamma_\alpha(1-\gamma^5) (\hat{p} + m_\mu) \gamma_\beta(1-\gamma^5) (\hat{k} + m_e) \gamma^\alpha(1-\gamma^5) \hat{\ell}_2 \gamma^\beta(1-\gamma^5) \hat{\ell}_1 \right]$$

и използвайки свойствата на проекционните оператори (3.23) и формулите за сумиране (4.13) получаваме

$$(8.13) \quad \sum_\chi |M|^2 = -4G_\mu^2 \text{Tr} \left[\hat{\ell}_1 \gamma_\alpha (\hat{p} \gamma_\beta \hat{k}) \gamma^\alpha \hat{\ell}_2 \gamma^\beta (1-\gamma^5) \right] \stackrel{(4.13)}{=} 8G_\mu^2 \text{Tr} \left[\hat{\ell}_1 \hat{k} \gamma_\beta (\hat{p} \hat{\ell}_2) \gamma^\beta (1-\gamma^5) \right] \\ \stackrel{(4.13)}{=} 32G_\mu^2 (\ell_2 p) \text{Tr} \left[\hat{\ell}_1 \hat{k} (1-\gamma^5) \right] = 128G_\mu^2 (\ell_2 p) (\ell_1 k).$$

За да изчислим вероятността на разпада на неполяризиран мюон по формулата (6.8) трябва да отчетем неговия спин, защото при пресмятане на квадрата на абсолютната стойност на матричния елемент ние сумирахме по всички киралности. Това е правилно отчитане за частици в крайно състояние, когато те остават недетектирани или детекторите са нечувствителни към техните спинови състояния и регистрират частици независимо от спина. В начално състояние неполяризираната частица има вероятност $1/(2J_i + 1)$ да се намира в едното от $2J_i + 1$ състояния. Затова е необходимо във формулата (6.8) вместо $|M|^2$ да вземем средното значение на $\sum_\chi |M|^2$ по спиновите състояния на началната частица

$$(8.14) \quad \overline{\sum_\chi |M|^2} = \frac{1}{2J_i + 1} \sum_\chi |M|^2.$$

Така в системата на покой на мюона

$$(8.15) \quad p = (m_\mu, \mathbf{0}), k = (E, \mathbf{k}), \ell_1 = (\ell_1^0, \boldsymbol{\ell}_1), \ell_2 = (\ell_2^0, \boldsymbol{\ell}_2),$$

получаваме

$$(8.16) \quad d\Gamma = \frac{1}{2} \frac{\sum_\chi |M|^2}{2m_\mu} d\Phi_3, d\Phi_3 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - k - \ell_1 - \ell_2) \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E} \frac{d^3\boldsymbol{\ell}_1}{(2\pi)^3 2\ell_1^0} \frac{d^3\boldsymbol{\ell}_2}{(2\pi)^3 2\ell_2^0},$$

където факторът $1/2$ отчита усредняване по спина на мюона. По нататък ще са ни необходими следните кинематични съотношения

$$(8.17) \quad p - k = q = \ell_1 + \ell_2: \quad q^2 = 2(\ell_1 \ell_2) = 2(q \ell_1) = 2(q \ell_2) = m_\mu^2 - 2m_\mu E + m_e^2 \geq 0, \\ (pk) = m_\mu E, (qp) = m_\mu(m_\mu - E), (qk) = m_\mu E - m_e^2.$$

Следваща стъпка ще бъде изчисляването на фазовия обем в (8.16) за три частици в крайно състояние, който се умножава на кинематичния фактор от матричния елемент (8.9). Неутрината са частици, които в този разпад обикновено остават недетектирани и ние трябва да интегрираме по техните импулси. Затова, нека първо, да пресметнем интеграла

$$(8.18) \quad I^{\alpha\beta}(q) = \int \ell_1^\alpha \ell_2^\beta \delta^{(4)}(p-k-q) \frac{d^3\ell_1}{\ell_1^0} \frac{d^3\ell_2}{\ell_2^0}.$$

Този интеграл има размерност M^2 в масови единици и зависи само от предадения импулс към неутрината q . Затова от съображение за лоренц-ковариантност той може да бъде представен като

$$(8.19) \quad I^{\alpha\beta}(q) = Aq^2\eta^{\alpha\beta} + Bq^\alpha q^\beta.$$

За да намерим коефициентите A и B умножаваме (8.18) и (8.19) с $\eta_{\alpha\beta}$ и $q_\alpha q_\beta$

$$(8.20) \quad \begin{cases} \eta_{\alpha\beta} I^{\alpha\beta}(q) = \int (\ell_1 \ell_2) \delta^{(4)}(p-k-q) \frac{d^3\ell_1}{\ell_1^0} \frac{d^3\ell_2}{\ell_2^0} \stackrel{(8.17)}{=} \frac{q^2}{2} I_0 = (4A+B)q^2, \\ q_\alpha q_\beta I^{\alpha\beta}(q) = \int (q\ell_1)(q\ell_2) \delta^{(4)}(p-k-q) \frac{d^3\ell_1}{\ell_1^0} \frac{d^3\ell_2}{\ell_2^0} \stackrel{(8.17)}{=} \left(\frac{q^2}{2}\right) I_0 = (A+B)(q^2)^2, \end{cases}$$

където I_0 е безразмерна константа

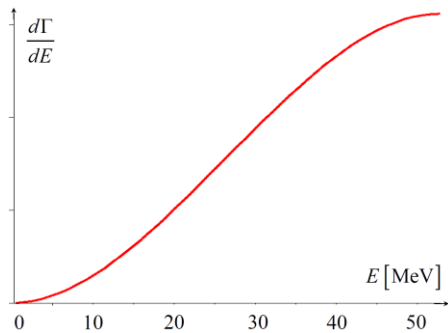
$$(8.21) \quad I_0 = \int \delta^{(4)}(p-k-q) \frac{d^3\ell_1}{\ell_1^0} \frac{d^3\ell_2}{\ell_2^0}.$$

От системата (8.20) получаваме $B = 2A = I_0/6$. Интегралът (8.21) е инвариант, така че можем да го пресметнем в удобна за нас система на покой на неутрината

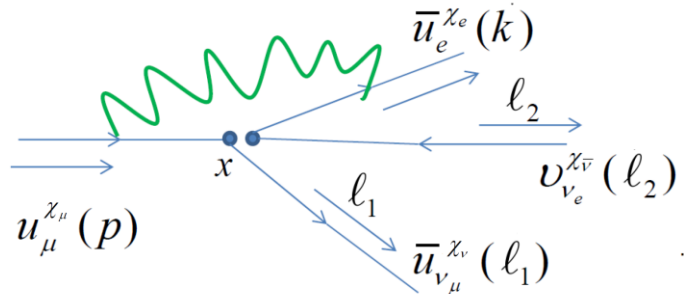
$$(8.22) \quad q = (q^0, \mathbf{0}), \quad \frac{d^3\ell_1}{\ell_1^0} = 4\pi\ell_1^0 d\ell_1^0: \quad \begin{aligned} I_0 &= 4\pi \int \ell_1^0 d\ell_1^0 \delta(q^0 - \ell_1^0 - \ell_2^0) \delta^{(3)}(\ell_1 + \ell_2) \frac{d^3\ell_2}{\ell_2^0} \\ &\stackrel{\ell_2^0 = \ell_1^0}{=} 4\pi \int d\ell_1^0 \delta(q^0 - 2\ell_1^0) = 2\pi. \end{aligned}$$

Използвайки получените резултати можем да запишем диференциалната вероятност на разпада на мюона (8.16) в зависимост от енергията на електрона (фиг. 8)

$$(8.23) \quad \begin{aligned} d\Gamma &= \frac{4G_\mu^2}{(2\pi)^5 m_\mu} \frac{\pi}{6} \left[q^2(pk) + 2(qp)(qk) \right] \frac{d^3\mathbf{k}}{E} \stackrel{d^3\mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}| \int d\Omega_3 = 4\pi|\mathbf{k}| dE}{=} \\ &= \frac{G_\mu^2}{12\pi^3} \left[m_\mu E(3m_\mu - 4E) + m_e^2(3E - 2m_\mu) \right] \sqrt{E^2 - m_e^2} dE. \end{aligned}$$



Фиг. 8



Фиг. 9

От фиг. 8 се вижда, че максимална вероятност на разпада се достига при максимална енергия на електрона

$$(8.24) \quad E_{\max} \stackrel{(8.17)}{=} \frac{m_{\mu}^2 + m_e^2}{m_{\mu}} \simeq \frac{m_{\mu}}{2}.$$

Така че за да изчислим пълната вероятност на разпада можем с добра точност да ползваме приближението $E \gg m_e$. Тогава диференциалната вероятност (8.23) може да се запише във вида

$$(8.25) \quad d\Gamma = \frac{G_{\mu}^2 m_{\mu}^5}{96\pi^3} (3-2x)x^2 dx,$$

където x е относителната енергия:

$$(8.26) \quad 0 \leq x = E/E_{\max} \simeq 2E/m_{\mu} \leq 1.$$

Пълната ширина на разпада се получава от интегриране на (8.25) в границите (8.26)

$$(8.27) \quad \Gamma = \int_0^1 \frac{d\Gamma}{dx} dx = \frac{G_{\mu}^2 m_{\mu}^5}{192\pi^3}.$$

Нея можем да сравним с експериментално измереното време на живот на муона $\tau_{\text{exp}} \approx 2.197 \times 10^{-6}$ s:

$$(8.28) \quad \tau_{\text{exp}} = \frac{\hbar}{\Gamma} \approx \frac{6.582 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}}{G_{\mu}^2 (105.66 \text{ MeV})^5} \cdot 192\pi^3,$$

от което получаваме приблизителната стойност на константата $G_{\mu} \approx 1.164 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$.

По точно нейното значение можем да получим, ако отчетем в (8.27) малкия параметър $\rho = m_e^2/m_{\mu}^2 \approx 2.34 \times 10^{-5}$ и радиационната поправка на фиг. 9:

$$(8.29) \quad \Gamma = \frac{G_{\mu}^2 m_{\mu}^5}{192\pi^3} f(\rho) \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{25}{4} - \pi^2 \right) + \mathcal{O}(\alpha^2, \rho) \right] \rightarrow G_{\mu} = 1.1663787(6) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2},$$

където $\alpha = e^2/4\pi$ е константата на финната структура, а

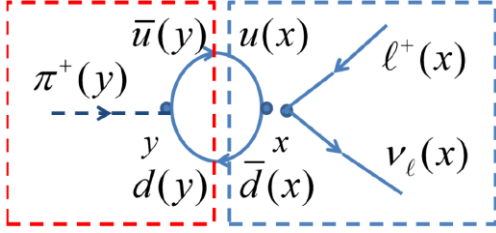
$$(8.30) \quad f(\rho) = 1 - 8\rho + 8\rho^3 - \rho^4 - 12\rho^2 \ln \rho.$$

9. Разпад на зареден пион

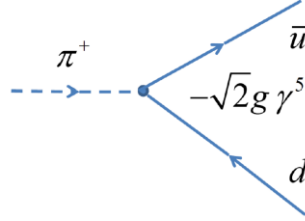
Този разпад е по-сложен от лептонния защото е свързан с кварки или, другояче казано, със силно взаимодействащи частици. Неутронът и протонът се състоят от тройки от леки кварки: dud и duu съответно, т.е. лагранжианът на бета разпада (7.2) може да бъде преписан като кварков лагранжиан за процеса $d \rightarrow u + \ell + \bar{\nu}_{\ell}$ и др.

$$(9.1) \quad \mathcal{L}_w(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}(x) \gamma_{\alpha} (1 - \gamma^5) d(x) \right] \cdot J_{\text{lept}}^{\alpha}(x) - \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{d}(x) \gamma_{\alpha} (1 - \gamma^5) u(x) \right] \cdot J_{\text{lept}}^{\alpha\dagger}(x),$$

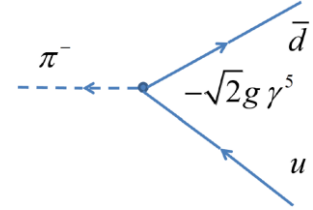
където $J_{\text{lept}}^{\alpha} = \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\ell} \gamma^{\alpha} (1 - \gamma^5) \nu_{\ell}$ е универсалния лептонен ток (8.1). В тази глава ние ще се интересуваме от разпади на заредени пиони π^{+} или π^{-} , които се състоят от кварк-антикваркови двойки: $u\bar{d}$ или $d\bar{u}$, а бета разпада ще оставим за следваща глава. Разпадът на положително зареден пион $\pi^{+} \rightarrow \ell^{+} + \nu_{\ell}$, където $\ell = e$ или μ , се описва с диаграмата на фиг. 10.



Фиг. 10



Фиг. 11а



Фиг. 11б

Тя се състои от два процеса: първият е силно-взаимодействащ процес на превръщане на пиона в кварк-антикваркова двойка, а вторият е тяхната анихилация с изпускане на лептонна двойка, които се описва с лагранжиана на слабото взаимодействие (9.1). Тъй като кварките не могат да бъдат в свободно състояние, те образуват примка от виртуални частици. За да пресметнем тази диаграма ние трябва да предложим някакъв феноменологичен лагранжиан⁶ за първия процес. Най-простият лагранжиан за два типа кваркови аромата е от типа на Юкава (Hideki Yukawa, 1907 – 1981)

$$(9.2) \quad \mathcal{L}_s(y) = ig \bar{\psi}(y) \gamma^5 \boldsymbol{\tau} \psi(y) \cdot \boldsymbol{\pi}(y),$$

където ψ е изотопичен дублет, а $\boldsymbol{\pi}$ е триплет на пионните полета

$$(9.3) \quad \bar{\psi} = (\bar{u} \ \bar{d}), \quad \psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\pi} = (\pi^1, \pi^2, \pi^3).$$

Той е инвариантен относно преобразованията в групата на ароматите $SU(2)_f$. Матриците $\boldsymbol{\tau}$ са идентични с матриците на Паули (2.12), обаче се обозначават с друга буква, защото действат не в спиновото, а в изотопичното пространство. За да бъде лагранжианът (9.2) ермитов и скалар се използва матрицата $i\gamma^5$, защото пионите са псевдоскаларни частици. Заредените пиони се определят като

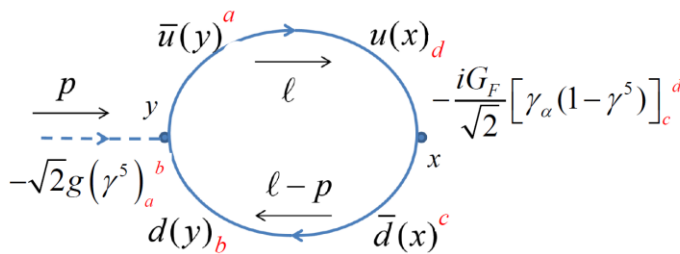
$$(9.4) \quad \pi^\pm = \frac{\pi^1 \mp i\pi^2}{\sqrt{2}},$$

а неутралният π^0 се идентифицира с π^3 . Тогава лагранжианът (9.2) придобива вида

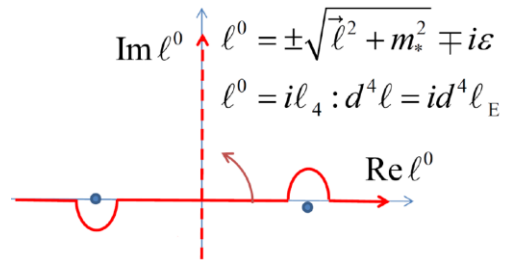
$$(9.5) \quad L_s = i\sqrt{2}g \bar{u} \gamma^5 d \cdot \pi^+ + ig (\bar{u} \gamma^5 u - \bar{d} \gamma^5 d) \cdot \pi^0 + i\sqrt{2}g \bar{d} \gamma^5 u \cdot \pi^-.$$

Диаграмите на Файнман за първия и последен член са показани на фиг. 11а и 11б, съответно.

Примката, която трябва да пресметнем е представена на фиг. 12.



Фиг. 12



Фиг. 13

⁶ Силното взаимодействие се описва от квантовата хромодинамика, която обаче е неприложима за ниски енергии.

Тя е образувана от хронологичното вдвояване на антикомутиращи фермионни оператори

$$(9.6) \quad \left\langle T \left(\bar{u}(y)_a d(y)_b \bar{d}(x)_c u(x)_d \right) \right\rangle_0 = (-1) \left\langle T \left(u(x)_d \bar{u}(y)_a \right) \right\rangle_0 \left\langle T \left(d(y)_b \bar{d}(x)_c \right) \right\rangle_0,$$

което води до допълнителния знак минус и интегриране по вътрешен импулс ℓ . Сумиране по цветните индекси на кварките, води до появяване на коефициента на броя на цветове $N_C = 3$. Така че лагранжианът, който се генерира от диаграмата на фиг. 10 има вида

$$(9.7) \quad \Delta \mathcal{L} = (-i)(-1)(-\sqrt{2}g) \left(-\frac{iG_F}{\sqrt{2}} \right) \text{Tr}_{\text{color}} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left\{ i(\hat{\ell} + m_u) \gamma^5 i [(\hat{\ell} - \hat{p}) + m_d] \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \right\}}{[\ell^2 - m_u^2 + i\varepsilon][(\ell - p)^2 - m_d^2 + i\varepsilon]} \cdot J_{\text{lept}}^{\alpha \dagger}$$

$$= 4im g G_F N_C P_\alpha \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{(-i)}{[\ell^2 - m^2 + i\varepsilon][(\ell - p)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \cdot \bar{v}_\ell \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \ell.$$

За да изчислим интеграла в (9.7) нека първо да обединим два знаменателя в един използвайки параметризацията на Файнман

$$(9.8) \quad \frac{1}{[\ell^2 - m^2 + i\varepsilon][(\ell - p)^2 - m^2 + i\varepsilon]} = \int_0^1 \frac{dx}{\left\{ (1-x)[\ell^2 - m^2 + i\varepsilon] + x[(\ell - p)^2 - m^2 + i\varepsilon] \right\}^2}$$

$$\stackrel{\ell' = \ell - xp}{=} \int_0^1 \frac{dx}{\left[\ell'^2 - m_*^2 + i\varepsilon \right]^2},$$

Тогава

$$(9.9) \quad I = \int_0^1 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{(-i) dx}{[\ell^2 - m_*^2 + i\varepsilon]^2} \stackrel{\text{Фиг. 13}}{=} \int_0^1 \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{dx}{[\ell_E^2 + m_*^2]^2} = \int_0^1 \int \frac{\ell_E^2 d\ell_E^2 d\Omega_4}{2(2\pi)^4} \frac{dx}{[\ell_E^2 + m_*^2]^2}$$

$$\stackrel{\ell_E^2 = z}{=} \lim_{\Lambda^2 \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{dz}{[z + m_*^2]^2} = \lim_{\Lambda^2 \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2 + m_*^2}{m_*^2} - 1 \right)$$

$$\stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} - 2 \frac{\sqrt{4m^2 - m_\pi^2}}{m_\pi} \cdot \text{arctg} \frac{m_\pi}{\sqrt{4m^2 - m_\pi^2}} + 1 \right),$$

където ние използвахме завъртане на Вик в комплексната плоскост ℓ^0 (фиг. 13), преход към полярни координати в евклидовото четиримерно пространство⁷ и регуляризация с Λ^2 . Ясно е, че интегралът (9.9) е логаритмично разходящ, което е обичайно явление в квантовата теория на полето, и ние не можем да изчислим неговата стойност, а трябва да я вземем от експеримента. Нека определим константата на разпад на пиона

$$(9.10) \quad F_\pi = 4\sqrt{2}m g N_C I,$$

чрез която да изразим ефективния лагранжиан (9.7) в импулсно и конфигурационно представяне

$$(9.11) \quad \Delta \mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} F_\pi i p_\alpha \cdot \bar{v}_\ell \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \ell \stackrel{e^{-ipx}}{\rightarrow} -\frac{G_F}{\sqrt{2}} F_\pi \partial_\alpha \pi^+ \cdot \bar{v}_\ell \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \ell.$$

Сега ние имаме всичко необходимо да запишем матричния елемент

⁷ От интегрирането по ъглите в d -мерно пространство се получава $\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$.

$$(9.12) \quad M = \frac{iG_F}{\sqrt{2}} F_\pi p_\alpha \cdot \bar{u}_\nu(q) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) v_\ell(k) = \frac{iG_F}{\sqrt{2}} F_\pi \bar{u}_\nu(q) (\hat{q} + \hat{k}) (1 - \gamma^5) v_\ell(k)$$

$$\stackrel{\bar{u}_\nu(q) \hat{q} = 0}{=} - \frac{iG_F}{\sqrt{2}} F_\pi m_\ell \bar{u}_\nu(q) (1 + \gamma^5) v_\ell(k) \rightarrow M^\dagger = \frac{iG_F}{\sqrt{2}} F_\pi m_\ell \bar{v}_\ell(k) (1 - \gamma^5) u_\nu(q)$$

и пресметнем вероятността на разпада. Сумирайки по киралностите на лептоните получаваме

$$(9.13) \quad \sum_\chi |M|^2 = \frac{G_F^2 F_\pi^2 m_\ell^2}{2} \text{Tr} \left[\hat{q} (1 + \gamma^5) (\hat{k} - m_\ell) (1 - \gamma^5) \right] = 4G_F^2 F_\pi^2 m_\ell^2 (qk) = 2G_F^2 F_\pi^2 m_\ell^2 (m_\pi^2 - m_\ell^2).$$

В системата на покой на пиона

$$(9.14) \quad p = (m_\pi, \mathbf{0}), \quad k = (E, \mathbf{k}), \quad q = (q^0, \mathbf{q}),$$

вероятността на разпад има вида

$$(9.15) \quad \Gamma = \frac{\sum |M|^2}{2m_\pi} \Phi_2, \quad \Phi_2 = (2\pi)^4 \int \delta^{(4)}(p - k - q) \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E} \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2q^0}.$$

За двучастичен разпад фазовия обем е константа, която може да бъде пресметната

$$(9.16) \quad \Phi_2 = \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{E} \delta^{(4)}(p - k - q) \theta(q^0) \delta(q^2) d^4q \stackrel{d^3k=4\pi|k|EdE}{=} \\ = \frac{1}{2\pi} \int dE \sqrt{E^2 - m_\ell^2} \delta(m_\pi^2 + m_\ell^2 - 2m_\pi E) = \frac{m_\pi^2 - m_\ell^2}{8\pi m_\pi^2}.$$

Така че окончателно получаваме

$$(9.17) \quad \Gamma_{\pi \rightarrow \ell \nu} = \frac{G_F^2 F_\pi^2 m_\ell^2 m_\pi}{8\pi} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_\pi^2} \right)^2.$$

Матричният елемент на разпада на пиона (9.12) е пропорционален на масата на лептона⁸ и щеше да е нула, ако лептонът беше безмасов. Тук играе роля законът за запазване на ъгловия момент (фиг. 14).

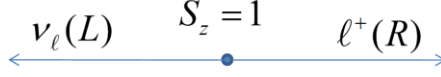
Пион до разпада

$$S = 0$$

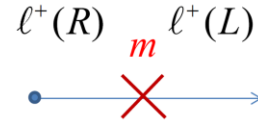


Фиг. 14а

Пион след разпада



Фиг. 14б



Фиг. 15

В началното състояние спинът на системата е нула за безспинова частица като пиона (фиг. 14а). В крайно състояние се раждат ляво неутрино и десен зареден лептон, които имат противоположни импулси и имат единичен спин (фиг. 14б). Единственият начин да се запази ъгловия момент е обръщането на спиралността за масивна частица (фиг. 15), защото масовият член смесва леви и десни състояния

$$(9.18) \quad \mathcal{L}_m = m \bar{\psi} \psi = m \bar{\psi} \Pi_L \psi + m \bar{\psi} \Pi_R \psi = m \bar{\psi}_R \psi_L + m \bar{\psi}_L \psi_R.$$

Този факт веднага означава, че доминиращият разпад на пиона ще протича в по-масивната от електрона (позитрона) частица мюон

⁸ Вероятността на разпада (9.17) съответно е пропорционална на квадрата на масата на лептона.

$$(9.19) \quad \frac{\Gamma_{\pi \rightarrow e\nu}}{\Gamma_{\pi \rightarrow \mu\nu}} = \frac{m_e^2(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} \approx 1.28 \times 10^{-4}.$$

където $m_\pi \approx 139.57$ MeV е масата на заредения пион. Действително експериментално е установено, че относителните вероятности на разпад са

$$(9.20) \quad Br(\pi \rightarrow \mu\nu) = \frac{\Gamma_{\pi \rightarrow \mu\nu}}{\Gamma_{\text{tot}}}|_{\text{exp}} \approx 99.99\%, \quad Br(\pi \rightarrow e\nu) = \frac{\Gamma_{\pi \rightarrow e\nu}}{\Gamma_{\text{tot}}}|_{\text{exp}} \approx 1.23 \times 10^{-4},$$

което се намира в добро съгласие с оценката (9.19). Предполагайки че $G_F = G_\mu$ (8.29), ние можем да определим константата на разпад на пиона сравнявайки (9.17) с

експериментално измереното време на живот на пиона $\tau_{\text{exp}} \approx 2.6 \times 10^{-8}$ s: $F_\pi \approx 128.3$ MeV. Реалната стойност

$$(9.21) \quad F_\pi = 130.5(1) \text{ MeV},$$

която сега е приета, се получава отчитайки радиационните поправки и факта, че G_F не е точно равна на G_μ .

10. Разпад на неутрона

В тази глава ние ще изучим още по-сложен процес на бета разпад, при който и в начално и в крайно състояния присъстват силно-взаимодействащи частици – кварки. В този случай детайлно пресмятане на диаграми на Файнман, каквото ние направихме за разпада на пиона, е невъзможно. Затова тук ще предложим по-малко информативен, но по-универсален начин за въвеждане на формфактори такива като F_π , използвайки метода на бра-кет в обозначение на Дирак. За да получим ефективния лагранжиан (9.11) от лагранжиана на слабото взаимодействие (9.1) ние трябва да заключим кварковия ток между бра и кет състоянията на силно-взаимодействащите частици

$$(10.1) \quad \langle 0 | \bar{d} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) u | \pi^+(p) \rangle = -i F_\pi p_\alpha.$$

Кварковият ток съдържа векторна и аксиална компоненти, които се преобразуват различно при инверсия на пространството: (5.9) и (5.10), съответно. Взимайки предвид че пионът е псевдоскаларна частица (5.8) матричният елемент от векторния кварков ток е всъщност аксиален вектор, който е невъзможно да бъде построен от импулса p и лоренц индекса α и затова е нула. Обаче, матричният елемент от аксиалната компонента на кварковия ток е вектор и може да бъде изразен чрез импулса p :

$$(10.2) \quad \langle 0 | \bar{d} \gamma_\alpha \gamma^5 u | \pi^+(p) \rangle = i F_\pi p_\alpha.$$

Друго преобразование, което ще ни потрѣбва, определя ново квантово число на заредените силно-взаимодействащи частици G -четност:

$$(10.3) \quad G = CT_2 = C e^{i\pi\tau^2/2} = C \left(\cos \frac{\pi}{2} + i\tau^2 \sin \frac{\pi}{2} \right) = C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

защото силното взаимодействие е инвариантно относно преобразованието зарядово спрягане и въртене в изотопично пространство, в дадения случай на ъгъл π около втората му ос

$$(10.4) \quad T_2[u] = T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -d, \quad T_2[d] = T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u.$$

Зарядовото спрягане преобразува зареден пион в състояние с обратен електричен заряд и затова не е собствен оператор. Това налага да направим още едно завъртане в изотопичното пространство за да бъде G собствен оператор. Например, за пиона

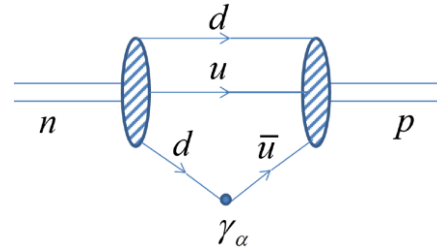
$$(10.5) \quad \begin{aligned} G[\pi^+] &= CT_2[\bar{d}\gamma^5 u] = -C[\bar{u}\gamma^5 d] = -\pi^+, \\ G[\pi^0] &= CT_2\left[\frac{\bar{u}\gamma^5 u - \bar{d}\gamma^5 d}{\sqrt{2}}\right] = C\left[\frac{\bar{d}\gamma^5 d - \bar{u}\gamma^5 u}{\sqrt{2}}\right] = -\pi^0, \quad \rightarrow \quad G[\pi] = (-1)\pi, \\ G[\pi^-] &= CT_2[\bar{u}\gamma^5 d] = -C[\bar{d}\gamma^5 u] = -\pi^-, \end{aligned}$$

G четността е минус единица. Пряко следствие на това е, че в процесите на силните взаимодействия броят на пионите трябва да е четно число.

Използвайки тези факти нека да се обърнем към разпада на свободния неутрон $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. За да получим ефективния лагранжиан ние трябва да заключим кварковия ток в (9.1) между бра и кет състоянията на протон с импулс p и неутрон с импулс r , съответно: $\langle p(p) | \bar{u}\gamma_\alpha (1 - \gamma^5) d | n(r) \rangle$. Първо ще анализираме матричния елемент на векторния кварков ток, който трябва да зависи от предадения импулс на лептонната двойка $q = k + \ell = r - p$, където k и ℓ са импулсите на електрон и антинейтрино,

$$(10.6) \quad \langle p(p) | \bar{u}\gamma_\alpha d | n(r) \rangle = \bar{u}_p(p) \left[f_1(q^2)\gamma_\alpha + f_2(q^2)\sigma_{\alpha\beta}q^\beta + f_3(q^2)q_\alpha \right] u_n(r).$$

Тук $f_1(q^2)$, $f_2(q^2)$ и $f_3(q^2)$ са векторни формфактори, които възникват от диаграмата на фиг. 16, която, за съжаление, ние няма да можем да пресметнем. Обаче, тези формфактори за разпада на неутрона са почти константи, защото изменението на квадрата на предадения импулс е ограничено $(0.511 \text{ MeV})^2 \approx m_e^2 \leq (k + \ell)^2 = q^2 = (r - p)^2 \leq (m_n - m_p)^2 \approx (1.293 \text{ MeV})^2$.



Фиг. 16

Формфакторът $f_1(q^2)$ се нарича слаб заряд, който е аналогичен на електромагнитния заряд. Действително, електромагнитното взаимодействие с кварки може да бъде преписано чрез неутралната компонента на изотопичния триплет и синглет

$$(10.7) \quad eA^\alpha \left[\left(+\frac{2}{3} \right) \bar{u}\gamma_\alpha u + \left(-\frac{1}{3} \right) \bar{d}\gamma_\alpha d \right] = eA^\alpha \left[\frac{1}{2} \bar{\psi}\gamma_\alpha \tau^3 \psi + \frac{1}{6} \bar{\psi}\gamma_\alpha \psi \right],$$

където ψ е изотопичен дублет (9.3), а кварковите токове

$$(10.8) \quad V_\alpha^+ = \bar{\psi}\gamma_\alpha \tau^+ \psi = \bar{u}\gamma_\alpha d, V_\alpha^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}\gamma_\alpha \tau^3 \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}\gamma_\alpha u - \bar{d}\gamma_\alpha d), V_\alpha^- = \bar{\psi}\gamma_\alpha \tau^- \psi = \bar{d}\gamma_\alpha u,$$

образуват изотопичен триплет. Матриците τ^+ и τ^- играят роля на повишаващи и понижаващи оператори в изотопичното пространство

$$(10.9) \quad \tau^\pm = \frac{\tau^1 \pm i\tau^2}{2}: \quad \tau^+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Това означава, че кварковите токове (10.8) имат същите свойства като електромагнитния ток, който се запазва

$$(10.10) \quad q^\alpha V_\alpha = 0.$$

Това се нарича запазване на векторния ток (CVC). Последното води до нетривиален извод за адитивност на електричния заряд, а именно: общият заряд на системата е равен на

сумата от зарядите на съставните ѝ части, независимо от това как те взаимодействат помежду си. Например, зарядът на протона се получава като сума от зарядите на съставлящите го кварки. Аналогично това важи и за слабия заряд на кварките и нуклоните. Електричният заряд се определя при нулев предаден импулс, така че

$$(10.11) \quad f_1(0) = 1.$$

Формфакторът $f_2(q^2)$ се нарича слаб магнетизъм и може да бъде оценен използвайки електромагнитните свойства на нуклоните. Взаимодействието на протона и неутрона с електромагнитното поле може да се препише чрез неутралната компонента на изотопичния триплет и синглет

$$(10.12) \quad eA^\alpha \bar{p} \left(\gamma_\alpha + \frac{1.79}{2m_N} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \right) p + eA^\alpha \bar{n} \left(-\frac{1.91}{2m_N} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \right) \\ = \frac{1}{2} eA^\alpha \bar{\Psi} \left(\gamma_\alpha + \frac{3.7}{2m_N} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \right) \tau^3 \Psi + \frac{1}{2} eA^\alpha \bar{\Psi} \left(\gamma_\alpha - \frac{0.12}{2m_N} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \right) \Psi,$$

където $\Psi^T = (p \ n)$ е нуклонен изотопичен дублет. Взимайки предвид че компонентата V_α^+ е от един и същ изотопичен мултиплет с неутралната компонента V_α^0 (10.8), за формфактора $f_2(q^2)$ се получава

$$(10.13) \quad f_2(0) = \frac{3.7}{2m_N}.$$

От (10.12) също се вижда, че

$$(10.14) \quad f_3 = 0.$$

Формфакторът $f_3(q^2)$ се нарича ефективен скалар и ние можем да укажем две причини, които водят до неговото отсъствие (10.14). Първата следва от запазване на векторния ток (10.10) в случая на точна изотопична симетрия

$$(10.15) \quad q^\alpha V_\alpha^+ = q^\alpha \bar{u}(p_u) \gamma_\alpha d(p_d) = \bar{u}(p_u) (\hat{p}_d - \hat{p}_u) d(p_d) = (m_d - m_u) \bar{u}(p_u) d(p_d) \stackrel{m_d \approx m_u}{\approx} 0, \\ q^\alpha \bar{u}_p(p) [f_1 \gamma_\alpha + f_2 \sigma_{\alpha\beta} q^\beta + f_3 q_\alpha] u_n(r) = [f_1(m_n - m_p) + f_3 q^2] \bar{u}_p u_n \stackrel{m_n \approx m_p}{\rightarrow} f_3 \approx 0.$$

Втората причина е свързана със запазването на квантовото число G (10.3) в силните взаимодействия. G -четността на векторния ток е положителна, а на скаларния – отрицателна:

$$(10.16) \quad G[\bar{u} \gamma_\alpha d] = (+1) \bar{u} \gamma_\alpha d, \quad G[\bar{u}_p u_n] = (-1) \bar{u}_p u_n.$$

Затова ефективният скалар не може да се генерира в силните взаимодействия.

Нека сега да се обърнем към по-интересния случай на аксиалния кварков ток, който няма аналози като електромагнетизма

$$(10.17) \quad \langle p(p) | \bar{u} \gamma_\alpha \gamma^5 d | n(r) \rangle = \bar{u}_p(p) [g_1(q^2) \gamma_\alpha \gamma^5 + g_2(q^2) \sigma_{\alpha\beta} \gamma^5 q^\beta + g_3(q^2) \gamma^5 q_\alpha] u_n(r).$$

Първо ние веднага можем да изключим формфактора g_2 , който се нарича слаб електризъм. Действително G -четността на аксиалния ток е отрицателна, а на тензорния – положителна:

$$(10.18) \quad G[\bar{u} \gamma_\alpha \gamma^5 d] = (-1) \bar{u} \gamma_\alpha \gamma^5 d, \quad G[\bar{u}_p \sigma_{\alpha\beta} \gamma^5 u_n] = (+1) \bar{u}_p \sigma_{\alpha\beta} \gamma^5 u_n.$$

Интересно е, че аксиалният ток също се запазва за безмасови кварки (кирално симетрично приближение)

$$(10.19) \quad q^\alpha A_\alpha^+ = q^\alpha \bar{u}(p_u) \gamma_\alpha \gamma^5 d(p_d) = \bar{u}(p_u) (\hat{p}_d - \hat{p}_u) \gamma^5 d(p_d) = -(m_d + m_u) \bar{u}(p_u) \gamma^5 d(p_d) \stackrel{m \rightarrow 0}{\approx} 0.$$

Това се нарича частично запазване на аксиалния ток (PCAC). Тогава от дясната страна на (10.17)

$$(10.20) \quad \begin{aligned} 0 &\stackrel{(10.19)}{\approx} q^\alpha \bar{u}_p(p) [g_1(q^2) \gamma_\alpha + g_3(q^2) q_\alpha] \gamma^5 u_n(r) = [-g_1(q^2)(m_n + m_p) + g_3(q^2) q^2] \bar{u}_p \gamma^5 u_n \\ g_3(q^2) &\approx \frac{2m_N}{q^2} g_1(q^2) \end{aligned}$$

получаваме съотношение между ефективния псевдоскалар g_3 и аксиалния заряд g_1 . Ако приложим PCAC хипотезата към съотношението (10.2)

$$(10.21) \quad p^\alpha \langle 0 | \bar{d} \gamma_\alpha \gamma^5 u | \pi^+(p) \rangle = i F_\pi p^2 = i F_\pi m_\pi^2 \stackrel{(10.19)}{\approx} 0.$$

получаваме, че пионът става безмасов в случай на безмасови кварки.

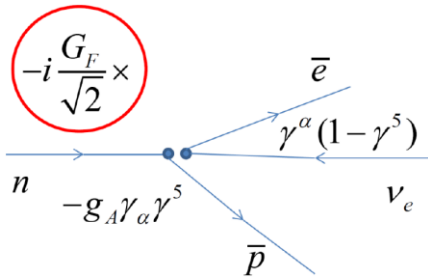
За да изясним природата на съотношението (10.20) нека да разгледаме лагранжиана на Юкава (9.2) за дублета на нуклоните Ψ от (10.12)

$$(10.22) \quad \mathcal{L}_s = ig \bar{\Psi} \gamma^5 \tau \Psi \cdot \pi = i\sqrt{2}g \bar{p} \gamma^5 n \cdot \pi^+ + ig (\bar{p} \gamma^5 p - \bar{n} \gamma^5 n) \cdot \pi^0 + i\sqrt{2}g \bar{n} \gamma^5 p \cdot \pi^-,$$

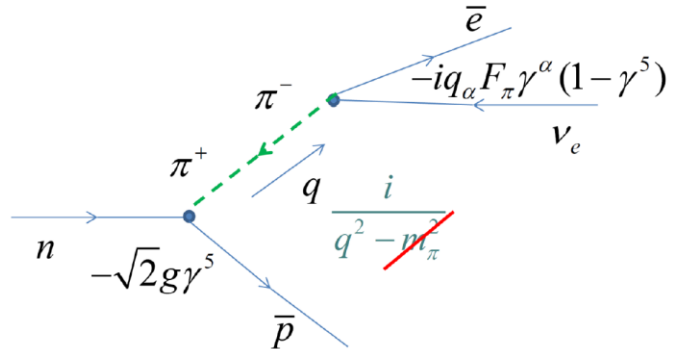
взаимодействието на аксиалния нуклонен ток от (7.2)

$$(10.23) \quad \mathcal{L}_A \stackrel{g_A = -g_1}{=} \frac{G_F}{\sqrt{2}} g_A \bar{p} \gamma_\alpha \gamma^5 n \cdot \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_e + h.c.$$

и лагранжиана на разпада на пиона (9.11). Първият член от (10.23) е показан на фиг. 17



Фиг. 17



Фиг. 18

На фиг. 18 е представен допълнителен процес на разпада на неутрона с изпускане на електронна двойка чрез виртуален пион. Той е съставен от първия член на лагражиана (10.22) и ермитово спрегнатия лагранжиан (9.11) за разпада на отрицателния зареден пион, който води до лагранжиана

$$(10.24) \quad \Delta \mathcal{L}_A = (-i) \left(-i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \right) (-\sqrt{2}g) \bar{p} \gamma^5 n \frac{i}{q^2} (-i q_\alpha F_\pi) \cdot \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_e.$$

Ако обединим и двата лагранжиана получаваме детайлната структура на аксиалния адронен ток (10.17)

$$(10.25) \quad \mathcal{L}_A + \Delta\mathcal{L}_A = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{p} \left[g_A \gamma_\alpha \gamma^5 + \frac{\sqrt{2} g F_\pi}{q^2} \gamma^5 q_\alpha \right] n \cdot \bar{e} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_e + h.c.$$

Сравнявайки (10.20) и (10.25) получаваме ново съотношение – съотношение на Голдбергер (Marvin Leonard Goldberger, 1922 – 2014) и Трейман (Sam Bard Treiman, 1925 – 1999)

$$(10.26) \quad g_A \approx \frac{g F_\pi}{\sqrt{2} m_N} \approx 1.3,$$

което свързва ефективната константа на силното взаимодействие на Юкава g , масата на нуклона m_N и константите на слабото взаимодействие: аксиалния заряд g_A и константата на разпад на заредения пион F_π . За оценката (10.26) ние използвахме следните експериментални значения

$$(10.27) \quad \frac{g^2}{4\pi} \simeq 14 \rightarrow g \simeq 13.26, F_\pi = 130.5 \text{ MeV}, m_N = \frac{m_n + m_p}{2} \approx 938.9 \text{ MeV}.$$

Предаденият импулс $|\mathbf{q}|$ е много малък в сравнение с нуклонните маси и протонът може да бъде разгледан в нерелативистко приближение. Така за неутрона в покой и протона в енергетичното представяне (2.11) получаваме

$$(10.28) \quad \bar{u}_p \stackrel{(2.15)}{=} (\varphi_p^\dagger \ 0), u_n \stackrel{(2.15)}{=} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ 0 \end{pmatrix}: \quad \bar{u}_p \sigma_{0i} u_n = 0, \frac{|\mathbf{q}|}{m_N} \ll \frac{1}{c}; \bar{u}_p \gamma^5 u_n = 0.$$

Това означава, че членовете със слаб магнетизъм f_2 и ефективен псевдоскалар g_3 не дават съществен принос в разпада на неутрона и ние можем да използваме лагранжиана на Ферми (7.2) като добро приближение. Затова матричният елемент има вида

$$(10.29) \quad M \stackrel{f_1=g_V}{=} -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_p(p) \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma^5) u_n(r) \cdot \bar{u}_e(k) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_e(\ell).$$

Отчитайки нерелативисткото приближение за спинорите (10.28) той може да бъде разбит на две части

$$(10.30) \quad M = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} g_V \bar{u}_p(p) \gamma_0 u_n(r) \cdot \bar{u}_e(k) \gamma^0 (1 - \gamma^5) \nu_e(\ell) \\ + \frac{G_F}{\sqrt{2}} g_A \sum_i \bar{u}_p(p) \gamma^i \gamma^5 u_n(r) \cdot \bar{u}_e(k) \gamma^i (1 - \gamma^5) \nu_e(\ell),$$

първата от които описва Ферми преходите, а втората – преходите на Гамов (George Gamow, 1904 – 1968) и Телер (Edward Teller, 1908 – 2003). Тогава използвайки формулите

$$(10.31) \quad m_n \approx m_p \approx m_N, m_n - m_p = \Delta \approx 1.293 \text{ MeV}; r = (m_n, \mathbf{0}), p \approx (m_p, \mathbf{p}), k = (E, \mathbf{k}), \ell = (\ell^0, \boldsymbol{\ell}),$$

получаваме

$$(10.32) \quad \sum_x |M|^2 = \frac{G_F^2}{2} g_V^2 \text{Tr}[(\hat{p} + m_p) \gamma^0 (\hat{r} + m_n) \gamma^0] \text{Tr}[(\hat{k} + m_e) \gamma^0 (1 - \gamma^5) \hat{\ell} \gamma^0 (1 - \gamma^5)] \\ + \frac{G_F^2}{2} g_A^2 \sum_{i,j} \text{Tr}[(\hat{p} + m_p) \gamma^i \gamma^5 (\hat{r} + m_n) \gamma^j \gamma^5] \text{Tr}[(\hat{k} + m_e) \gamma^i (1 - \gamma^5) \hat{\ell} \gamma^j (1 - \gamma^5)] \\ \approx 32 m_N^2 G_F^2 g_V^2 [2E\ell^0 - (k\ell)] + 32 m_N^2 G_F^2 g_A^2 [2(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\ell}) - 3(k\ell)] \\ \stackrel{k=E\nu_e}{=} \stackrel{\ell=\ell^0\nu_e}{=} 32 m_N^2 G_F^2 E\ell^0 \left[(g_V^2 + 3g_A^2) + (g_V^2 - g_A^2)(\boldsymbol{\nu}_e \cdot \boldsymbol{\nu}_\nu) \right].$$

Сега можем да изчислим диференциалната вероятност на разпада на свободния неполяризиран неутрон без да отчитаме корелациите между импулсите на неутриното и електрона

$$\begin{aligned}
(10.33) \quad d\Gamma &= \frac{1}{2} \frac{\sum |M|^2}{2m_n} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(r-p-k-\ell) \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E} \frac{d^3\ell}{(2\pi)^3 2\ell^0} \\
&\approx \frac{G_F^2}{(2\pi)^5} \left[(g_V^2 + 3g_A^2) + (g_V^2 - g_A^2)(\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}_\nu) \right] \delta(\Delta - E - \ell^0) \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{k} + \ell) d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{k} d^3\ell \\
&= \frac{G_F^2}{(2\pi)^5} \left[(g_V^2 + 3g_A^2) + (g_V^2 - g_A^2)(\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}_\nu) \right] d^3\mathbf{k} d^3\ell \delta(\Delta - E - \ell^0) \\
&\stackrel{d^3\mathbf{k} d^3\ell = (4\pi)^2 (\ell^0)^2 d\ell^0 |k| dE}{=} \frac{G_F^2}{2\pi^3} (g_V^2 + 3g_A^2) \sqrt{E^2 - m_e^2} (\Delta - E)^2 dE.
\end{aligned}$$

Експериментите, в които е възможно измерване на корелациите между импулсите на неутриното и електрона, са чувствителни към аксиалния заряд g_A и дават възможност за по-точно му определяне

$$(10.34) \quad g_A = 1.2756(13).$$

Тази стойност е в добро съгласие с оценката (10.26).

За да изчислим пълната ширина на разпада ние трябва да определим енергетичния интервал на спектъра на електрона от следните неравенства

$$(10.35) \quad m_p^2 \leq (p + \ell)^2 = (r - k)^2 \leq (m_n - m_e)^2 \quad \rightarrow \quad m_e \leq E \leq E_{\max} = \frac{m_n^2 - m_p^2 + m_e^2}{2m_n},$$

и да пресметнем интеграла

$$(10.36) \quad \frac{30}{\Delta^5} \int_{m_e}^{E_{\max}} \sqrt{E^2 - m_e^2} (\Delta - E)^2 dE \approx 0.4726.$$

Тогава пълната ширина на разпада е

$$(10.37) \quad \Gamma \approx \frac{G_F^2 \Delta^5}{60\pi^3} (g_V^2 + 3g_A^2) \cdot 0.47.$$

Ако отчетем радиационните поправки с фактор $(1 + 0.04)$ и кулоновото взаимодействие между протона и електрона на фазовия обем (10.36) с фактор $(1 + 0.03)$, можем по-точно да сравним изчислената вероятност на разпада с експериментално измереното време на живот на неутрона $\tau_{\text{exp}} \approx 879.4$ s

$$(10.38) \quad \Gamma_{\text{cor}} \approx \frac{G_F^2 \Delta^5 (g_V^2 + 3g_A^2) (1 + 0.04) \cdot 0.47 (1 + 0.03)}{60\pi^3} \approx \frac{6.582 \times 10^{-22} \text{ MeV s}}{879.4 \text{ s}}.$$

От това съотношение получаваме значението на константата на Ферми

$$(10.39) \quad G_F \approx 1.1368 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2},$$

която се оказва с 2.5% по-малка от G_μ (8.29). Защо е така ние ще научим в следващата глава.

11. Лептонни разпади на заредените каони

До момента ние разглеждахме взаимодействията на кварките от първо поколение u и d . Обаче в космичните лъчи освен пиони са открити нови силно-взаимодействащи частици с относително дълго време на живот от порядъка на 10^{-8} секунди – каони. Те се състоят от кварк-антикваркови двойки като включват кварк от второ поколение – странен кварк s – $K^+ : u\bar{s}, K^0 : d\bar{s}, \bar{K}^0 : s\bar{d}, K^- : s\bar{u}$. Заредените каони приличат на заредените пиони с тази разлика, че d кваркът в пионите е заменен с s кварк. Затова лептонният разпад $K^+ \rightarrow \ell^+ + \nu_\ell$, където $\ell = e$ или μ , може да се опише аналогично на разпада на заредените пиони (глава 9). Нека лагранжианът на новото взаимодействие има същата структура както за бета разпада (9.1), където d кваркът е заменен с s кварк, а константата на Ферми G_F – с друга константа G_K

$$(11.1) \quad \mathcal{L}'_w(x) = -\frac{G_K}{\sqrt{2}} [\bar{u}(x)\gamma_\alpha(1-\gamma^5)s(x)] \cdot J_{\text{lept}}^\alpha(x) - \frac{G_K}{\sqrt{2}} [\bar{s}(x)\gamma_\alpha(1-\gamma^5)u(x)] \cdot J_{\text{lept}}^{\alpha\dagger}(x).$$

Тогава парциалната ширина на разпада се определя по формулата аналогична на (9.17)

$$(11.2) \quad \Gamma_{K \rightarrow \ell\nu} = \frac{G_K^2 F_K^2 m_\ell^2 m_K}{8\pi} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_K^2}\right)^2.$$

Първо нека да проверим, че теоретично предсказаното отношение

$$(11.3) \quad \frac{\Gamma_{K \rightarrow e\nu}}{\Gamma_{K \rightarrow \mu\nu}} = \frac{m_e^2(m_K^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2(m_K^2 - m_\mu^2)^2} \approx 2.57 \times 10^{-5},$$

което зависи само от масите на частиците⁹, съвпада с експериментално измереното значение. Действително, експерименталните стойности на относителните вероятности на разпада

$$(11.4) \quad \frac{Br(K \rightarrow e\nu) = 1.582(7) \times 10^{-5}}{Br(K \rightarrow \mu\nu) = 63.56(11)\%} \rightarrow \frac{Br(K \rightarrow e\nu)}{Br(K \rightarrow \mu\nu)} = 2.49(2) \times 10^{-5}$$

се намират в добро съгласие с (11.3). За да получим информация за новата константа G_K от сравнението с пълната ширина на разпада, която се определя от времето на живот на заредените каони $\tau_{\text{exp}} = 1.238(2) \times 10^{-8}$ s,

$$(11.5) \quad \Gamma_{\text{tot}} = \frac{\hbar}{\tau_{\text{exp}}} \approx \frac{6.582 \times 10^{-22} \text{ MeV s}}{1.238 \times 10^{-8} \text{ s}} = \frac{1}{Br(K \rightarrow \ell\nu)} \frac{G_K^2 F_K^2 m_\ell^2 m_K}{8\pi} \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_K^2}\right)^2.$$

ние трябва да знаем още константата на разпада на каона F_K . Изчисленията (9.7) са направени в приближение, че $m_u \approx m_d \approx m$. При по-дълги пресмятания с неравни кваркови маси формулата (9.10) би трябвало да придобие вида

$$(11.6) \quad F_\pi = 2\sqrt{2}(m_u + m_d) g N_c I,$$

където факторът I (9.9) слабо (логаритмично) зависи от кварковите маси. За нас при оценката на F_K ще бъде важна линейната зависимост от кварковите маси, така че

$$(11.7) \quad F_K = 2\sqrt{2}(m + m_s) g N_c I.$$

За да определим конституентните маси на кварките ще използваме масите на барионите, които са съставени от тях. Например, от масите на протона p (uud) и неутрона n (udd) $m_p \approx 938.272$ MeV и $m_n \approx 939.565$ MeV получаваме

⁹ Масата на заредените каони е $m_{K^\pm} = 493.677(16)$ MeV.

$$(11.8) \quad m_u = \frac{2m_p - m_n}{3} \approx 312.3 \text{ MeV}, \quad m_d = \frac{2m_n - m_p}{3} \approx 313.6 \text{ MeV}; \quad m = \frac{m_u + m_d}{2} \approx 313.0 \text{ MeV},$$

а от масата на Λ^0 (uds) хиперона $m_\Lambda \approx 1115.7 \text{ MeV}$

$$(11.9) \quad m_s = m_\Lambda - m_u - m_d \approx 489.8 \text{ MeV}.$$

Тогава отношението на константите на разпада

$$(11.10) \quad \frac{F_K}{F_\pi} \simeq \frac{m + m_s}{2m} \approx 1.28$$

определя отношението на константите на взаимодействията

$$(11.11) \quad \frac{G_K}{G_F} = \frac{F_\pi}{F_K} \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_K^2 - m_\mu^2} \sqrt{\frac{Br(K \rightarrow \mu\nu)}{Br(\pi \rightarrow \mu\nu)} \left(\frac{m_K}{m_\pi}\right)^3} \approx 0.2147.$$

Този факт, че константа G_K е около 5 пъти по малка от G_F изисква обяснение. Такова обяснение предоставя следният лагранжиан описващ слабото взаимодействие на леките кварки, предложен от Кабибо (Nicola Cabibbo, 1935 – 2010)

$$(11.12) \quad \mathcal{L}_w(x) = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}(x) \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) d'(x) \right] \cdot \left[\hat{\ell}(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_\ell(x) \right] + h.c.,$$

където d' е смесено състояние от d и s кварки, които трябва да имат еднакъв заряд,

$$(11.13) \quad d' = \cos \theta_C d + \sin \theta_C s,$$

а θ_C е ъгъл на Кабибо. По този начин за константите на Ферми и G_K получаваме

$$(11.14) \quad G_F = G_\mu \cos \theta_C, \quad G_K = G_\mu \sin \theta_C.$$

Тогава от (11.11) и (11.14) следва

$$(11.15) \quad \text{tg} \theta_C \approx 0.2147 \rightarrow \cos \theta_C \approx 0.98, \quad \sin \theta_C \approx 0.21.$$

Т.е. сега ние можем да обясним защо константата на Ферми и G_K са по-малки от константата G_μ .

12. Система от неутрални каони

За да опишем система от неутрални каони, които включват трети кварков аромат s ние трябва да разширим $SU(2)_f$ групата на симетрия на лагранжиана (9.2) до $SU(3)_f$ група

$$(12.1) \quad \mathcal{L}_s = ig \sum_{A=1}^8 \bar{\psi} \gamma^5 \lambda_A \psi \cdot \varphi_A,$$

където φ е октет на бозонните полета, а ψ е кварков триплет

$$(12.2) \quad \bar{\psi} = (\bar{u} \ \bar{d} \ \bar{s}), \quad \psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}.$$

Тук λ са матриците на Гел-Ман

$$(12.3) \quad \lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогава системата на неутралните каони се описва с лагранжиана

$$(12.4) \quad \mathcal{L}_s(K^0, \bar{K}^0) = ig \sum_{A=6}^7 \bar{\psi} \gamma^5 \lambda_A \psi \cdot \varphi_A = \sqrt{2}g [\bar{d} \gamma^5 s \cdot K^0 - \bar{s} \gamma^5 d \cdot \bar{K}^0],$$

където полетата на неутралните каони се определят като

$$(12.5) \quad K^0 = \frac{\varphi_7 + i\varphi_6}{\sqrt{2}}, \quad \bar{K}^0 = \frac{\varphi_7 - i\varphi_6}{\sqrt{2}}.$$

Лагранжианът на силните взаимодействия е инвариантен както относно инверсия на пространството, така и при зарядово спрягане. От тук ние можем да определим как се преобразуват неутралните каони по отношение на \mathcal{P}

$$(12.6) \quad \mathcal{P} : \bar{d} \gamma^5 s \cdot K^0 - \bar{s} \gamma^5 d \cdot \bar{K}^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} \bar{d} P^{-1} \gamma^5 P s \cdot P [K^0] - \bar{s} P^{-1} \gamma^5 P d \cdot P [\bar{K}^0]$$

$$= -\bar{d} \gamma^5 s \cdot P [K^0] + \bar{s} \gamma^5 d \cdot P [\bar{K}^0] \Rightarrow P [K^0] = -K^0, P [\bar{K}^0] = -\bar{K}^0,$$

и \mathcal{C} преобразованията

$$(12.7) \quad \mathcal{C} : \bar{d} \gamma^5 s \cdot K^0 - \bar{s} \gamma^5 d \cdot \bar{K}^0 \xrightarrow{\mathcal{C}} -d^T C^{-1} \gamma^5 C \bar{s}^T \cdot C [K^0] + s^T C^{-1} \gamma^5 C \bar{d}^T \cdot C [\bar{K}^0]$$

$$= \bar{s} \gamma^5 d \cdot C [K^0] - \bar{d} \gamma^5 s \cdot C [\bar{K}^0] \Rightarrow C [K^0] = -\bar{K}^0, C [\bar{K}^0] = -K^0.$$

Тъй като \mathcal{CP} преобразованието не е собствен оператор за състоянията K^0 и \bar{K}^0 , те не могат да бъдат физически състояния за силно-взаимодействащите частици. Затова се налага да определим CP -четно K_1 и CP -нечетно K_2 състояния

$$(12.8) \quad \begin{aligned} CP [K^0] &= \bar{K}^0 \\ CP [\bar{K}^0] &= K^0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} K_1 &= (K^0 + \bar{K}^0)/\sqrt{2} \\ K_2 &= (K^0 - \bar{K}^0)/\sqrt{2}, \end{aligned}$$

които ще играят ролята на физически състояния с определени маси.

Тези състояния имат почти еднакви маси

$$(12.9) \quad m_{K_1} \cong m_{K_2} = m_{K^0} = 497.611(13) \text{ MeV}, \quad \Delta m_K = m_{K_2} - m_{K_1} = 3.484(6) \times 10^{-12} \text{ MeV}.$$

Лагранжианът на Ферми запазва CP -инвариантността, затова състоянието K_1 се разпада предимно на два пиона, които имат положителна четност

$$(12.10) \quad CP [\pi^0 \pi^0] = (+1) \pi^0 \pi^0, \quad CP [\pi^+ \pi^-] = (+1) \pi^+ \pi^-,$$

а CP -нечетното състояние K_2 може да се разпадне в три пиона, които имат отрицателна четност

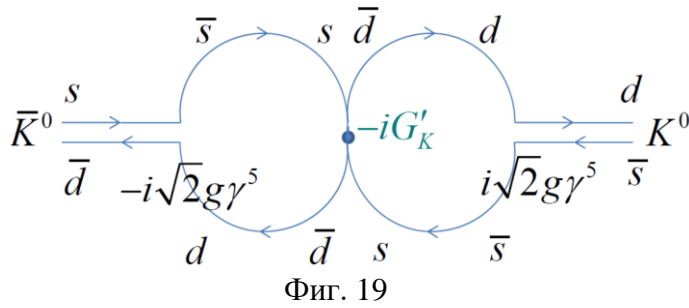
$$(12.11) \quad CP [\pi^0 \pi^0 \pi^0] = (-1) \pi^0 \pi^0 \pi^0.$$

Обаче заради малката разлика между масата на неутралния каон и сума на трите пионни маси фазовото пространство на разпада на K_2 се оказва свито и това състояние живее много по-дълго от K_1 . Затова K_1 се наричат K_L^0 , а K_2 – K_S^0 мезони.

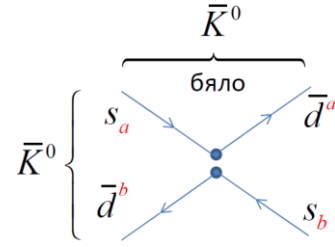
Наша задача сега е да обясним твърде малката разлика на масите (12.9) на базата на натрупания опит в работа с лагранжиана на Ферми

$$(12.12) \quad \begin{aligned} \langle K_1 | \mathcal{L} | K_1 \rangle &= -m_1^2 \\ \langle K_2 | \mathcal{L} | K_2 \rangle &= -m_2^2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} m_2^2 - m_1^2 &\cong 2m_{K^0} \Delta m_K \\ &= \langle \bar{K}^0 | \mathcal{L} | K^0 \rangle + \langle K^0 | \mathcal{L} | \bar{K}^0 \rangle = 2\text{Re} \langle \bar{K}^0 | \mathcal{L} | K^0 \rangle \end{aligned}$$

Съотношението (12.12) означава, че ненулевата разлика на масите е резултат на преходите $\bar{K}^0 \leftrightarrow K^0$ (фиг. 19).



Фиг. 19



Фиг. 20

За да има такива преходи лагранжианът на взаимодействие трябва да променя странността с 2. Нека да запишем такова взаимодействие с новата константа G'_K по аналогия с лагранжиана на Ферми

$$(12.13) \quad \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} = -G'_K \bar{d}^a \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) s_a \cdot \bar{d}^b \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) s_b + h.c.$$

В този лагранжиан ние явно обозначихме цветните индекси на кварките a и b , по които има сумиране от 1 до 3. За да направим оценка на силата на това взаимодействие ние ще използваме бра-кет метода за формфакторите, т.е. трябва да вземем лагранжиана (12.13) между състояния $\langle \bar{K}^0 |$ и $|K^0 \rangle$. От фиг. 20 е ясно, че са възможни два варианта на сдвояване на кварковите двойки в каони. Каоните са безцветни състояния и се състоят от кварк антикваркови двойки от един и същ цвят, като например, $\bar{K}^0: s_a \bar{d}^a$. Така че горните и долните комбинации представляват безцветни състояния. Обаче състоянията отляво и отдясно не са безцветни и трябва да разменим s_a от единия кварков ток в (12.13) с s_b в другия, използвайки тъждествата на Фирц.

В този случай, освен тъждеството на Фирц за спинори (4.12), ние трябва да отчетем, че кварките са цветни триплети, на които действат генератори $T^A = \lambda_A/2$ на цветната група $SU(3)_C$, където λ_A са матрици на Гел-Ман (12.3). Генераторите T^A имат следните свойства

$$(12.14) \quad \text{Tr}[T^A] = 0, \quad \text{Tr}[T^A T^B] = \frac{1}{2} \delta^{AB},$$

и заедно с единична матрица $\mathbb{1}$ образуват пълен базис в пространството на унитарните матрици 3×3 . Тогава можем да запишем тъждеството на Фирц

$$(12.15) \quad \delta_a^c \delta_b^d = C \delta_a^d \delta_b^c + D \sum_{A=1}^8 (T^A)_a^d (T^A)_b^c,$$

където константите C и D се определят като умножим (12.15) с $\delta_d^a \delta_c^b$ и $\delta_d^b \delta_c^a$ сумирайки по индексите

$$(12.16) \quad \begin{aligned} 3 &= C \cdot 3 \cdot 3 + D \sum_{A=1}^8 \text{Tr}[T^A] \text{Tr}[T^A] \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{3} \\ 3 \cdot 3 &= C \cdot 3 + D \sum_{A=1}^8 \text{Tr}[T^A T^A] \quad \rightarrow \quad D = 2 \end{aligned}$$

Използвайки тези формули ние можем сега да пренаредим спинорите отчитайки тяхната антикомутативност в (12.13) така, че двойките на фиг. 20 отляво и отдясно да имат безцветна комбинация

$$(12.17) \quad \bar{d}^a \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \delta_a^c s_c \cdot \bar{d}^b \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \delta_b^d s_d \stackrel{(4.12)}{=} \frac{1}{3} \bar{d}^a \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \delta_a^d s_d \cdot \bar{d}^b \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \delta_b^c s_c \\ + 2 \sum_{A=1}^8 \bar{d}^a \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) (T^A)_a^d s_d \cdot \bar{d}^b \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) (T^A)_b^c s_c.$$

Сумирайки всички възможни начини на сдвояване на кварковите линии в приближение на вакуумно насищане¹⁰ получаваме

$$(12.18) \quad \langle \bar{K}^0 | \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} | K^0 \rangle \simeq -\frac{8}{3} G'_K \langle \bar{K}^0 | \bar{d} \gamma_\alpha \gamma^5 s | 0 \rangle \langle 0 | \bar{d} \gamma_\alpha \gamma^5 s | K^0 \rangle = \frac{8}{3} G'_K F_K^2 m_{K^0}^2.$$

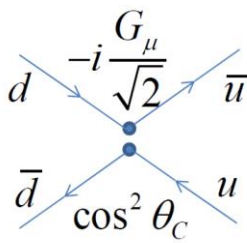
Тогава от (12.18) и (12.12) следва

$$(12.19) \quad G'_K = \frac{3 \Delta m_K}{8 F_K^2 m_{K^0}} \approx 10^{-13} \text{ GeV}^{-2} \rightarrow \frac{G'_K}{G_\mu} \approx 10^{-8}.$$

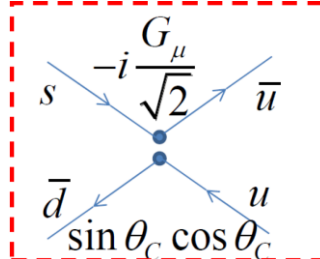
Това взаимодействие е било наречено свръхслабо. Естествено възниква въпросът, дали взаимодействието с кварковия ток на Кабибо (11.12)

$$(12.20) \quad \mathcal{L}_w(x) = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} [\bar{u}(x) \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) d'(x)] \cdot [\bar{d}'(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) u(x)]$$

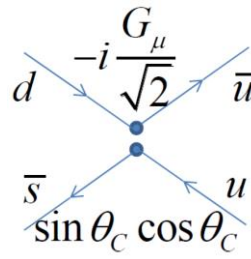
би могло да генерира взаимодействието (12.13). На фиг. 21 са представени всички диаграми на лагранжиана (12.20).



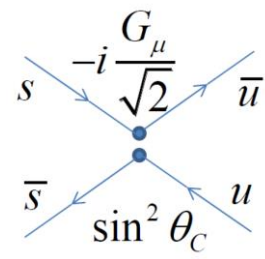
Фиг. 21а



Фиг. 21б



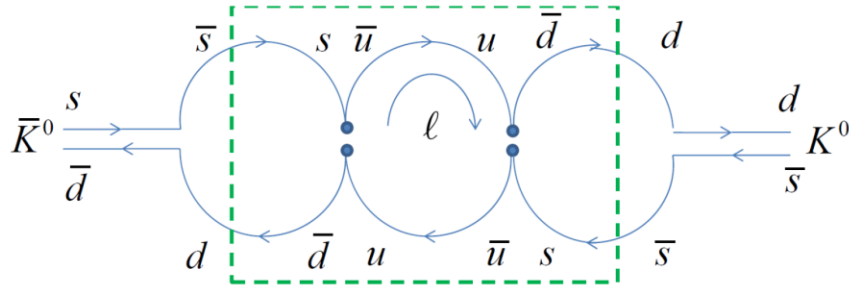
Фиг.21в



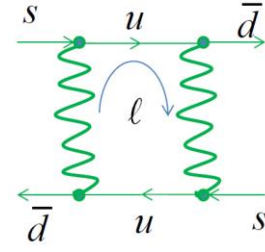
Фиг.21г

Ако вземем два пъти диаграмата на фиг.21б, което отговаря на втория член в разложението (6.11), и направим сдвояване на Вик за полетата на u кварка ще получим диаграмата на фиг. 22, която след изчисляване на средната примка се свежда към фиг. 19.

¹⁰ Приближение на вакуумно насищане е вмъкване на единица $\mathbb{1} = \sum_i |i\rangle\langle i| \simeq |0\rangle\langle 0|$ между кварковите токове и запазването само на водещия принос от вакуумните състояния.



Фиг. 22



Фиг. 23

Нека да направим оценка на примката на фиг. 22 в приближение на нулеви външни импулси. Нейният аналитичен израз в съответствие с правилата на Файнман е

$$(12.21) \quad \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} = (-i) \frac{1}{2} \left(-i \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \sin \theta_c \cos \theta_c \right)^2 \\ \times \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\bar{d} \gamma_\beta (1-\gamma^5) i(\hat{\ell} + m_u) \gamma_\alpha (1-\gamma^5) s \cdot \bar{d} \gamma^\alpha (1-\gamma^5) i(\hat{\ell} + m_u) \gamma^\beta (1-\gamma^5) s}{(\ell^2 - m_u^2 + i\varepsilon)^2} \\ = -G_\mu^2 \sin^2 \theta_c \cos^2 \theta_c \int \frac{i d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell_\mu \ell^\nu}{(\ell^2 - m_u^2 + i\varepsilon)^2} \bar{d} \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\alpha (1-\gamma^5) s \cdot \bar{d} \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta (1-\gamma^5) s.$$

Интегралът в (12.21) е квадратично разходящ затова трябва да бъде регуляризиран както в (9.9). Освен това той зависи от лоренц индексите и трябва да бъде приведен към скаларна форма, използвайки формулата $\int \ell_\mu \ell^\nu f(\ell^2) d^4 \ell = (\delta_\mu^\nu / 4) \int \ell^2 f(\ell^2) d^4 \ell$

$$(12.22) \quad I_\mu^\nu = \int \frac{i d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell_\mu \ell^\nu}{(\ell^2 - m_u^2 + i\varepsilon)^2} = \frac{\delta_\mu^\nu}{4} \int \frac{i d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2}{(\ell^2 - m_u^2 + i\varepsilon)^2} \\ = \frac{\delta_\mu^\nu}{4} \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2 + m_u^2)^2} \stackrel{\ell_E^2=z}{=} \frac{\delta_\mu^\nu}{64\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{z^2 dz}{(z + m_u^2)^2} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \frac{\Lambda^2}{64\pi^2} \delta_\mu^\nu.$$

Комбинациите от γ -матрици в произведението на токовете в (12.21) могат да бъдат опростени използвайки формулата $\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta = \eta^{\alpha\mu} \gamma^\beta - \eta^{\alpha\beta} \gamma^\mu + \eta^{\mu\beta} \gamma^\alpha + i\varepsilon^{\alpha\mu\nu\lambda} \gamma_\lambda \gamma^5$

$$(12.23) \quad \bar{d} \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\alpha (1-\gamma^5) s \cdot \bar{d} \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta (1-\gamma^5) s = 4 \bar{d} \gamma_\alpha (1-\gamma^5) s \cdot \bar{d} \gamma^\alpha (1-\gamma^5) s.$$

Така че, отчитайки (12.22), (12.23) и сравнявайки (12.21) с (12.13), получаваме

$$(12.24) \quad G'_K = \frac{G_\mu^2 \sin^2 \theta_c \cos^2 \theta_c}{16\pi^2} \Lambda^2 \stackrel{(12.19)}{\rightarrow} \Lambda \approx 1.6 \text{ GeV}.$$

Толкова малка стойност на параметъра на регуляризация буди подозрения, че тук нещо не е наред. Действително, физическата причина за регуляризацията е обменът на калибровъчните W -бозони между кварковите токове (фиг. 23). Както ще научим по-нататък, те, заради голямата си маса $M_W \approx 80.4 \text{ GeV}$ и при малки предадени импулси, могат ефективно да имитират взаимодействие на Ферми в една точка. По този начин константата на Ферми се изразява чрез калибровъчната константа g и масата на W -бозона¹¹

¹¹ Тази формула ще бъде изведена в глава 17.

$$(12.25) \quad \left(\frac{g}{2\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{M_W^2} = \frac{G_\mu}{\sqrt{2}}.$$

Аналитичният израз на диаграмата на фиг. 23 е малко по-различен от (12.21) заради присъствието на пропагаторите на W -бозоните

$$(12.26) \quad \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} = (-i) \frac{1}{2} \sin^2 \theta_C \cos^2 \theta_C \left(\frac{ig}{2\sqrt{2}} \right)^4 \\ \times \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\bar{d} \gamma_\beta (1-\gamma^5) (\hat{\ell} + m_u) \gamma_\alpha (1-\gamma^5) s \cdot \bar{d} \gamma^\alpha (1-\gamma^5) (\hat{\ell} + m_u) \gamma^\beta (1-\gamma^5) s}{(\ell^2 - m_u^2 + i\varepsilon)^2 (\ell^2 - M_W^2 + i\varepsilon)^2} \\ = -\sin^2 \theta_C \cos^2 \theta_C \frac{g^4}{32} \int \frac{id^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2}{(\ell^2 - m_u^2 + i\varepsilon)^2 (\ell^2 - M_W^2 + i\varepsilon)^2} \bar{d} \gamma_\alpha (1-\gamma^5) s \cdot \bar{d} \gamma^\alpha (1-\gamma^5) s.$$

Интегралът в (12.26) е сходящ и може да бъде лесно изчислен при предположение $M_W \gg m_u \approx 0$

$$(12.27) \quad \int \frac{id^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 (\ell^2 - M_W^2 + i\varepsilon)^2} = \frac{1}{16\pi^2 M_W^2}.$$

Отчитайки съотношението (12.25) получаваме, че параметър на регуляризация Λ точно съвпада с масата на W -бозона. Това означава, че взаимодействието (12.20) води до три порядъка по-голям принос в разликата на масите на неутралните каони отколкото експерименталната стойност (12.9).

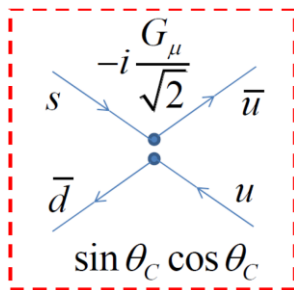
Този проблем ще решим с въвеждане на нов кварк от второ поколение в съответствие с механизма на Глаشوу – Илиопулос – Маяни (GIM). Тяхната идея е свързана с ортогоналната комбинация на смесване на Кабибо (11.13)

$$(12.28) \quad s' = -\sin \theta_C d + \cos \theta_C s,$$

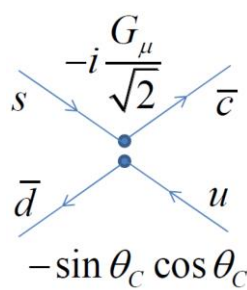
и възстановяване на симетрията между броя на кварките със заряд $+(2/3)$ и $-(1/3)$. В съответствие с лагранжиана (11.12) слабото взаимодействие осигурява преходи $u \leftrightarrow d'$, значи трябва да има още един кварк наречен c , с който е свързана другата комбинация s' (12.28). Тогава лагранжианът на взаимодействие с новия кварк ще може да се построи от кварковия ток

$$(12.29) \quad J^\alpha = \bar{u} \gamma^\alpha (1-\gamma^5) d' + \bar{c} \gamma^\alpha (1-\gamma^5) s' \rightarrow \mathcal{L}_w(x) = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} J_\alpha^\dagger J^\alpha.$$

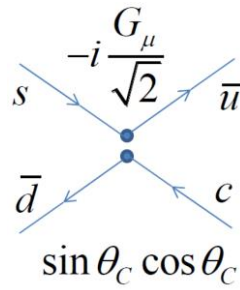
На фиг. 24 са показани всички взаимодействия от лагранжиана (12.29) с един входящ s -кварк и един изходящ d -кварк.



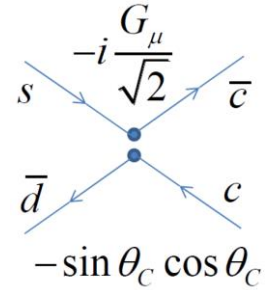
Фиг. 24а



Фиг. 24б

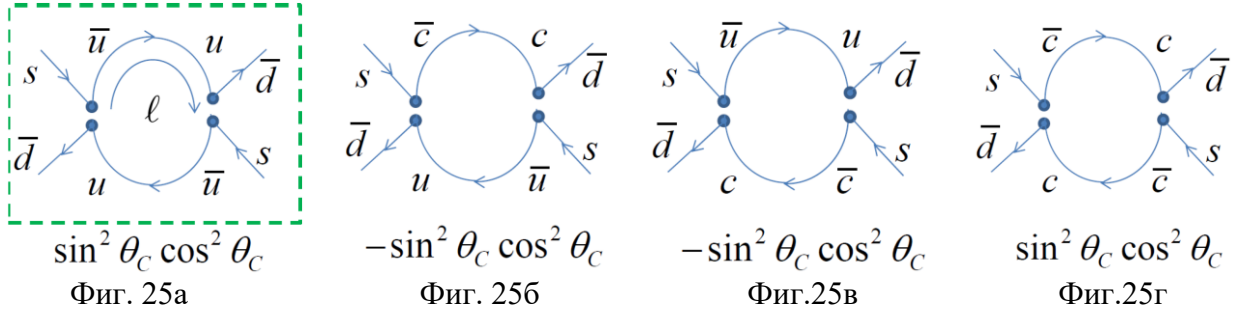


Фиг.24в



Фиг.24г

Диаграмата на фиг. 24а е същата като на фиг. 21б, от която ние получихме примката на фиг. 23. Имайки 4 диаграми на фиг. 24 ние ще получим съответно 4 интересувачи ни диаграми (фиг. 25).



Поради различните знаци между диаграмите ние очакваме някакво съкращение между тях. Така сумата от всички диаграми на фиг. 25 може да бъде записана като

$$(12.30) \quad \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} = (-i) \frac{G_\mu^2}{4} \sin^2 \theta_c \cos^2 \theta_c \times \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \bar{d} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \left[\frac{\hat{\ell}}{\ell^2} - \frac{\hat{\ell} + m_c}{\ell^2 - m_c^2} \right] \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) s \cdot \bar{d} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \left[\frac{\hat{\ell}}{\ell^2} - \frac{\hat{\ell} + m_c}{\ell^2 - m_c^2} \right] \gamma^\beta (1 - \gamma^5) s,$$

където сме пренебрегнали масата на u -кварка, но подразбираме наличие на член $+i\epsilon$ в знаменателите. Нека да преобразуваме комбинацията от γ -матрици и фермионни пропагатори в (12.30) в по-компактен вид

$$(12.31) \quad \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \left[\frac{\hat{\ell}}{\ell^2} - \frac{\hat{\ell} + m_c}{\ell^2 - m_c^2} \right] \gamma^\beta (1 - \gamma^5) = -2m_c^2 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \frac{\ell_\mu}{\ell^2 (\ell^2 - m_c^2)}.$$

Т.е. с отчитане на приноса на s -кварка ние вместо (12.22) трябва да изчислим интеграла

$$(12.32) \quad I_\mu^\nu = \int \frac{i d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell_\mu \ell^\nu}{[\ell^2 (\ell^2 - m_c^2 + i\epsilon)]^2} = \frac{\delta_\mu^\nu}{4} \int \frac{i d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 (\ell^2 - m_c^2 + i\epsilon)^2}$$

$$= \frac{\delta_\mu^\nu}{4} \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell_E^2 (\ell_E^2 + m_c^2)^2} \stackrel{\ell_E^2 = z}{=} \frac{\delta_\mu^\nu}{64\pi^2} \int_0^\infty \frac{dz}{(z + m_c^2)^2} = \frac{1}{64\pi^2 m_c^2} \delta_\mu^\nu.$$

Използвайки (12.23) окончателно получаваме

$$(12.33) \quad \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} = -\frac{G_\mu^2 m_c^2}{16\pi^2} \sin^2 \theta_c \cos^2 \theta_c \bar{d} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) s \cdot \bar{d} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) s + h.c.,$$

което от (12.24) веднага дава значението на масата на s -кварка, т.е. в предложението GIM механизъм ролята на параметъра на регуляризация изпълнява масата на s -кварка.

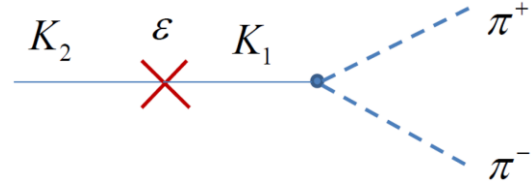
13. Нарушение на CP -симетрията

През 1964 г. Кристенсън (James Henry Christenson, 1937 – 2020), Кронин (James Watson Cronin, 1931 – 2016), Фич (Val Logsdon Fitch, 1923 – 2015) и Турлей (Réne Turlay, 1932 – 2002) намират разпада $K_L^0 (K_2) \rightarrow \pi^+ \pi^-$ на дългоживущия CP нечетен неутрален каон K_2 в CP четно състояние с два заредени пиона с вероятност

$$(13.1) \quad Br(K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) \approx 2 \times 10^{-3}.$$

Това се интерпретира като че дългоживущият неутрален каон има малка примес от CP четното състояние K_1 (фиг. 26)

$$(13.2) \quad K_L^0 = \frac{K_2 + \varepsilon K_1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}},$$



Фиг. 26

и това се нарича непряко нарушение на CP симетрията. Параметър на смесване ε е пропорционален на матричния елемент на преходи $K_1 \leftrightarrow K_2$ (фиг. 26)

$$(13.3) \quad \varepsilon \sim \langle K_1 | \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} | K_2 \rangle = \frac{1}{2} \left[\langle \bar{K}^0 | \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} | K^0 \rangle - \langle K^0 | \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} | \bar{K}^0 \rangle \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\langle K^0 | \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} | K^0 \rangle - \langle \bar{K}^0 | \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} | \bar{K}^0 \rangle \right] = i \text{Im} \langle \bar{K}^0 | \mathcal{L}_K^{\Delta S=2} | K^0 \rangle,$$

където вторият член в квадратните скобки е равен на нула поради CPT симетрията. Обаче, имайки само две поколения от кварки ($u d$) и ($c s$) с $d \leftrightarrow s$ смесване получаваме, че матричният елемент на $\bar{K}^0 \leftrightarrow K^0$ преходите (12.18) е реален, и това прави невъзможно да се обясни наблюдаваното нарушаване на CP симетрията (13.1) с две поколения от кварки.

Нека разгледаме общия случай с N поколения. За да запази нормировката на спинорите в този случай матрицата на смесване на долните кварки V трябва да е унитарна матрица ($V^\dagger V = \mathbb{1}$) с размерност $N \times N$, която има N^2 независими параметъра. Тогава пълният кварков ток (12.29) може да бъде записан като

$$(13.4) \quad J^\alpha = \bar{U} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) D' = \sum_{k,l=1}^N \bar{u}_k \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) V_{kl} d_l.$$

Поради това, че в квантовата теория спинорните полета са определени с точност до постоянна фаза, ние можем да премахнем нефизичните параметри от матрицата на смесване. Преобразованията $\bar{u}_k \rightarrow \bar{u}_k e^{i\alpha_k}$ могат да премахнат N нефизични фази, например, в първата колонка на V , а преобразованията $d_l \rightarrow e^{i\beta_l} d_l$ премахват останалите $N - 1$ нефизични фази, например, в първия ред на комплексните елементи на матрицата на смесване. Така остават $(N - 1)^2$ физични параметъра на смесване, като

$$(13.5) \quad N_\theta = \frac{N(N-1)}{2}$$

са реални параметри на ортогоналната матрица или ъгли на смесване, а

$$(13.6) \quad N_\varphi = \frac{(N-1)(N-2)}{2}$$

са фази.

За случай с две кваркови поколения матрица е реална само с 1 ъгъл на смесване на Кабибо. Добавянето на третото поколение с top и bottom кварки ($t b$) води до три ъгъла на смесване и една фаза, т.е. поне един елемент в матрицата на смесване е комплексен

$$(13.7) \quad U = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, D' = V_{\text{CKM}} D = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix};$$

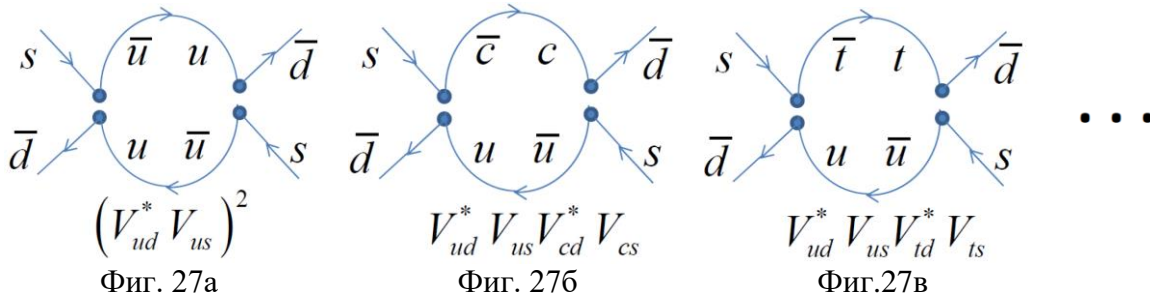
$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & s_{13} & 0 \\ -s_{13} & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix}.$$

Тази матрица носи названието Кабибо – Кобаяши – Маскава (СКМ) матрица. Тук са използвани обозначенията $s_{kl} = \sin \theta_{kl}$ и $c_{kl} = \cos \theta_{kl}$, а δ е фазата. Експерименталните значения на параметрите са

$$(13.8) \quad s_{12} \approx 0.2265, \quad s_{23} \approx 0.0405, \quad s_{13} \approx 0.0036, \quad \delta \approx 68.5^\circ.$$

Така, ако отчетем диаграмите с t кварки (фиг. 27в), можем да получим имагинерната стойност на матричния елемент (13.3).



Пряко нарушение на CP симетрия, например, може да се демонстрира с разпади на b кварки, които се описват с лагранжиана

$$(13.9) \quad \mathcal{L}_{ub} = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} V_{ub} \bar{u} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) b \cdot \bar{\ell} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_\ell - \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} V_{ub}^* \bar{b} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) u \cdot \bar{\nu}_\ell \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \ell,$$

който е експлицитно CP несиметричен

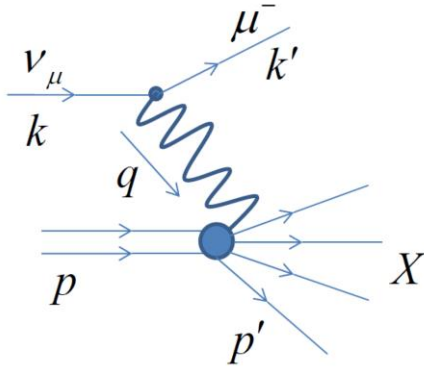
$$(13.10) \quad \mathcal{L}_{ub} \xrightarrow{CP} -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} V_{ub} \bar{b} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) u \cdot \bar{\nu}_\ell \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \ell - \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} V_{ub}^* \bar{u} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) b \cdot \bar{\ell} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_\ell.$$

Експерименталните значения на ъглите на смесване (13.8) демонстрират йерархична структура $s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12}$, затова много често се използва параметризацията на Волфенщайн (Lincoln Wolfenstein, 1923 – 2015) $s_{12} = \lambda$, $s_{23} = A\lambda^2$, $s_{13}e^{i\delta} = A\lambda^3(\rho + i\eta)$, с матрицата

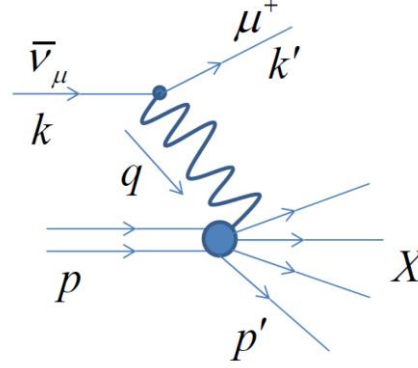
$$(13.11) \quad V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4).$$

14. Дълбоко нееластично разсейване на неутриното

От тази глава ние започваме да разглеждаме процесите на разсейване на неутриното като слабо взаимодействаща частица. За да се приготви сноп от неутрино се използват заредени пиони, които се разпадат предимно в мюон и мюонно неутрино, значи и снопът на налитащите на мишената частици предимно ще се състои от мюонни неутрина. Нека първо да разгледаме нееластичното разсейване на мюонните неутрина върху нуклони $\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + X$ (фиг. 28а).



Фиг. 28а



Фиг. 28б

С X тук са обозначени всички адронни състояния със сумарен импулс p' , които не се регистрират. Регистрира се само излитащия мюон. Нека да запишем лагранжиана на взаимодействие като засега няма да уточняваме вида на адронния ток

$$(14.1) \quad \mathcal{L}_w = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{\mu} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_\mu \cdot J_\alpha^h - \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \mu \cdot J_\alpha^{h\dagger}.$$

Тогава матричният елемент на процеса на фиг. 28а има вида

$$(14.2) \quad M = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{u}_\mu(k') \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) u_\nu(k) \cdot \langle p' | J_\alpha^h | p \rangle$$

$$M^\dagger = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{u}_\nu(k) \gamma^\beta (1 - \gamma^5) u_\mu(k') \cdot \langle p | J_\beta^{h\dagger} | p' \rangle.$$

Според формула (6.9) сечението на процеса се изразява чрез квадрата на абсолютната стойност на матричния елемент и фазовия обем

$$(14.3) \quad d\sigma = \frac{|M|^2}{4\sqrt{(kp)^2 - k^2 p^2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p - q) \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'_0}.$$

За да отделим лептонния ток от адронния ние ще използваме предадения импулс $q = k - k' = p' - p$. За да пресметнем квадрата на абсолютната стойност на матричния елемент ние ще сумираме по киралностите на всички частици усреднявайки по началния нуклон¹²

¹² Неутриното има само една киралност и не се изисква усредняване.

$$(14.4) \quad \overline{|M|^2} = \frac{1}{2} \frac{G_\mu^2}{2} \text{Tr} \left[\hat{k} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) (\hat{k}' + m_\mu) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \right] \sum \langle p | J_\beta^{h\dagger} | p' \rangle \langle p' | J_\alpha^h | p \rangle$$

$$= 2G_\mu^2 \left[L^{\alpha\beta}(k, k') + i\varepsilon^{\alpha\beta kk'} \right] \sum \langle p | J_\beta^{h\dagger} | p' \rangle \langle p' | J_\alpha^h | p \rangle.$$

Тук ние използвахме обозначенията (8.10), и предположението че неутриното е безмасово $k^2 = 0$. Тогава диференциалното сечение (14.3) за разсейване на неутрино има вида

$$(14.5) \quad d\sigma_\nu = \frac{G_\mu^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{|kp|} \left[L^{\alpha\beta}(k, k') + i\varepsilon^{\alpha\beta kk'} \right] W_{\alpha\beta}^+(p, q) \frac{d^3 \mathbf{k}'}{k'_0},$$

където ние сме въвели безразмерната структурна функция (формфактор) на нуклона

$$(14.6) \quad W_{\alpha\beta}^+(p, q) = \frac{1}{8} \sum \int \langle p | J_\beta^{h\dagger} | p' \rangle \langle p' | J_\alpha^h | p \rangle \delta^{(4)}(p' - p - q) \frac{d^3 \mathbf{p}'}{p'_0}.$$

Аналогично матричният елемент на разсейване на мюонното антинеутрино (фиг. 28б) има вида

$$(14.7) \quad M = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{v}_\nu(k) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) v_\mu(k') \cdot \langle p' | J_\alpha^{h\dagger} | p \rangle$$

$$M^\dagger = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{v}_\mu(k') \gamma^\beta (1 - \gamma^5) v_\nu(k) \cdot \langle p | J_\beta^h | p' \rangle,$$

а диференциалното сечение

$$(14.8) \quad d\sigma_{\bar{\nu}} = \frac{G_\mu^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{|kp|} \left[L^{\alpha\beta}(k, k') - i\varepsilon^{\alpha\beta kk'} \right] W_{\alpha\beta}^-(p, q) \frac{d^3 \mathbf{k}'}{k'_0}$$

се изразява чрез структурната функция

$$(14.9) \quad W_{\alpha\beta}^-(p, q) = \frac{1}{8} \sum \int \langle p | J_\beta^h | p' \rangle \langle p' | J_\alpha^{h\dagger} | p \rangle \delta^{(4)}(p' - p - q) \frac{d^3 \mathbf{p}'}{p'_0}.$$

Структурните функции $W_{\alpha\beta}^\pm(p, q)$ зависят от лоренц индексите, които могат да бъдат изразени използвайки 6 независими лоренц ковариантни комбинации $p_\alpha p_\beta$, $p_\alpha q_\beta$, $q_\alpha p_\beta$, $q_\alpha q_\beta$, $\eta_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta pq}$ и съответно 6 скаларни структурни функции $W_i^\pm(p, q)$:

$$(14.10) \quad W_{\alpha\beta}^\pm(p, q) = -\left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) W_1^\pm(p, q) + \frac{1}{M^2} \left(p_\alpha - \frac{qp}{q^2} q_\alpha \right) \left(p_\beta - \frac{qp}{q^2} q_\beta \right) W_2^\pm(p, q)$$

$$+ i \frac{\varepsilon_{\alpha\beta pq}}{2M^2} W_3^\pm(p, q) + \frac{q_\alpha q_\beta}{M^2} W_4^\pm(p, q) + \frac{p_\alpha q_\beta + q_\alpha p_\beta}{M^2} W_5^\pm(p, q) + \frac{p_\alpha q_\beta - q_\alpha p_\beta}{M^2} W_6^\pm(p, q).$$

Нека да разгледаме сега кинематиката на процеса. Ние ще работим в лабораторната система

$$(14.11) \quad p = (M, \mathbf{0}), \quad k = (E, \mathbf{k}), \quad k' = (E', \mathbf{k}').$$

Удобно е да използваме следните размерни и лоренц инвариантни безразмерни променливи

$$(14.12) \quad E = \frac{(kp)}{M}, \quad v = \frac{(qp)}{M} = E - E' \Rightarrow x = \frac{-q^2}{2(qp)} = \frac{-q^2}{2Mv}, \quad y = \frac{(qp)}{(kp)} = \frac{v}{E}.$$

В дълбоко нееластичното разсейване (DIS) размерните променливи в идеалния случай трябва да са безкрайни: $E \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \infty$, $Q^2 = -q^2 \rightarrow \infty$, така че безразмерните променливи x и y да имат фиксирани стойности. Променливите x и y напълно описват кинематиката в

крайно състояние, затова е интересно да знаем границите на тяхното изменение. Първо ще започнем с променливата x , като изберем удобна за това система на покой на мюона

$$(14.13) \quad k' = (m_\mu, \mathbf{0}): \quad \begin{array}{l} q_0 = k_0 - m_\mu \\ k^2 = k_0^2 \\ \mathbf{q} = \mathbf{k} \rightarrow |\mathbf{q}| = k_0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (a) \quad Q^2 = -q^2 = \mathbf{q}^2 - q_0^2 = k_0^2 - (k_0 - m_\mu)^2 \geq 0; \\ (b) \quad p'^2 = (p + q)^2 \geq M^2 \rightarrow 2(qp) \geq -q^2; \\ (c) \quad (kq) = k_0(k_0 - m_\mu) - k_0^2 < 0. \end{array}$$

От неравенствата (14.13а) и (14.13б) веднага получаваме, че

$$(14.14) \quad 0 \leq x \leq 1,$$

а границите $x = 0$ и $x = 1$ отговарят съответно на дълбоко нееластично разсейване при безкрайна енергия на налитащото неутрино и на квази-еластично разсейване, когато в крайно състояние има само един лептон и един нуклон $p'^2 = M^2$.

Нека да анализираме сега променливата y . Връщайки се пак в лабораторната система (14.11) получаваме

$$(14.15) \quad v = E - E' = p_0' - M \geq 0 \rightarrow y \geq 0.$$

За да определим горната граница на y ще разгледаме пространствено подобния 4-вектор

$$(14.16) \quad N_\alpha = \varepsilon_{\alpha k p}, \quad N_0 = \varepsilon_{0\beta\mu\nu} k^\beta q^\mu p^\nu = 0 \rightarrow N^2 = - \begin{vmatrix} k^2 & (kq) & (kp) \\ (kq) & q^2 & (qp) \\ (kp) & (qp) & p^2 \end{vmatrix} \leq 0.$$

Нека разделим последното неравенство в (14.16) на $2(kp)^2(kq)$, отчитайки че в съответствие с $(kq) < 0$ (14.13с) знака на неравенството трябва да се смени,

$$(14.17) \quad \frac{2(qp)(kp)(kq) - M^2(kq)^2 - q^2(kp)^2}{2(kp)^2(kq)} = y - \frac{2(kq)M^2}{2(kp) \cdot 2} - \frac{q^2}{2(kq)}$$

$$\stackrel{(k-q)^2 = k'^2}{=} \stackrel{q^2 = 2(kq) + m_\mu^2}{=} \left[1 + \frac{M \cdot x}{2E} + \frac{m_\mu^2}{4vE} \right] y - \left[1 + \frac{m_\mu^2}{q^2 - m_\mu^2} \right] \leq 0 \xrightarrow{\text{DIS}} y \leq 1.$$

Така от (14.15) и (14.17) в случая на дълбоко нееластично разсейване получаваме

$$(14.18) \quad 0 \leq y \leq 1.$$

За да пресметнем диференциалните сечения на разсейване на неутрино (14.5) и антинеутрино (14.8) ще ни трябват следните съотношения

$$(14.19) \quad 2(k'q) = Q^2 - m_\mu^2, \quad 2(kk') = -(kq) = Q^2 - m_\mu^2: \quad -\eta_{\alpha\beta} L^{\alpha\beta}(k, k') = 2(kk') \approx Q^2 = 2MExy,$$

$$\frac{P_\alpha P_\beta}{M^2} L^{\alpha\beta}(k, k') = \frac{2(kp)(k'p)}{M^2} - (kk') \approx 2Ev \left(\frac{1}{y} - 1 \right), \quad i \frac{\varepsilon_{\alpha\beta pq}}{2M^2} i \varepsilon^{\alpha\beta kk'} = \frac{(kp)(k'q) - (kq)(k'p)}{M^2}$$

$$\approx 2Evx \left(1 - \frac{y}{2} \right), \quad \frac{q_\alpha}{M} L^{\alpha\beta}(k, k') = \frac{(kq)k'^\beta + (k'q)k^\beta - (kk')q^\beta}{M} = -\frac{m_\mu^2}{M^2} M k^\beta \ll 1, \quad \frac{q_\alpha}{M} i \varepsilon^{\alpha\beta kk'} = 0.$$

Както се вижда от последните две равенства в (14.19), членовете с q_α в разложението (14.10) не дават принос в сеченията, т.е. съществени са формфакторите $W_1^\pm(p, q)$, $W_2^\pm(p, q)$ и $W_3^\pm(p, q)$. Нека сега да изразим фазовия обем на мюона чрез променливите x и y

$$(14.20) \quad x \approx \frac{EE'(1-\cos\theta)}{M(E-E')}, \quad y = \frac{E-E'}{E} \quad : \quad dx dy = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\cos\theta, E')} \right| dE' d\cos\theta \approx \frac{1}{2\pi y} \frac{1}{|kp|} \frac{d^3\mathbf{k}'}{k'_0},$$

$$\frac{1}{|kp|} \frac{d^3\mathbf{k}'}{k'_0} \approx \frac{2\pi}{ME} E' dE' d\cos\theta$$

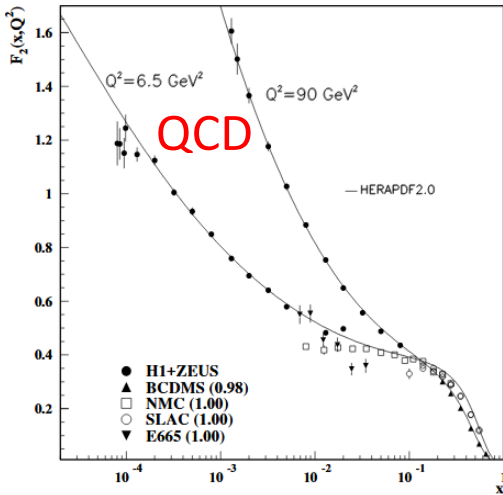


Фиг. 29

където ъгъл θ е ъгъла на разсейване на муона относно посоката на неутринния сноп (фиг. 29). Така че събирайки заедно всички съотношения, които представихме, получаваме диференциалното сечение за дълбоко нееластично разсейване на неутриното и антинейтроното върху нуклони

$$(14.21) \quad \frac{d^2\sigma_{\nu/\bar{\nu}}}{dx dy} = \frac{G_\mu^2}{\pi} ME \left[xy^2 W_1^\pm(p, q) + (1-y) \frac{\nu}{M} W_2^\pm(p, q) \pm xy \left(1 - \frac{y}{2}\right) \frac{\nu}{M} W_3^\pm(p, q) \right]$$

$$= \sigma_0 \left[xy^2 F_1^\pm(p, q) + (1-y) F_2^\pm(p, q) \pm xy \left(1 - \frac{y}{2}\right) F_3^\pm(p, q) \right].$$



Фиг. 30

и това се нарича скейлинг на Бьоркен (James Daniel Bjorken, 22.06.1934) (фиг. 30)¹³. Разликата за различен предаден импулс q при много малки x на фиг. 30 се дължи на квантово-хромодинамични ефекти.

Тук са въведени характерното сечение на слабите взаимодействия на разсейване върху нуклони

$$(14.22) \quad \sigma_0 = \frac{G_\mu^2}{\pi} ME \approx 1.6 \times 10^{-38} \text{ cm}^2 \frac{E}{\text{GeV}},$$

и новите структурни функции

$$(14.23) \quad F_1^\pm(p, q) = W_1^\pm(p, q),$$

$$F_2^\pm(p, q) = \frac{\nu}{M} W_2^\pm(p, q),$$

$$F_3^\pm(p, q) = \frac{\nu}{M} W_3^\pm(p, q),$$

за да се избегне появянето на размерната променлива ν . Структурните безразмерни функции $F_i^\pm(p, q)$ при $(qp)/M = \nu \rightarrow \infty$ и $-q^2 \rightarrow \infty$ всъщност зависят само от x : $F_i^\pm(x)$,

15. Партонен модел

В тази глава ние ще използваме по-информативна от бра-кет метода микроскопична картина за описание на взаимодействието на неутриното с нуклона. Нарича се партонен модел на Файнман. Според този модел партоните¹⁴ q са свободни (невзаимодействащи)

¹³ Тази фигура е от Particle Data Group P.A. Zyla *et al.*, Prog. Theor. Exp. Phys. **2020** (2020) 083C01.

¹⁴ Партони е от английската дума part, те се отъждествяват с кварки.

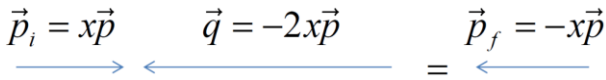
безмасови фермиони със спин $\frac{1}{2}$, върху които става разсейването на неутриното $q_i + \nu_\mu \rightarrow \mu^- + q_f$. Тъй като $q^2 \leq 0$ е пространствено подобен вектор ние можем да изберем система $q_0 = 0$. В тази система при $Q^2 \rightarrow \infty$ и $\nu \rightarrow \infty$ импулсите \mathbf{q} и \mathbf{p} са големи и противоположни (пренебрегвайки напречните импулси p_\perp)

$$(15.1) \quad M\nu = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \stackrel{p_\perp=0}{\approx} \sqrt{Q^2} |\mathbf{p}|: \quad |\mathbf{p}|^2 = \frac{\nu^2}{Q^2} M^2 \stackrel{Q^2=2M\nu x}{=} \frac{\nu}{2Mx} M^2 \gg M^2,$$

$$x = \frac{-q^2}{2(qp)} \stackrel{p_\perp=0}{\approx} \frac{|\mathbf{q}|^2}{2|\mathbf{q}||\mathbf{p}|} = \frac{|\mathbf{q}|}{2|\mathbf{p}|}: \quad \mathbf{q} = -2x\mathbf{p}.$$

Ако направим кинематичен анализ на началните q_i и крайните q_f партони с импулси p_i и p_f съответно

$$(15.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{q} + \mathbf{p}_i &= \mathbf{p}_f \\ p_i^0 &= p_f^0 \stackrel{m_q=0}{\rightarrow} |\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| \end{aligned} \quad \stackrel{q \uparrow \downarrow p_i}{\Rightarrow} \quad |\mathbf{q}| - |\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| - |\mathbf{p}_i| \rightarrow \mathbf{q} = -2\mathbf{p}_i \stackrel{(15.1)}{=} -2x\mathbf{p}: \quad p_i = x\mathbf{p},$$

$$\vec{p}_i = x\vec{p} \quad \vec{q} = -2x\vec{p} \quad \vec{p}_f = -x\vec{p}$$


Фиг. 31

ще получим смисъла на кинематичната променлива x като част от импулса на нуклона, който носи начален партон (фиг. 31).

Нека да разгледаме разсейването на неутриното върху партони – кварки и антикварки:

$$(15.3) \quad \begin{aligned} \nu_\mu + d &\rightarrow \mu^- + u(c), & \nu_\mu + s &\rightarrow \mu^- + c(u), \\ \nu_\mu + \bar{u} &\rightarrow \mu^- + \bar{d}(\bar{s}), & \nu_\mu + \bar{c} &\rightarrow \mu^- + \bar{s}(\bar{d}), \end{aligned}$$

като пренебрегнем наличието на b кварка в нуклона. Тогава адронният ток в (14.1) има вида

$$(15.4) \quad J_\alpha^h = V_{q_f q_i} \bar{q}_f(p_f) \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) q_i(p_i), \quad V_{ud} = V_{cs} = \cos \theta_c, \quad V_{us} = -V_{cd} = \sin \theta_c,$$

който ние можем да използваме за изчисляване на структурната функция (14.6). За структурната функция на разсейване на неутриното върху кварките се получава

$$(15.5) \quad \begin{aligned} (W_{\alpha\beta}^+)^{q_f q_i} &= \frac{1}{8} \int \frac{|kp|}{|kp_i|} |V_{q_f q_i}|^2 \text{Tr} \left[\hat{p}_f \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \hat{p}_i \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \right] \delta^{(4)}(p_f - p_i - q) \frac{d^3 p_f}{p_f^0} f_{q_i}(x_i) dx_i \\ &= \int |V_{q_f q_i}|^2 \left[L_{\alpha\beta}(p_i, p_f) + i\varepsilon_{\alpha\beta p_i p_f} \right] \delta^{(4)}(p_f - p_i - q) \frac{d^3 p_f}{p_f^0} f_{q_i}(x_i) \frac{dx_i}{x_i}. \end{aligned}$$

Тук $f_{q_i}(x_i)$ е функцията на разпределение на партоните q_i в нуклона, които носят импулс $x_i p$, множителят $|kp|/|kp_i|$ отчита, че разсейването става върху партон, а не върху нуклон като във формулите (14.5) и (14.8). Интегрирането по крайните импулси на адроните се извършва с формулата

$$(15.6) \quad \int \delta^{(4)}(p_f - p_i - q) \frac{d^3 p_f}{p_f^0} = 2 \int \delta^{(4)}(p_f - p_i - q) \delta(p_f^2) \theta(p_f^0) d^4 p_f$$

$$= 2\delta(2qp_i + q^2) \stackrel{p_f=p_i+q}{=} \frac{\delta\left(\frac{\dots}{2pq}\right)}{|qp|} \delta(x_i - x).$$

която позволява по-нататъшно лесно интегриране по импулсното разпределение на партоните. Тук $\theta(x)$ е прагова функция на Хевисайд (Oliver Heaviside, 1850 – 1925)

$$(15.7) \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Импулсите p_i и p_f можем да изразим като

$$(15.8) \quad p_i = \frac{n-q}{2}, \quad p_f = \frac{n+q}{2},$$

където

$$(15.9) \quad n = p_f + p_i = 2p_i + q \stackrel{q^2 = -2p_i q}{=} 2x \left(p - \frac{qp}{q^2} q \right), \quad n^2 = -q^2.$$

Тогава структурната функция (15.5) придобива вида

$$(15.10) \quad (W_{\alpha\beta}^+)_{q_f q_i} = \left[- \left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) + \frac{1}{M^2} \left(p_\alpha - \frac{qp}{q^2} q_\alpha \right) \left(p_\beta - \frac{qp}{q^2} q_\beta \right) \frac{2xM}{v} + i \frac{\varepsilon_{\alpha\beta pq}}{2M^2} \frac{2M}{v} \right] |V_{q_f q_i}|^2 f_{q_i}(x),$$

който можем да сравним с (14.10) и използвайки (14.23) да получим

$$(15.11) \quad 2xF_1(x) = F_2(x).$$

Това е съотношение на Калан (Curtis Gove Callan Jr., 11.10.1942) и Грос (David Jonathan Gross, 19.02.1941).

Използвайки същия адронен ток (15.4) и съответния матричен елемент от определението (14.6) за структурната функция на разсейване на неутриното върху антикварките получаваме

$$(15.12) \quad (W_{\alpha\beta}^+)_{\bar{q}_f \bar{q}_i} = \left[- \left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) + \frac{1}{M^2} \left(p_\alpha - \frac{qp}{q^2} q_\alpha \right) \left(p_\beta - \frac{qp}{q^2} q_\beta \right) \frac{2xM}{v} - i \frac{\varepsilon_{\alpha\beta pq}}{2M^2} \frac{2M}{v} \right] |V_{q_i q_f}|^2 f_{\bar{q}_i}(x).$$

За разсейване на антинеутриното върху кварките

$$(15.13) \quad \bar{v}_\mu + u \rightarrow \mu^+ + d(s), \quad \bar{v}_\mu + c \rightarrow \mu^+ + s(d),$$

получаваме следната структурна функция

$$(15.14) \quad (W_{\alpha\beta}^-)_{q_f q_i} = \left[- \left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) + \frac{1}{M^2} \left(p_\alpha - \frac{qp}{q^2} q_\alpha \right) \left(p_\beta - \frac{qp}{q^2} q_\beta \right) \frac{2xM}{v} + i \frac{\varepsilon_{\alpha\beta pq}}{2M^2} \frac{2M}{v} \right] |V_{q_i q_f}|^2 f_{q_i}(x),$$

а за разсейването на антинеутриното върху антикварките

$$(15.15) \quad \bar{v}_\mu + \bar{d} \rightarrow \mu^+ + \bar{u}(\bar{c}), \quad \bar{v}_\mu + \bar{s} \rightarrow \mu^+ + \bar{c}(\bar{u}),$$

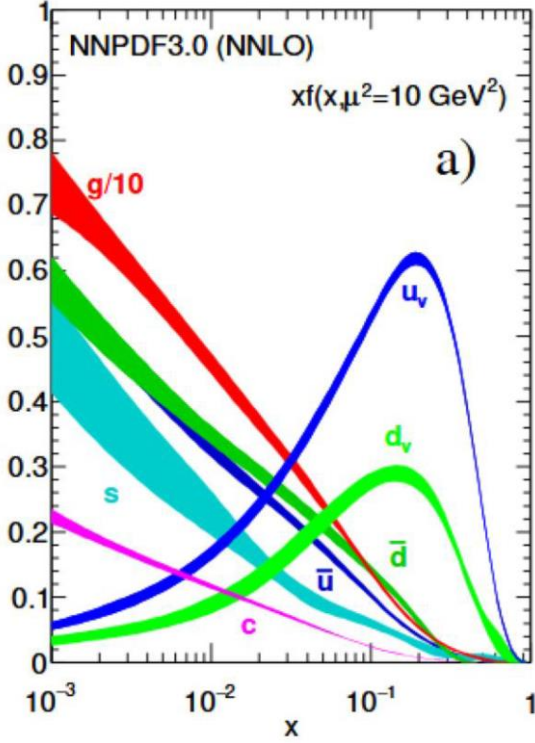
съответно

$$(15.16) \quad (W_{\alpha\beta}^-)_{\bar{q}_f \bar{q}_i} = \left[- \left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) + \frac{1}{M^2} \left(p_\alpha - \frac{qp}{q^2} q_\alpha \right) \left(p_\beta - \frac{qp}{q^2} q_\beta \right) \frac{2xM}{v} - i \frac{\varepsilon_{\alpha\beta pq}}{2M^2} \frac{2M}{v} \right] |V_{q_f q_i}|^2 f_{\bar{q}_i}(x).$$

Адрони, които възникват от кварки и антикварки, в крайно състояние не се регистрират, затова трябва да се сумира по всички възможни типове на кварките в сеченията (14.5) и (14.8) или в структурните функции (15.10), (15.12), (15.14) и (15.16)

$$(15.17) \quad \sum_{q_f} |V_{q_f q_i}|^2 = \sum_{q_f} |V_{q_i q_f}|^2 = 1,$$

което поради унитарността на матрицата на смесване е единица. Функциите на разпределение на партоните (PDF) в нуклона се определят по отношение към протона и се обозначават със съответната буква на кварка или антикварка (фиг. 31)¹⁵



Фиг. 31

$$(15.18) \quad f_{q_i}(x) = q_i(x), \quad f_{\bar{q}_i}(x) = \bar{q}_i(x).$$

Стойността $q_i(x)dx$ определя броя на q_i кварките в протона, с импулси в интервала от x до $x + dx$ по отношение към импулса на протона. Така функциите на разпределенията на фиг. 31 трябва да удовлетворяват правилото за сумите на броя на валентните кварки в протона

$$(15.19) \quad \int_0^1 u_v(x) dx = \int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)] dx = 2,$$

$$\int_0^1 d_v(x) dx = \int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)] dx = 1,$$

$$\int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)] dx = \int_0^1 [c(x) - \bar{c}(x)] dx = 0.$$

Взимайки предвид процесите в (15.3), за процеса на разсейване на неутрино върху протона $\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + X$ структурните функции могат да се изразят чрез съответните функции на разпределенията на партоните в протона (15.18)

$$(15.20) \quad F_1^+(x) = d(x) + s(x) + \bar{u}(x) + \bar{c}(x) = \frac{1}{2} [q_+(x) + \bar{q}_+(x)],$$

$$F_3^+(x) = 2[d(x) + s(x) - \bar{u}(x) - \bar{c}(x)] = [q_+(x) - \bar{q}_+(x)].$$

Така че съответното диференциално сечение от (14.21) придобива вида

$$(15.21) \quad \frac{d^2\sigma_\nu^p}{dx dy} = \sigma_0 x [q_+(x) + (1-y)^2 \bar{q}_+(x)].$$

За разсейване на неутрино върху неутрона $\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + X$ в съответствие с изотопичната симетрия трябва да разменим функциите на разпределенията между u и d кварките $u(x) \leftrightarrow d(x)$ в структурните функции (15.20).

Разсейването на антинейтрино върху кварки (15.13) и (15.15) за процеса $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + X$ води до следните структурни функции

$$(15.22) \quad F_1^-(x) = u(x) + c(x) + \bar{d}(x) + \bar{s}(x) = \frac{1}{2} [q_-(x) + \bar{q}_-(x)],$$

$$F_3^-(x) = 2[u(x) + c(x) - \bar{d}(x) - \bar{s}(x)] = [q_-(x) - \bar{q}_-(x)],$$

и диференциално сечение

¹⁵ Тази фигура е от Particle Data Group P.A. Zyla *et al.*, Prog. Theor. Exp. Phys. **2020** (2020) 083C01.

$$(15.23) \quad \frac{d^2 \sigma_v^p}{dx dy} = \sigma_0 x \left[(1-y)^2 q_-(x) + \bar{q}_-(x) \right].$$

Съответно, за разсейване на антинеутриното върху неутрона $\bar{\nu}_\mu + n \rightarrow \mu^+ + X$ в съответствие с изотопичната симетрия трябва да разменим функциите на разпределенията между u и d кварките $u(x) \leftrightarrow d(x)$ в структурните функции (15.22).

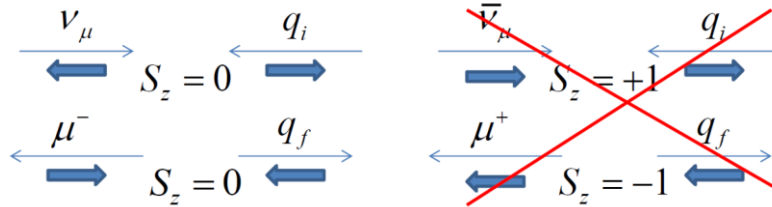
Във формулите (15.21) и (15.23) може да се види подтискащия фактор $(1-y)^2$, който изисква допълнително обяснение. Нека да разгледаме процесите в системата на центъра на покой на (анти)неутриното и (анти)кварка

$$(15.24) \quad k = (E^*, \mathbf{k}^*), \quad p_i = (E^*, -\mathbf{k}^*), \quad k' \approx (E^*, \mathbf{k}^*), \quad p_f = (E^*, -\mathbf{k}^*),$$

Тогава променливата y е свързана с ъгъла на разсейване в тази система θ^* между импулсите \mathbf{k}^* и \mathbf{k}'^*

$$(15.25) \quad y = \frac{(qp)}{(kp)} = \frac{x[(kp_i) - (k'p_i)]}{x(kp_i)} = \sin^2 \frac{\theta^*}{2}.$$

При $\theta^* = 180^\circ$ (разсейване в обратна посока) $y = 1$, така че факторът $(1-y)^2$ забранява неутриното да се разсейва върху антикварки (15.21) или антинеутриното – върху кварки (15.23). Това следва от закона за запазване на ъгловия момент (фиг. 32).



Фиг. 32

Стойността $dQ_i = xq_i(x)dx$ определя каква част от пълния импулс на протона носят кварките q_i в интервала от x до $x + dx$ по отношение към импулса на протона. Нека определим интегралните стойности

$$(15.26) \quad Q_i = \int_0^1 xq_i(x)dx, \quad Q = U + D + S + C, \quad \bar{Q} = \bar{U} + \bar{D} + \bar{S} + \bar{C}.$$

Тогава те са физически измерими от ъгловите разпределения на разсейване на неутриното и антинеутриното, например върху изотопично симетрична мишена (с еднакъв брой протони и неутрони) като желязна мишена.

$$(15.27a) \quad \frac{d\sigma_v}{dy} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\sigma_v^p}{dy} + \frac{d\sigma_v^n}{dy} \right] = \sigma_0 \left[Q + S - C + (1-y)^2 (\bar{Q} - \bar{S} + \bar{C}) \right],$$

$$(15.27b) \quad \frac{d\sigma_{\bar{v}}}{dy} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\sigma_{\bar{v}}^p}{dy} + \frac{d\sigma_{\bar{v}}^n}{dy} \right] = \sigma_0 \left[(1-y)^2 (Q - S + C) + \bar{Q} + \bar{S} - \bar{C} \right].$$

Съответните пълни сечения имат вид

$$(15.28a) \quad \sigma_v = \sigma_0 \left[Q + S - C + \frac{1}{3} (\bar{Q} - \bar{S} + \bar{C}) \right],$$

$$(15.28b) \quad \sigma_{\bar{\nu}} = \sigma_0 \left[\frac{1}{3} (Q - S + C) + \bar{Q} + \bar{S} - \bar{C} \right].$$

Ако нуклоните съдържаха само u и d кварки и няма други кварки и антикварки, отношението $R = \sigma_{\bar{\nu}}/\sigma_{\nu}$ трябва да е около $1/3$. Обаче експерименталното му значение е $R_{\text{exp}} \approx 0.5$. Детайлният анализ показва, че

$$(15.29) \quad U \approx 0.28, \quad D \approx 0.15, \quad \bar{U} \approx \bar{D} \approx 0.03, \quad S \approx \bar{S} \approx 0.01, \quad C \approx \bar{C} \approx 0.$$

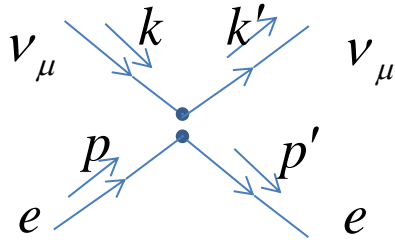
Кварките, които са различни от валентните (15.19) се наричат морски защото възникват от вакуума в резултат на квантови флуктуации. Нека да пресметнем каква част от пълния импулс на протона носят всичките кварки

$$(15.30) \quad Q + \bar{Q} = U + D + S + C + \bar{U} + \bar{D} + \bar{S} + \bar{C} \approx 0.51.$$

Стойността, която получихме, означава, че не само кварките в протона носят неговия импулс. Оказва се, че глюоните пренасят друга част от импулса на протона. Тяхното разпределение също е представено на фиг. 31 в умален мащаб.

16. Еластично разсейване на неутриното върху електрони

В тази глава ние ще разгледаме по-прост и в същото време много по-сложен процес на еластично разсейване на неутриното върху електрони $\nu_{\mu} + e^{-} \rightarrow \nu_{\mu} + e^{-}$, който всъщност загатва за бъдещото обединение на слабите и електромагнитните взаимодействия. Този процес протича без смяна на заряда и затова се нарича взаимодействие с неутрални токове



Фиг. 33

(фиг. 33). Неутриното участва само в слабите взаимодействия (изключвайки, разбира се, гравитационно, в което участват всички частици), спинорната структура на които ние знаем от заредените токове (8.1). В същото време електронът участва както в електромагнитни (6.12) така и в слаби взаимодействия (8.2) проявявайки различна спинорна структура на взаимодействие. Затова нека да запишем лагранжиана на новото взаимодействие по аналогия с лагранжиана на Ферми (7.2), където

електронната част включва неизвестни коефициенти g_V^e и g_A^e

$$(16.1) \quad \mathcal{L}^{\text{NC}} = -\frac{G_{\mu}}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{\mu} \gamma_{\alpha} (1 - \gamma^5) \nu_{\mu} \cdot \bar{e} \gamma^{\alpha} (g_V^e - g_A^e \gamma^5) e.$$

Електронният ток в (16.1) ще запишем чрез проекционните оператори (3.23) въвеждайки нови константи g_L и g_R

$$(16.2) \quad \bar{e} \gamma^{\alpha} (g_V^e - g_A^e \gamma^5) e = g_L \bar{e} \gamma^{\alpha} (1 - \gamma^5) e + g_R \bar{e} \gamma^{\alpha} (1 + \gamma^5) e: \quad \begin{aligned} g_L &= (g_V^e + g_A^e)/2 \\ g_R &= (g_V^e - g_A^e)/2 \end{aligned}$$

За да пресметнем квадрата на абсолютната стойност на матричния елемент на еластичното разсейване на неутриното върху електроните ние ще сумираме по киралностите на всички частици, усреднявайки по началния електрон

$$\begin{aligned}
(16.3) \quad \overline{|M_\nu|^2} &= \frac{1}{2} \frac{G_\mu^2}{2} \text{Tr} \left[\gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \hat{k} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \hat{k}' \right] \\
&\times \left\{ g_L^2 \text{Tr} \left[\gamma^\alpha (1 - \gamma^5) (\hat{p} + m) \gamma^\beta (1 - \gamma^5) (\hat{p}' + m) \right] + g_L g_R \text{Tr} \left[\gamma^\alpha (1 - \gamma^5) (\hat{p} + m) \gamma^\beta (1 + \gamma^5) (\hat{p}' + m) \right] \right. \\
&+ g_R g_L \text{Tr} \left[\gamma^\alpha (1 + \gamma^5) (\hat{p} + m) \gamma^\beta (1 - \gamma^5) (\hat{p}' + m) \right] + \left. g_R^2 \text{Tr} \left[\gamma^\alpha (1 + \gamma^5) (\hat{p} + m) \gamma^\beta (1 + \gamma^5) (\hat{p}' + m) \right] \right\} \\
&= 16 G_\mu^2 \left[L_{\alpha\beta}(k, k') + i \varepsilon_{\alpha\beta\kappa\kappa'} \right] \left\{ g_L^2 \left[L^{\alpha\beta}(p, p') + i \varepsilon^{\alpha\beta p p'} \right] + 2 g_L g_R m^2 \eta^{\alpha\beta} + g_R^2 \left[L^{\alpha\beta}(p, p') - i \varepsilon^{\alpha\beta p p'} \right] \right\} \\
&\stackrel{(8.9)}{=} 64 G_\mu^2 \left\{ g_L^2 (kp)(k'p') - g_L g_R m^2 (kk') + g_R^2 (kp')(kp') \right\}.
\end{aligned}$$

Усредненият квадрат на абсолютната стойност на матричния елемент на еластичното разсейване на антинеутриното върху електроните има следния вид

$$(16.4) \quad \overline{|M_{\bar{\nu}}|^2} = 64 G_\mu^2 \left\{ g_L^2 (kp')(k'p) - g_L g_R m^2 (kk') + g_R^2 (kp)(k'p') \right\}.$$

За да изчислим диференциалното сечение на разсейване

$$(16.5) \quad d\sigma_{\nu/\bar{\nu}} = \frac{\overline{|M_{\nu/\bar{\nu}}|^2}}{4|kp|} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p - q) \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2k'_0} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'_0}$$

трябва да изучим кинематиката на процеса, която почти напълно съвпада с кинематиката на процеса на дълбокото нееластично разсейване (14.11) и (14.12) разгледана в двете предишните глави. В дадения случай на еластично разсейване, след интегриране по крайния импулс на електрона

$$\begin{aligned}
(16.6) \quad \int \delta^{(4)}(p' - p - q) \frac{d^3 \mathbf{p}'}{p'_0} &= 2 \int \delta^{(4)}(p' - p - q) \delta(p'^2 - m^2) \theta(p'_0) d^4 p' \\
&= 2 \delta(2qp + q^2) \stackrel{p'=p+q}{=} \stackrel{qp=mEy}{=} \frac{\delta(1-x)}{mEy}
\end{aligned}$$

получаваме, че $x = 1$ и сеченията зависят от един параметър y

$$(16.7a) \quad \frac{d\sigma_\nu}{dy} = 2\sigma_0 \left[g_L^2 + g_R^2 (1-y)^2 - g_L g_R \left(\frac{m}{E} \right) y \right],$$

$$(16.7b) \quad \frac{d\sigma_{\bar{\nu}}}{dy} = 2\sigma_0 \left[g_L^2 (1-y)^2 + g_R^2 - g_L g_R \left(\frac{m}{E} \right) y \right],$$

където σ_0 е характерното сечение на слабите взаимодействия за разсейване върху електрон

$$(16.8) \quad \sigma_0 = \frac{G_\mu^2}{\pi} mE \approx 8.6 \times 10^{-42} \text{ cm}^2 \frac{E}{\text{GeV}}.$$

Тук трябва да обърнем внимание, че характерното сечение на разсейване на неутриното върху електрон, дори в сравнение с (14.22), е почти на четири порядъка по-малко.

Променливата y , както е определена в (14.12), е свързана с началната и крайната енергии на неутриното в лабораторната система на електрона в покой. Обаче неутрино в крайно състояние не се регистрира и ние трябва да изразим променливата y чрез други стойности

$$(16.9) \quad y = \frac{(qp)}{(kp)} \stackrel{q=p'-p}{=} \frac{(E_e - m)m}{E_\nu m} = \frac{T_e^{\text{kin}}}{E_\nu}.$$

Тук E_ν е началната енергия на неутрино, а E_e и T_e^{kin} са пълната и кинетичната енергия на електрон в крайно състояние. От (14.15) и (14.17) веднага можем да получим границите на променливата y

$$(16.10) \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{1 + m/2E_\nu}.$$

При енергия на налитащото неутрино много по-голяма от масата на електрона $E_\nu \gg m_e$ получаваме пълните сечения

$$(16.11a) \quad \sigma_\nu = 2\sigma_0 \left[g_L^2 + g_R^2/3 \right],$$

$$(16.11b) \quad \sigma_{\bar{\nu}} = 2\sigma_0 \left[g_L^2/3 + g_R^2 \right],$$

които можем да сравним с експерименталните им стойности

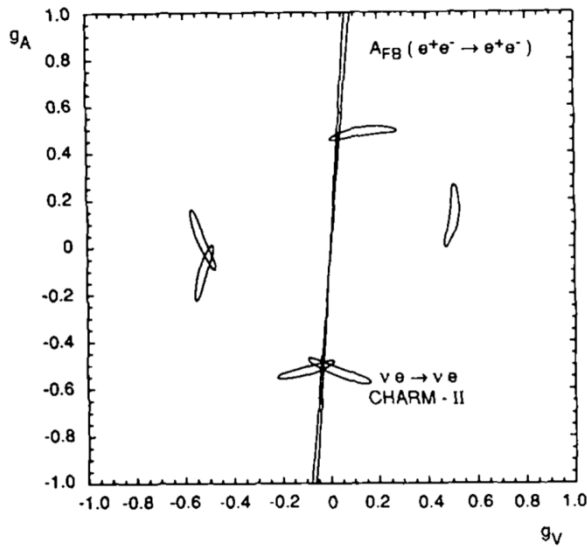
$$(16.12a) \quad \sigma_\nu^{\text{exp}} = (1.6 \pm 0.1) \times 10^{-42} \text{ cm}^2 \frac{E}{\text{GeV}},$$

$$(16.12b) \quad \sigma_{\bar{\nu}}^{\text{exp}} = (1.4 \pm 0.1) \times 10^{-42} \text{ cm}^2 \frac{E}{\text{GeV}}.$$

За да определим константите g_L и g_R ще използваме експерименталните стойности (16.12)

$$(16.13) \quad \begin{aligned} \sigma_\nu - \sigma_{\bar{\nu}}/3 &= 16\sigma_0 g_L^2/9 & \rightarrow & g_L^2 = 0.074 \pm 0.009 \\ \sigma_{\bar{\nu}} - \sigma_\nu/3 &= 16\sigma_0 g_R^2/9 & \rightarrow & g_R^2 = 0.057 \pm 0.009' \end{aligned}$$

които водят до четирикратна нееднозначност (фиг. 34)¹⁶



Фиг. 34

$$(16.14a) \quad \begin{aligned} (g_V^e)^2 &= 0.260 \pm 0.025 \approx (\pm 0.5)^2 \\ (g_A^e)^2 &= 0.001 \pm 0.002 \approx 0 \end{aligned}$$

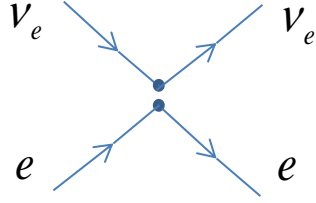
$$(16.14b) \quad \begin{aligned} (g_V^e)^2 &= 0.001 \pm 0.002 \approx 0 \\ (g_A^e)^2 &= 0.260 \pm 0.025 \approx (\pm 0.5)^2 \end{aligned}$$

Получените в (16.13) резултати показват, че в отличие от лявото взаимодействие на заредените токове, електронният неутрален ток съдържа и дясна компонента. Отговорът на въпроса „Защо е така?“ ще бъде намерен след построяване на обединения модел на слабите и електромагнитните взаимодействия. Засега ние можем само да намалим нееднозначността в решенията

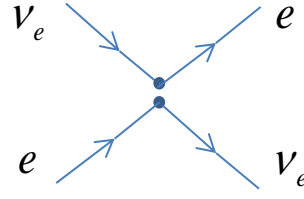
(16.14) използвайки други процеси на разсейване на неутрино.

Нека да разгледаме сега процеса на еластично разсейване на електронното неутрино върху електрони $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$. Този процес, в отличие от току що разгледания, включва 2 диаграми на неутрални (фиг. 35а) и заредени токове (фиг. 35б) съответно:

¹⁶ Тази фигура е от статия P. Vilain *et al.* (CHARM II Collaboration), Phys. Lett. B **335** (1994) 246.



Фиг. 35а



Фиг. 35б

Съответният пълен лагранжиан има вида

$$(16.15) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}^{\text{NC}} + \mathcal{L}^{\text{CC}} = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma_\alpha (1-\gamma^5) \nu_e \cdot \bar{e} \gamma^\alpha (g_V^e - g_A^e \gamma^5) e \\ - \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma_\alpha (1-\gamma^5) e \cdot \bar{e} \gamma^\alpha (1-\gamma^5) \nu_e \\ \stackrel{\text{Fierz}}{=} -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma_\alpha (1-\gamma^5) \nu_e \cdot \left[(g_L + 1) \bar{e} \gamma^\alpha (1-\gamma^5) e + g_R \bar{e} \gamma^\alpha (1-\gamma^5) e \right].$$

В последното равенство ние използвахме тъждеството на Фирц (4.12) за втория член от първото равенство, взимайки предвид антикомутативността на спинорите.

Експерименталните данни сочат, че

$$(16.16) \quad g_L^{\text{exp}} < 0 \quad \rightarrow \quad g_V^e + g_A^e < 0$$

и само две от решенията (16.14) на фиг. 34 са възможни

$$(16.17) \quad \begin{array}{l} g_V^e \approx -0.5 \\ g_A^e \approx 0 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{l} g_V^e \approx 0 \\ g_A^e \approx -0.5 \end{array} .$$

Изпреварвайки събитията трябва да отбележим, че само едното от решенията в (16.17)

$$(16.18) \quad g_V^{\text{exp}} = -0.035 \pm 0.017, \quad g_A^{\text{exp}} = -0.503 \pm 0.017,$$

отговаря на по-нататъшните експериментални данни, които ще обсъдим в глава 21.

17. Калибровъчна симетрия на слаби и електромагнитни взаимодействия

За да обясним близкотодействие на слабите сили с междинен преносител (фиг. 23), на нас ще ни трябва масивна векторна частица, която ще осигури радиус на взаимодействието от порядъка на $1/M_W$ (12.25). Безмасовата векторна частица фотон (фиг. 2) има безкраен радиус на взаимодействие и е следствие от калибровъчно инвариантен лагранжиан. Ако добавим в лагранжиана масов член, калибровъчната симетрия ще бъде нарушена

$$(17.1) \quad \mathcal{L}_M^V(x) = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta}(x) F^{\alpha\beta}(x) + \frac{M^2}{2} V_\alpha(x) V^\alpha(x) \\ \stackrel{F_{\alpha\beta}(x) = \partial_\alpha V_\beta(x) - \partial_\beta V_\alpha(x)}{\Rightarrow} -\frac{1}{2} (\partial_\alpha V_\beta)(\partial^\alpha V^\beta) + \frac{1}{2} (\partial_\alpha V^\alpha)^2 + \frac{M^2}{2} V_\alpha V^\alpha \quad : \quad \begin{array}{l} V_\alpha \rightarrow V'_\alpha = V_\alpha - \partial_\alpha \lambda(x) \\ \mathcal{L}_M^V \rightarrow \mathcal{L}'_M^V \neq \mathcal{L}_M^V \end{array} .$$

Използвайки уравнения на Лагранж (Joseph-Louis Lagrange, 1736 – 1813) можем да получим уравнения на движение и диференцирайки ги получаваме също условието на Лоренц (Ludvig Valentin Lorenz, 1829 – 1891)¹⁷

$$(17.2) \quad \frac{\delta \mathcal{L}_M^V}{\delta V_\beta} - \partial_\alpha \left(\frac{\delta \mathcal{L}_M^V}{\delta \partial_\alpha V_\beta} \right) = 0 \rightarrow \partial_\alpha \partial^\alpha V^\beta - \partial^\beta \partial^\alpha V_\alpha + M^2 V^\beta = 0 \xrightarrow{\partial_\beta} \partial_\beta V^\beta(x) = 0,$$

което оставя три независими степени на свобода за масивната векторна частица от четири на векторния потенциал V_α . Уравнението на движение (17.2) в импулсно пространство е алгебрично

$$(17.3) \quad \left[(q^2 - M^2) \eta^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta \right] \tilde{V}_\alpha(q) = 0$$

и функцията на Грийн лесно може да бъде построена от

$$(17.4) \quad \left[(q^2 - M^2) \eta^{\alpha\gamma} - q^\alpha q^\gamma \right] D_{\alpha\beta}(q) = -i \delta_{\alpha\beta}^\gamma \rightarrow D_{\alpha\beta}(q) = -i \frac{\eta_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta / M^2}{q^2 - M^2}.$$

Тази функция, за съжаление, при $q \rightarrow \infty$ клони към константа и не може да играе роля на регуляризация в (12.26). Нещо повече, това поведение на функцията на Грийн води до неперенормируемост на квантовата теория за масивни векторни полета. Отговора на въпроса как да избегнем това ще отложим до следващата глава. Засега ще смятаме, че векторни частици се описват с безмасови калибровъчни векторни полета на Янг (Chen-Ning Yang, 01.10.1922) и Милс (Robert Laurence Mills, 1927 – 1999).

Нека опитаме да ги въведем за заредени токове на лептони (8.1) и кварки (13.4)

$$(17.5) \quad J_\alpha = J_\alpha^h + J_\alpha^\ell = \sum_{i=1,2,3} \bar{u}_i \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) d'_i + \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_\ell \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \ell \\ = 2 \sum_{i=1,2,3} \bar{Q}_{iL} \gamma_\alpha \tau^+ Q_{iL} + 2 \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{L}_{\ell L} \gamma_\alpha \tau^+ L_{\ell L}$$

в лагранжиана

$$(17.6) \quad \mathcal{L}^{\text{CC}} = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} J_\alpha^\dagger J^\alpha,$$

където τ^+ е повишаващ оператор (10.9) в пространството на левите дублети Q_{iL} и $L_{\ell L}$

$$(17.7) \quad Q_{iL} = \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix}, \quad L_{\ell L} = \begin{pmatrix} \nu_{\ell L} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}.$$

Калибровъчните полета, които действат на тези дублети, са от неабелевата група (с некомутиращи генератори) $SU(2)_L: W_\alpha(x) \cdot \frac{\tau}{2}$. Недиagonalните полета

$$\frac{W_\alpha^1 \tau^1 + W_\alpha^2 \tau^2}{2} = \frac{W_\alpha^+ \tau^+ + W_\alpha^- \tau^-}{\sqrt{2}}, \text{ където } W_\alpha^\pm = \frac{W_\alpha^1 \mp i W_\alpha^2}{\sqrt{2}}, \text{ взаимодействат със заредени токове}$$

като $g W_\alpha^- J^{\dagger\alpha} + g W_\alpha^+ J^\alpha$. Константата на взаимодействие g е константа на взаимодействие

от групата $SU(2)_L$. За съжаление, неутралното diagonalно поле $W_\alpha^3 \frac{\tau^3}{2}$ не може да изпълни

ролята на електромагнитното поле $A_\alpha(x)$, защото взаимодейства само с левите фермиони.

¹⁷ Понякога се бърка с Хендрик Лоренц (Hendrik Antoon Lorentz, 1853 – 1928), на името на когото е кръстена групата на симетрията за релативистки преобразования.

За да обединим слабите и електромагнитните взаимодействия по идея на Глашоу е необходимо да се добави абелево калибровъчно поле $B_\alpha(x)$, което ще взаимодейства с фермиони, имащи хиперзаряд

$$(17.8) \quad Y = 2(Q - \tau^3/2),$$

с константа на взаимодействие g' от групата $U(1)_Y$. Нека първо да построим обединения модел на лептоните използвайки калибровъчната група $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Затова освен дублети от левите лептони (17.7), които участват в заредени токове, трябва да включим десните лептони, които участват в неутралните токове (16.1) и в електромагнитен ток и са синглети относно калибровъчната група

$$(17.9) \quad L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \ell_L \end{pmatrix}, \quad \ell_R, \quad \nu_{eR}.$$

За да се получи пълна симетрия тук ние добавихме дясно неутрино. То е синглет и не взаимодейства с калибровъчните полета W_α . В съответствие с формула (17.8)

хиперзарядът му е нула

$$(17.10) \quad Y(\nu_{eR}) = 0$$

и то също не взаимодейства и с калибровъчното поле B_α . Затова то се нарича стерилно. Хиперзарядите на дублета и заредения лептон са

$$(17.11) \quad Y(L) = (-1) \begin{cases} 2(0-1/2) \\ 2(-1+1/2) \end{cases}, \quad Y(\ell_R) = (-2).$$

Калибровъчната ковариантна производна, която заменя обикновената за да бъде теорията калибровъчно инвариантна, е

$$(17.12) \quad \partial_\alpha \psi \rightarrow D_\alpha \psi = \left(\partial_\alpha - ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}_\alpha - ig' \frac{Y}{2} B_\alpha \right) \psi.$$

Тогава за различните полета от (17.9) получаваме различен вид на ковариантната производна

$$(17.13a) \quad D_\alpha L = \left(\partial_\alpha - ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}_\alpha + ig' \frac{1}{2} B_\alpha \right) L,$$

$$(17.13b) \quad D_\alpha \ell_R = (\partial_\alpha + ig' B_\alpha) \ell_R,$$

$$(17.13c) \quad D_\alpha \nu_{eR} = \partial_\alpha \nu_{eR},$$

и съответния лагранжиан има вида

$$(17.14) \quad \mathcal{L}_{EW}^e = i\bar{L}\hat{D}L + i\bar{\ell}_R\hat{D}\ell_R + i\bar{\nu}_{eR}\hat{D}\nu_{eR} = i\bar{L}\hat{D}L + i\bar{\ell}_R\hat{D}\ell_R + i\bar{\nu}_{eR}\hat{D}\nu_{eR} + \bar{L}\gamma^\alpha \left(g \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}_\alpha - g' \frac{1}{2} B_\alpha \right) L - g' \bar{\ell}_R \gamma^\alpha B_\alpha \ell_R.$$

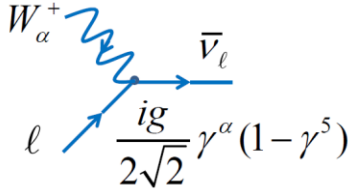
Тук трябва да отбележим, че масовият член, който смесва леви и десни спинори (9.18), е забранен в (17.14) от симетрични съображения. Действително, лагранжианът трябва да е инвариантен относно калибровъчната група, а производението от ляв дублет и десен синглет от (17.9) се преобразува като дублет.

Нека първо разгледаме взаимодействието на калибровъчните бозони със заредените токове, които следват от (17.14)

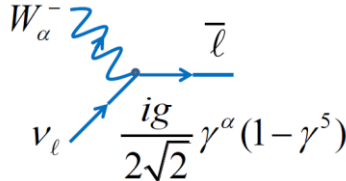
$$(17.15) \quad \mathcal{L}_{EW}^{CC} = \frac{g}{2} \bar{L} \gamma^\alpha (W_\alpha^1 \tau^1 + W_\alpha^2 \tau^2) L = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{L} \gamma^\alpha (W_\alpha^+ \tau^+ + W_\alpha^- \tau^-) L$$

$$= \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\nu}_\ell \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \ell \cdot W_\alpha^+ + \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\ell} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_\ell \cdot W_\alpha^-.$$

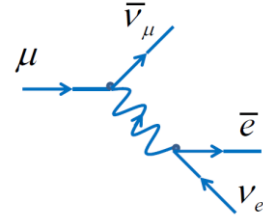
Съответните диаграми на Файнман са представени на фиг. 36.



Фиг. 36а



Фиг. 36б



Фиг. 37

Сега ако използваме пропагатор за масивно векторно поле (17.4) и отчитайки, че лептоните засега са безмасови частици, от диаграмата на фиг. 37 получаваме връзката (12.25) между калибровъчната константа g , масата на W^\pm -бозона и ефективната константа на разпад на мюона G_μ

$$(17.16) \quad \mathcal{L}_F^{CC} = (-i) \frac{1}{2} \cdot 2 \left(\frac{ig}{2\sqrt{2}} \right)^2 \bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \mu \frac{(-i)(\eta_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta / M_W^2)}{q^2 - M_W^2} \bar{e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \nu_e$$

$$\Rightarrow \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_\mu}{\sqrt{2}}.$$

Взаимодействието на калибровъчните бозони с неутралните токове

$$(17.17) \quad \mathcal{L}_{EW}^{NC} = \frac{1}{2} \bar{L} \gamma^\alpha (g \tau^3 W_\alpha^3 - g' B_\alpha) L - g' \bar{\ell}_R \gamma^\alpha B_\alpha \ell_R = \frac{1}{2} \bar{\nu}_{\ell L} \gamma^\alpha (g W_\alpha^3 - g' B_\alpha) \nu_{\ell L}$$

$$- \frac{1}{2} \bar{\ell}_L \gamma^\alpha (g W_\alpha^3 + g' B_\alpha) \ell_L - g' \bar{\ell}_R \gamma^\alpha B_\alpha \ell_R$$

е малко по-сложно, но представя пълна картина на обединението на слабите и електромагнитните взаимодействия. Например, от (17.17) следва, че лявото неутрино взаимодейства само с определена комбинация на W_α^3 и B_α , която отговаря на нова неутрална частица – Z -бозона

$$(17.18) \quad Z_\alpha = \frac{g W_\alpha^3 - g' B_\alpha}{\sqrt{g^2 + g'^2}}.$$

Нормировъчната константа

$$(17.19) \quad \bar{g} = \sqrt{g^2 + g'^2}$$

е избрана по подходящ начин за да се запази нормировката на вълновата функция на Z -бозона. Тогава част от лагранжиана на взаимодействие (17.17) за неутриното е

$$(17.20) \quad \mathcal{L}_\nu^{NC} = \frac{\bar{g}}{2} \bar{\nu}_{\ell L} \gamma^\alpha \nu_{\ell L} \cdot Z_\alpha.$$

Естествено е да предположим, че другата ортогонална комбинация на W_α^3 и B_α трябва да отговаря на електромагнитно поле

$$(17.21) \quad A_\alpha = \frac{g'W_\alpha^3 + gB_\alpha}{\sqrt{g^2 + g'^2}}.$$

Тогава можем да въведем ортогоналната матрицата на смесване

$$(17.22) \quad \begin{pmatrix} Z_\alpha \\ A_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\alpha^3 \\ B_\alpha \end{pmatrix}$$

и параметрите на смесване

$$(17.23) \quad \cos \theta_W = \frac{g}{g'}, \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{g},$$

където θ_W е ъгъл на смесване на Вайнберг (Steven Weinberg, 03.05.1933). Нека сега да запишем част от лагранжиана на взаимодействието (17.17) за зареден лептон с Z_α и A_α полета

$$(17.24) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_l^{\text{NC}} &= -\frac{1}{2\bar{g}} \bar{\ell} \gamma^\alpha \left[g(g'A_\alpha + gZ_\alpha) + g'(gA_\alpha - g'Z_\alpha) \right] \ell_L - \frac{g'}{\bar{g}} \bar{\ell} \gamma^\alpha (gA_\alpha - g'Z_\alpha) \ell_R \\ &= -\frac{g}{\bar{g}} \bar{\ell} \gamma^\alpha \ell \cdot A_\alpha - \frac{\bar{g}}{2} \left(\bar{\ell}_L \gamma^\alpha \ell_L - 2 \sin^2 \theta_W \bar{\ell} \gamma^\alpha \ell \right) \cdot Z_\alpha \equiv -e \bar{\ell} \gamma^\alpha \ell \cdot A_\alpha + \frac{\bar{g}}{2} \bar{\ell} \gamma^\alpha (g_V^\ell - g_A^\ell \gamma^5) \ell \cdot Z_\alpha. \end{aligned}$$

Последното равенство предоставя полезно съотношение между двата неизвестни параметъра g и $\sin \theta_W$ с известната константа на електромагнитното взаимодействие e

(1.2)

$$(17.25) \quad e = g \sin \theta_W.$$

Освен това константите (16.1) в неутралния ток за зареден лептон се изразяват от (17.24) като

$$(17.26) \quad g_V^\ell = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W, \quad g_A^\ell = -\frac{1}{2}.$$

Сравнявайки тези съотношения с експерименталните данни (16.18), получаваме стойността на втория неизвестен параметър на обединения модел

$$(17.27) \quad \sin^2 \theta_W^{\text{exp}} = 0.2325 \pm 0.0085.$$

Теоретичното предсказание на g_A^ℓ се съгласува с неговото експериментално значение.

За да получим обща формула за векторната и аксиалната константа на един от кварките

$$(17.28) \quad Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad u_R, \quad d_R,$$

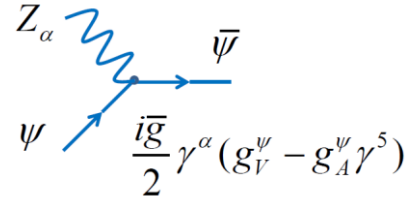
или лептоните (17.9) ще използваме операторното равенство (17.8). Нека запишем взаимодействието (17.17) на калибровъчните бозони с неутралните токове за произволно поле $\psi = u, d, \nu, \ell$

$$(17.29) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{EW}^{\text{NC}} &= \bar{\psi}_L \gamma^\alpha \left(g \frac{\tau^3}{2} W_\alpha^3 + g' \frac{Y}{2} B_\alpha \right) \psi_L + g' \bar{\psi}_R \gamma^\alpha \frac{Y}{2} B_\alpha \psi_R \\ &\stackrel{(17.8)}{=} \frac{1}{\bar{g}} \bar{\psi}_L \gamma^\alpha \left[g(g'A_\alpha + gZ_\alpha) \frac{\tau^3}{2} + g'(gA_\alpha - g'Z_\alpha) \left(Q - \frac{\tau^3}{2} \right) \right] \psi_L + \frac{g'}{\bar{g}} \bar{\psi}_R \gamma^\alpha (gA_\alpha - g'Z_\alpha) Q \psi_R \\ &\equiv e \bar{\psi} \gamma^\alpha Q \psi \cdot A_\alpha + \frac{\bar{g}}{2} \bar{\psi} \gamma^\alpha (g_V^\psi - g_A^\psi \gamma^5) \psi \cdot Z_\alpha. \end{aligned}$$

Тогава от последното равенство получаваме

$$(17.30) \quad g_V^\psi = \frac{\tau^3}{2} - 2Q \sin^2 \theta_w, \quad g_A^\psi = \frac{\tau^3}{2}.$$

Взаимодействието на произволното поле ψ с неутралния бозон Z зависи от неговите квантови числа и е представено на диаграмата на фиг. 38, а с електромагнитното поле A_α на фиг. 1, където взаимодействието в общия случай зависи от собственото



Фиг. 38

значение на оператора Q : $ie\gamma^\alpha Q$. Например, за кварка получаваме взаимодействието в (10.7), а за отрицателно зареден лептон – (17.24). Явният вид на константите на неутралните токове (17.30) за всички частици е представен в следващите формули

$$(17.31) \quad \begin{aligned} g_V^v &= \frac{1}{2}, & g_A^v &= \frac{1}{2}; & g_V^u &= \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w, & g_A^u &= \frac{1}{2}; \\ g_V^\ell &= -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w, & g_A^\ell &= -\frac{1}{2}; & g_V^d &= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w, & g_A^d &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

18. Механизъм за придобиване на маси на елементарните частици

Ще започнем с една интересна теорема, която предсказва появяването на безмасови частици в резултат на спонтанно нарушение на симетрия и която носи името на Голдстоун (Jeffrey Goldstone, 03.09.1933). Нейната формулировка е следната: „Ако лагранжианът е инвариантен относно непрекъснатата трансформация, тогава или вакуумното състояние също е инвариантно при трансформацията, или в спектъра трябва да се появят безспиновни частици с нулева маса“. Например, съществуването на триплет пиони с много малка маса, която е нула в случая на безмасови кварки (10.21), е резултат от нарушение на киралната симетрия. Нейното доказателство ще проведем използвайки следния лагранжиан на скаларно комплексно поле

$$(18.1) \quad \mathcal{L} = (\partial_\alpha \varphi^\dagger) \partial^\alpha \varphi - V[\varphi^\dagger, \varphi], \quad V = \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2 - \mu^2 \varphi^\dagger \varphi,$$

който е инвариантен относно $U(1)$ трансформацията

$$(18.2) \quad \varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \rightarrow \varphi e^{i\theta} = \frac{(\varphi_1 \cos \theta - \varphi_2 \sin \theta) + i(\varphi_1 \sin \theta + \varphi_2 \cos \theta)}{\sqrt{2}}.$$

Нека презапишем лагранжиана (18.1) чрез две реални полета φ_1 и φ_2 (18.2)

$$(18.3) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} (\partial_\alpha \varphi_i) \partial^\alpha \varphi_i - V[\varphi_1, \varphi_2], \quad V = \frac{\lambda}{4} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 - \frac{\mu^2}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2), \quad \lambda > 0.$$

Константата на взаимодействие между скаларните полета λ трябва да бъде положителна за да осигури минимум на потенциала V . Минимумът на този потенциал може да се определи от решенията за неговите локални екстремуми

$$(18.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = \lambda \varphi_1 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \mu^2 \varphi_1 = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = \lambda \varphi_2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \mu^2 \varphi_2 = 0. \end{cases}$$

Ако $\mu^2 \leq 0$, то системата (18.4) има само тривиално симетрично решение

$$(18.5) \quad \langle \varphi_1 \rangle_0 = \langle \varphi_2 \rangle_0 = 0,$$

което отговаря на минимума. То, естествено, е инвариантно относно трансформацията (18.2) и спектърът на системата се състои от две скалярни частици с равни маси

$$(18.6) \quad m_{\varphi_1} = m_{\varphi_2} = \sqrt{-\mu^2}.$$

Ако $\mu^2 > 0$, то системата (18.4) освен тривиалното решение (18.5), което отговаря на локален максимум, има безкрай много нетривиални решения отговарящи на минимума, от които можем да изберем едно фиксирайки нарушението на симетрията (18.2)

$$(18.7) \quad \langle \varphi_1^2 + \varphi_2^2 \rangle_0 = \frac{\mu^2}{\lambda} \rightarrow \langle \varphi_1 \rangle_0 \equiv \nu = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \neq 0, \quad \langle \varphi_2 \rangle_0 = 0.$$

Такова нарушение се нарича спонтанно. За да изследваме спектъра на системата с нарушена симетрия на вакуумното състояние трябва да изберем ново поле $\tilde{\varphi}_1$ с нулево вакуумно средно

$$(18.8) \quad \tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 - \nu \rightarrow \langle \tilde{\varphi}_1 \rangle_0 = 0.$$

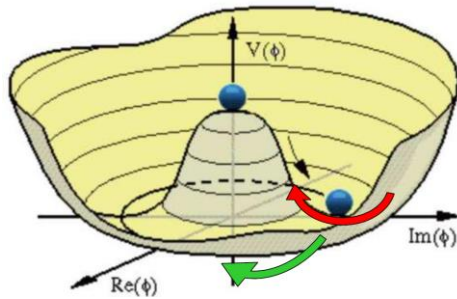
Тогава лагранжианът (18.3) придобива вида

$$(18.9) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \tilde{\varphi}_1)^\alpha \tilde{\varphi}_1 - \mu^2 \tilde{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}(\partial_\alpha \varphi_2)^\alpha \varphi_2 - \frac{\lambda}{4}[(\tilde{\varphi}_1^2 + \varphi_2^2)^2 + 4\nu \tilde{\varphi}_1(\tilde{\varphi}_1^2 + \varphi_2^2) - \nu^4],$$

от който можем да заключим, че едната частица е масивна, а другата – безмасова

$$(18.10) \quad m_{\tilde{\varphi}_1} = \sqrt{2\mu^2} = \sqrt{2\lambda} \nu, \quad m_{\varphi_2} = 0.$$

Безмасовата частица се нарича бозон на Голдстоун, а масивната – бозон на Хигс (фиг. 39).



Фиг. 39

Едната степен на свободата за движение в двумерно потенциално поле V отговаря на движение по окръжност (18.7) с една и съща енергия, което означава, че тя се отнася за безмасовата частица на Голдстоун. А степента на свобода, която е свързана с напречните осцилации, описва масивната частица на Хигс. Така при спонтанно нарушение на симетрията възникват както масивни, така и безмасови скалярни частици. Проблемът е в това, че в природата не съществуват безмасови скалярни частици и, според

теоремата на Голдстоун, спонтанното нарушение на симетрията води до нефизическа реалност.

От друга страна калибровъчната симетрия пречи да въведем масивно векторно поле (17.1) без тя да бъде нарушена. Решение на тези два различни проблема е било намерено от Браут (Robert Brout, 1928 – 2011), Енглерт (François Englert, 06.11.1932) и Хигс. Нека построим от скалярния лагранжиан (18.1), в случай на спонтанно нарушена симетрия (18.7), калибровъчно инвариантен лагранжиан добавяйки калибровъчно поле A_α

$$(18.11) \quad \mathcal{L} = (D_\alpha \varphi)^\dagger D^\alpha \varphi - V[\varphi^\dagger, \varphi] - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta},$$

където

$$(18.12) \quad D_\alpha \varphi = (\partial_\alpha - ieA_\alpha) \varphi \quad \text{и} \quad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

са съответно ковариантна производна и калибровъчно инвариантен тензор на полето A_α .

Сега да изразим комплексното поле $\varphi(x)$ в лагранжиана (18.11) чрез нови полета $h(x)$ и $\theta(x)$

$$(18.13) \quad \varphi(x) = \frac{h(x) + v}{\sqrt{2}} e^{i\theta(x)}.$$

Тогава лагранжианът (18.11) ще има вида

$$(18.14) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\alpha h - i(h+v)\partial_\alpha \theta + ie(h+v)A_\alpha] [\partial^\alpha h + i(h+v)\partial^\alpha \theta - ie(h+v)A^\alpha] - V[h] - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \stackrel{V_\alpha = A_\alpha - \partial_\alpha \theta / e}{=} \frac{1}{2} [\partial_\alpha h + ie(h+v)V_\alpha] [\partial^\alpha h - ie(h+v)V^\alpha] - V[h] - \frac{1}{4} F'_{\alpha\beta} F'^{\alpha\beta} \stackrel{F'_{\alpha\beta} = \partial_\alpha V_\beta - \partial_\beta V_\alpha}{=} \frac{1}{2} (\partial_\alpha h) \partial^\alpha h - V[h] - \frac{1}{4} F'_{\alpha\beta} F'^{\alpha\beta} + \frac{e^2 v^2}{2} V_\alpha V^\alpha + e^2 \left(v h + \frac{h^2}{2} \right) V_\alpha V^\alpha.$$

Забележително е, че последното равенство не съдържа полето $\theta(x)$, което се абсорбира от полето A_α в резултат на калибровъчното преобразование

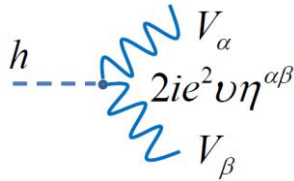
$$(18.15) \quad V_\alpha = A_\alpha - \frac{1}{e} \partial_\alpha \theta.$$

Калибровката (18.15), при която възниква ново векторно поле V_α с маса

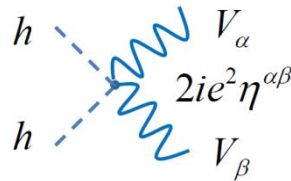
$$(18.16) \quad M_V = ev,$$

а бозонът на Голдстоун $\theta(x)$ изчезва, се нарича унитарна.

Интересно е да преброим степените на свобода на лагранжианите в (18.11) и в последния ред на (18.14). Лагранжианът (18.11) има 2 степени на свобода на скаларното поле и 2 степени на свобода на калибровъчното безмасово векторно поле¹⁸. Този лагранжиан е еквивалентен на лагранжиана в унитарната калибровка, който съдържа само



Фиг. 40а



Фиг. 40б

една степен на свобода на скаларното поле на Хигс $h(x)$ и 3 степени на свобода на масивното векторно поле V_α . Последният член в (18.14) отговаря на взаимодействия на полето на Хигс с калибровъчните полета (фиг. 40).

Диаграмата на фиг. 40а отговаря за процеса на разпад на бозона на Хигс в два калибровъчни бозона. Този процес беше един от основните, в които бе открит хигсовия бозон през 2012 в CERN.

19. Стандартен модел на Глашоу – Вайнберг – Салам

Идеята на Глашоу, да се добави абелево калибровъчно поле $B_\alpha(x)$, което ще взаимодейства с фермиони, имащи хиперзаряд (17.8), описва само калибровъчната група на обединения модел, но не обяснява масите на участващите в него частици. Механизмът, който разгледахме в предишната глава, предлага начин за придобиване на маси на елементарните частици без калибровъчната симетрия да е нарушена. За да реализираме този механизъм за лагранжиана (17.14) трябва да добавим към него лагранжианите на калибровъчните полета

$$(19.1) \quad \mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 W_{\alpha\beta}^i W^{i\alpha\beta},$$

¹⁸ Както е известно заради калибровъчната симетрия безмасово векторно поле има две напречни степени на свобода.

където

$$(19.2) \quad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha B_\beta - \partial_\beta B_\alpha, \quad W_{\alpha\beta}^i = \partial_\alpha W_\beta^i - \partial_\beta W_\alpha^i + g \varepsilon^{ijk} W_\alpha^j W_\beta^k,$$

са тензори на калибровъчните полета B_α и W_α^i , и на комплексния дублет на скаларните полета

$$(19.3) \quad \mathcal{L}_H = (D_\alpha H)^\dagger D^\alpha H - V[H^\dagger, H], \quad V = \lambda(H^\dagger H)^2 - \mu^2 H^\dagger H,$$

където хиперзарядите на дублетите

$$(19.4) \quad H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}: \quad Y(H) = (+1) \begin{cases} 2(1-1/2) \\ 2(0+1/2) \end{cases}, \quad H^\dagger = (H^- \bar{H}^0): \quad Y(H^\dagger) = (-1),$$

определят техните ковариантни производни (17.12)

$$(19.5) \quad D_\alpha H = \left(\partial_\alpha - ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\alpha - ig' \frac{1}{2} B_\alpha \right) H, \quad (D_\alpha H)^\dagger = H^\dagger \left(\vec{\partial}_\alpha + ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\alpha + ig' \frac{1}{2} B_\alpha \right).$$

Нека сега запишем H дублета (19.4) чрез новите полета $h(x)$ и $\theta(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x))$

$$(19.6) \quad H(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) + v \end{pmatrix} e^{i\theta(x) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}}.$$

В унитарна калибровка 3 степени на свобода на бозоните на Голдстоун $\theta(x)$ трябва да изчезнат и само полето на Хигс $h(x)$ и вакуумно средното

$$(19.7) \quad \langle H \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

ще определят динамиката на системата. Например, масите на калибровъчните бозони можем да определим от частта на лагранжиана (19.3)

$$(19.8) \quad \mathcal{L}_M = \langle H^\dagger \rangle_0 \left(g \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\alpha + g' \frac{1}{2} B_\alpha \right) \left(g \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}^\alpha + g' \frac{1}{2} B^\alpha \right) \langle H \rangle_0 \\ = \frac{v^2}{8} \left[g^2 \vec{W}_\alpha \cdot \vec{W}^\alpha - 2gg' W_\alpha^3 B^\alpha + g'^2 B_\alpha B^\alpha \right] = \frac{g^2 v^2}{4} W_\alpha^+ W^{-\alpha} + \frac{\bar{g}^2 v^2}{8} Z_\alpha Z^\alpha.$$

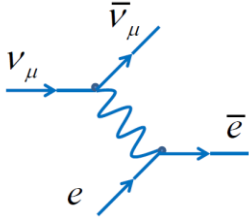
Този израз осигурява липсата на маса на електромагнитното поле A_α и предсказва масите на калибровъчните бозони W_α^\pm и Z_α и тяхното отношение

$$(19.9) \quad M_A = 0, \quad M_W = \frac{g v}{2}, \quad M_Z = \frac{\bar{g} v}{2}, \quad \rightarrow \quad \frac{M_W}{M_Z} = \cos \theta_w \leq 1.$$

Това означава, че симетрията $SU(2)_L \times U(1)_Y$ се нарушава до $U(1)_{em}$ симетрия на електромагнитно взаимодействие оставяйки един безмасов калибровъчен бозон – фотона, който отговаря за запазването на заряда Q . Действително, от $2 + 3 \times 2 = 8$ степени на свобода на безмасовите калибровъчни бозони и 4 скаларни степени на свобода в резултат на спонтанното нарушение на симетрията в унитарната калибровка остават един безмасов фотон с 2 степени на свобода, 3 масивни векторни бозона всеки с по 3 степени на свобода и един бозон на Хигс с една степен на свобода.

Използвайки съотношенията (12.25) и (19.9) получаваме връзка между ефективната константа на разпад на мюона G_μ и вакуумното средно v (19.7)

$$(19.10) \quad \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{1}{2v^2} \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}G_\mu}} \approx 246.22 \text{ GeV}.$$



Фиг. 41

От предсказаните маси (19.9) вече можем да получим ефективния лагранжиан на неутралните токове (16.1) от диаграмата на фиг. 41 в пълна аналогия със заредените токове от диаграмата на фиг. 37

$$(19.11) \quad \mathcal{L}_F^{NC} = (-i) \frac{1}{2} \left(\frac{i\bar{g}}{2} \right)^2 \bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_\mu \frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{q^2 - M_Z^2} \bar{e} \gamma^\beta (g_V^e - g_A^e \gamma^5) e.$$

При малки предадени импулси в сравнение с масата на Z бозона получаваме, че ефективната константа на неутралните токове (16.1)

съвпада с ефективната константа на разпада на мюона G_μ

$$(19.11) \quad \frac{G_\mu^{NC}}{\sqrt{2}} = \frac{\bar{g}^2}{8M_Z^2} \rightarrow \rho = \frac{G_\mu^{NC}}{G_\mu} = 1.$$

Последното равенство е много важно и затова се въвежда специален параметър ρ , който в приближение на Борн (Max Born, 1882 – 1970) е единица. Използвайки съотношенията (19.9), (19.10), (17.25) и (17.27) ние можем да предскажем масите на W^\pm и Z бозоните

$$(19.12) \quad M_W = \frac{g\nu}{2} \stackrel{g = \frac{e}{\sin\theta_W}}{=} \sqrt{\frac{\pi\alpha}{\sin^2\theta_W}} \cdot \nu \stackrel{\alpha^{-1} \approx 137}{\approx} \frac{37.28 \text{ GeV}}{\sqrt{\sin^2\theta_W}} \approx 77 \text{ GeV},$$

$$M_Z = \frac{M_W}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_W}} \approx \frac{74.56 \text{ GeV}}{\sin 2\theta_W} \approx 88 \text{ GeV},$$

които са много близки до техните експериментални стойности (1.4)¹⁹. Ние не можем да предскажем масата на бозона на Хигс от формулата (18.10) без да знаем константата на взаимодействие между скаларните полета λ . Обаче, знаейки експерименталното значение на масата на Хигс бозона (1.5), ние можем да оценим константата на тяхното самодействие λ в лагранжиана (19.3)

$$(19.13) \quad \lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{m_h}{\nu} \right)^2 \approx 0.129.$$

Масите на фермионите се придобиват пак използвайки вакуумното средно на полето на Хигс (19.7). Например, за заредените лептони масата се получава от $SU(2)_L \times U(1)_Y$ инвариантния лагранжиан

$$(19.14) \quad \mathcal{L}_F^\ell = g_\ell \bar{L} H \ell_R + g_\ell \bar{\ell}_R H^\dagger L \Rightarrow \frac{g_\ell}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \bar{\ell}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ h + \nu \end{pmatrix} \ell_R + h.c. = g_\ell \frac{h + \nu}{\sqrt{2}} \bar{\ell}$$

$$= m_\ell \bar{\ell} \ell + \frac{m_\ell}{\nu} h \cdot \bar{\ell} \ell.$$

Аналогично се получават и масите на кварките. По този начин ние получаваме обединено описание на слабите и електромагнитните взаимодействия с много теоретични предсказания. Това описание се нарича стандартен модел на Глашоу – Вайнберг – Салам (Mohammad Abdus Salam, 1926 – 1996).

¹⁹ Разликата се дължи на квантови поправки.

20. Свойства на заредените векторни бозони

В тази глава ще изучим свойствата на W^\pm бозоните свързани с техните разпади и тяхното раждане. Така от диаграмата на фиг. 36б получаваме матричния елемент на разпада на W^- бозона $W^- \rightarrow \ell^- + \bar{\nu}_\ell$

$$(20.1) \quad \mathcal{M} = \frac{g}{2\sqrt{2}} \varepsilon_\alpha^\lambda(p) \cdot \bar{u}_\ell(k) \gamma^\alpha (1-\gamma^5) v_\nu(q), \quad \mathcal{M}^\dagger = \frac{g}{2\sqrt{2}} \varepsilon_\beta^{*\lambda}(p) \cdot \bar{v}_\nu(q) \gamma^\beta (1-\gamma^5) u_\ell(k),$$

където асоциираните импулси са като в (9.14) при разпада на пиона

$$(20.2) \quad p = (M_W, \mathbf{0}), \quad k = (E, \mathbf{k}), \quad q = (q^0, \mathbf{q}).$$

За да пресметнем квадрата на абсолютната стойност на матричния елемент (20.1) трябва да сумираме по всички киралности. Единственото ново тук е, че освен сумиране по киралностите на фермионите, трябва да сумираме по киралностите на масивния бозон

$$(20.3) \quad \sum_{\lambda=1,2,3} \varepsilon_\alpha^\lambda(p) \varepsilon_\beta^{*\lambda}(p) = -\eta_{\alpha\beta} + \frac{P_\alpha P_\beta}{M_W^2},$$

където дясната част на равенството е всъщност числител на функцията на Грийн в (17.4),

$$(20.4) \quad \begin{aligned} \sum_{\lambda,\chi} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g^2}{8} \left(-\eta_{\alpha\beta} + \frac{P_\alpha P_\beta}{M_W^2} \right) \text{Tr} \left[\hat{k} \gamma^\alpha (1-\gamma^5) \hat{q} \gamma^\beta (1-\gamma^5) \right] \\ &= g^2 \left(-\eta_{\alpha\beta} + \frac{P_\alpha P_\beta}{M_W^2} \right) L^{\alpha\beta}(k, q) = g^2 M_W^2, \end{aligned}$$

където ние сме пренебрегнали масите на лептоните в сравнение с масите на W^\pm бозоните. Тогава парциалната вероятност на разпада на фермионната двойка е

$$(20.5) \quad \Gamma = \frac{\overline{\sum |\mathcal{M}|^2}}{2M_W} \Phi_2, \quad \Phi_2 = (2\pi)^4 \int \delta^{(4)}(p-k-q) \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E} \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2q_0},$$

където $\overline{\sum |\mathcal{M}|^2}$ в съответствие с (8.14) е

$$(20.6) \quad \overline{\sum |\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{3} \sum |\mathcal{M}|^2,$$

а Φ_2 (9.16) за двучастичния разпад при $m_\ell^2 \ll M_W^2$ има вида

$$(20.7) \quad \Phi_2 \approx \frac{1}{8\pi}.$$

Използвайки предишните формули за вероятност на разпада на заредения векторен бозон на лептонната двойка получаваме

$$(20.8) \quad \begin{aligned} \Gamma_W^\ell &\equiv \Gamma(W^- \rightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell) \\ &= \Gamma(W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e) = \Gamma(W^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu) = \Gamma(W^- \rightarrow \tau^- \bar{\nu}_\tau) = \frac{g^2 M_W}{48\pi} = \frac{G_\mu M_W^3}{6\pi\sqrt{2}} \approx 227.2 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Сега ние трябва да обобщим лагранжиана (17.15) за случай на взаимодействие с кварки

$$(20.9) \quad \mathcal{L}_q^{\text{CC}} = \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_{c=1,2,3}^{\text{color}} \sum_{i,j=1,2,3}^{\text{family}} \left[\bar{u}_i^c \gamma^\alpha (1-\gamma^5) V_{u,d_j} d_j^c \cdot W_\alpha^+ + \bar{d}_i^c \gamma^\alpha (1-\gamma^5) V_{u,d_j}^* u_j^c \cdot W_\alpha^- \right].$$

Този лагранжиан описва разпадите

$$(20.10) \quad \Gamma(W^- \rightarrow d^- \bar{u}) = 3|V_{ud}|^2 \Gamma_W^\ell, \quad \Gamma(W^- \rightarrow s^- \bar{u}) = 3|V_{us}|^2 \Gamma_W^\ell, \quad \Gamma(W^- \rightarrow b^- \bar{u}) = 3|V_{ub}|^2 \Gamma_W^\ell,$$

и

$$(20.11) \quad \Gamma(W^- \rightarrow d^- \bar{c}) = 3|V_{cd}|^2 \Gamma_W^\ell, \quad \Gamma(W^- \rightarrow s^- \bar{c}) = 3|V_{cs}|^2 \Gamma_W^\ell, \quad \Gamma(W^- \rightarrow b^- \bar{c}) = 3|V_{cb}|^2 \Gamma_W^\ell,$$

където факторът 3 е от сумирането по цвят. Разпадът в t кварк е забранен защото неговата маса е по-голяма от тази на W бозона. Използвайки свойствата на унитарната матрица за смесване V_{CKM} (13.7)

$$(20.12) \quad \begin{aligned} |V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 &= 1, \\ |V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2 + |V_{cb}|^2 &= 1, \end{aligned}$$

получаваме, че парциалната вероятност на разпада на W бозона в кварки е

$$(20.13) \quad \Gamma_W^q \stackrel{d'=V_{ud}d+V_{us}s+V_{ub}b}{s'=V_{cd}d+V_{cs}s+V_{cb}b} = \Gamma(W^- \rightarrow d'^- \bar{u}) + \Gamma(W^- \rightarrow s'^- \bar{c}) = 2 \cdot 3 \Gamma_W^\ell.$$

От тук пълната вероятност на разпада можем да оценим като

$$(20.14) \quad \Gamma_W = (3 + 2 \cdot 3) \cdot \Gamma_W^\ell \approx 2.05 \text{ GeV},$$

което се намира в добро съгласие с експерименталното значение $\Gamma_W^{\text{exp}} = 2.085 \pm 0.042 \text{ GeV}$.

Нека сега да обсъдим раждането и детектирането на заредени векторни бозони на адронен колайдер, с което можем да потвърдим тяхното съществуване. Изборът на адронен колайдер (на срещни снопове: c.m.), а не ускорител (фиксирана мишена: lab.), беше направено от Рубиа специално за да осигури максимална ефективна енергия M

$$(20.15) \quad k_{\bar{p}} + k'_p = Q: \begin{cases} \text{c.m.} & k_{\bar{p}} = (E, \vec{k}), k'_p = (E, -\vec{k}) \rightarrow M = \sqrt{Q^2} = 2E \\ \text{lab.} & k_{\bar{p}} = (E, \vec{k}), k'_p = (m_p, \vec{0}) \rightarrow M = \sqrt{Q^2} \approx \sqrt{2m_p E} \end{cases}$$

за раждане на нови масивни частици в резултат от сблъскване на антипротони и протони при високи енергии. Но всичко си има своя цена и за да се осигури голям брой на събитията на адронния колайдер, така наречената светимост, трябва да има много интензивни снопове. Разбира се, че в резултат от сблъскване на адрони, освен W бозона, ще се раждат много други частици, които не ни интересуват и ние ще ги обозначим с X като в дълбоко нееластичното разсейване $\bar{p} + p \rightarrow W + X$.

Например за раждане на W^- , сечението на адронния процес $\sigma(\bar{p} + p \rightarrow W^- + X)$ може да се изрази чрез сечението $\tilde{\sigma}(\bar{u}_i + d_j \rightarrow W^-)$ на партонния процес $\bar{u}_i(k) + d_j(k') \rightarrow W^-(q)$

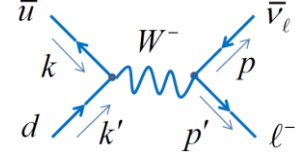
$$(20.16) \quad \sigma(p + \bar{p} \rightarrow W^- + X) = \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 f_{u_i}(x_1, q^2) f_{d_j}(x_2, q^2) \times \tilde{\sigma}(\bar{u}_i + d_j \rightarrow W^-),$$

където параметрите x_1 и x_2 са части от импулси, които носят един от горните антикварки \bar{u}_i : $k = x_1 k_{\bar{p}}$ и един от долните кварки d_j : $k' = x_2 k'_p$ в антипротона и протона (15.2), а $f_{u_i}(x_1, q^2)$ и $f_{d_j}(x_2, q^2)$ са техните структурни функции, съответно. За да детектираме раждане на заредени векторни бозони на адронен колайдер ние трябва да изберем специални канали на техните разпади за да сме сигурни, че можем да отличим тази сигнатура от множеството други частици X . Това са процесите на разпад в лептонните двойки $W^- \rightarrow \ell^- + \bar{\nu}_\ell$ ($\ell = e, \mu$), които носят името на Дрел (Sidney David Drell, 1926 – 2016) и Ян (Tung-Mow Yan, 1937). В дадения случай сигнатурата на събитието изглежда по следния начин. Освен други частици има един високо енергичен зареден лептон с голям напречен импулс и няма детектирани частици със сумарен импулс в обратна посока

на заредения лептон, което се изисква от закона за запазване на импулса. Подразбира се, че този импулс се отнася от недетектираното неутрино.

Матричният елемент за процеса на раждане и детектиране на W^- : $\bar{u} + d \rightarrow W^- \rightarrow \ell^- + \bar{\nu}_\ell$ може да се напише по диаграмата изобразена на фиг. 42

$$(20.17) \quad \mathcal{M} = (-i) \left(\frac{ig}{2\sqrt{2}} \right)^2 V_{ud} \bar{v}_{u_c}(k) \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) u_{d_c}(k') \times \frac{(-i) (\eta^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta / M_W^2)}{q^2 - M_W^2 + iM_W \Gamma_W} \bar{u}_\ell(p') \gamma_\beta (1 - \gamma^5) v_\nu(p).$$



Фиг. 42

В знаменателя на функцията на Грийн на векторния бозон в (20.17) се отчита неговата нестабилност относно пълната вероятност на разпада (20.14) според формулата на Брейт (Gregory Breit, Григорий Альфредович Брейт-Шнайдер, 1899 – 2081) и Вигнер (Eugene Paul Wigner, 1902 – 1995). Членът пропорционален на предадения импулс q в числителя на функцията на Грийн на векторния бозон в (20.17) води до пренебрежим принос в матричният елемент относно масата на заредения бозон (1.4)

$$(20.18) \quad q^\alpha \bar{v}_u(k) \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) u_d(k') = \bar{v}_u(k) (\hat{k} + \hat{k}') (1 - \gamma^5) u_d(k') \\ = m_u \bar{v}_u(k) (1 - \gamma^5) u_d(k') + m_d \bar{v}_u(k) (1 + \gamma^5) u_d(k'), \\ q^\beta \bar{u}_\ell(p') \gamma_\beta (1 - \gamma^5) v_\nu(p) = \bar{u}_\ell(p') (\hat{p} + \hat{p}') (1 - \gamma^5) v_\nu(p) = m_\ell \bar{u}_\ell(p') (1 - \gamma^5) v_\nu(p).$$

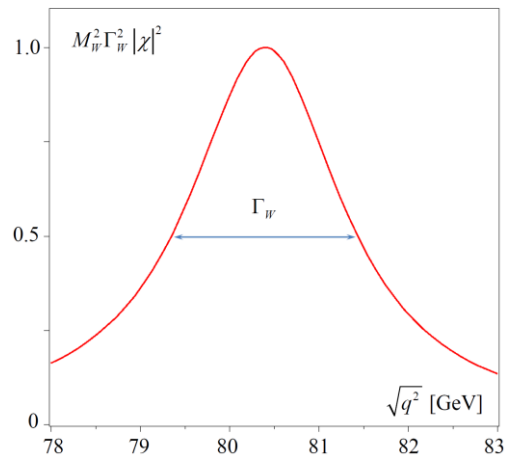
Сумирайки по цвета на кварките и по киралностите на всички фермиони получаваме

$$(20.19) \quad \sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{3g^4 |V_{ud}|^2}{64} \text{Tr} [\hat{k} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \hat{k}' \gamma_\beta (1 - \gamma^5)] \cdot |\chi|^2 \cdot \text{Tr} [\hat{p}' \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \hat{p} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \\ = 3g^4 |V_{ud}|^2 [L_{\alpha\beta}(k, k') - i\varepsilon_{\alpha\beta kk'}] \cdot [L^{\alpha\beta}(p, p') + i\varepsilon^{\alpha\beta pp'}] \cdot |\chi|^2 = 12g^4 |V_{ud}|^2 (kp')(k'p) \cdot |\chi|^2,$$

където с χ е обозначена реципрочната стойност на знаменателя на функцията на Грийн на векторния бозон в (20.17)

$$(20.20) \quad \chi = \frac{1}{q^2 - M_W^2 + iM_W \Gamma_W}.$$

На фиг. 43 е представено резонансното разпределение на W бозона $M_W^2 \Gamma_W^2 |\chi|^2$ в зависимост от $\sqrt{q^2}$. Ширината на резонансния пик на половината от неговата височина $\sqrt{q_+^2} - \sqrt{q_-^2} = \sqrt{M_W^2 + M_W \Gamma_W} - \sqrt{M_W^2 - M_W \Gamma_W} \approx \Gamma_W$ при $M_W \gg \Gamma_W$ е приблизително равна на пълната вероятност на разпада.



Фиг. 43

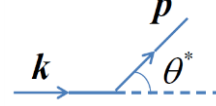
При пресмятането на сечението на този процес трябва да отчетем усредняването не само по киралностите на началните кварки, а и по техния цвят

$$(20.21) \quad d\tilde{\sigma} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{\sum |\mathcal{M}|^2}{4|kk'|} d\Phi, \quad d\Phi = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + p - q) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'_0}.$$

При високи енергии на сблъскващите се адрони $E \gg m_q, m_\ell$ в системата на центъра на масите

$$(20.22) \quad \begin{aligned} k &= (k_0, \mathbf{k}) = (E, \mathbf{k}), & p &= (p_0, \mathbf{p}) = (E, \mathbf{p}), \\ k' &= (k'_0, \mathbf{k}') = (E, -\mathbf{k}), & p' &= (p'_0, \mathbf{p}') = (E, -\mathbf{p}). \end{aligned}$$

можем да считаме фермионите за безмасови частици $E \approx |\mathbf{k}| \approx |\mathbf{p}|$.



Фиг. 44

Ъгълът на разсейване θ^* в тази система е определен на фиг. 44.

Фазовият обем в (20.21) можем да изчислим като в (16.6)

$$(20.23) \quad \begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3 \mathbf{p}}{2p_0} \int \delta^{(4)}(p' + p - q) \theta(p'_0) \delta(p'^2 - m_\ell^2) d^4 p' = \frac{\delta(q^2 - 2qp) d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^2 2p_0} \\ &\stackrel{\text{c.m.}}{=} \frac{\delta(4k_0^2 - 4k_0 p_0) p_0 dp_0 d \cos \theta^*}{4\pi} = \frac{d \cos \theta^*}{16\pi}, \quad k_0 = p_0 = E. \end{aligned}$$

Тогава от диференциалното сечение (20.21) получаваме пълното сечение

$$(20.24) \quad \begin{aligned} \tilde{\sigma}_W^{q^2=4E^2} &= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \frac{3}{128\pi} \cdot \frac{g^4 |V_{ud}|^2 q^2}{(q^2 - M_W^2)^2 + M_W^2 \Gamma_W^2} \int_{-1}^1 (1 + \cos \theta^*)^2 d \cos \theta^* \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \frac{1}{16\pi} \cdot \frac{g^4 |V_{ud}|^2 q^2}{(q^2 - M_W^2)^2 + M_W^2 \Gamma_W^2} \stackrel{\Gamma_W \ll M_W}{=} \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \frac{g^4 |V_{ud}|^2 M_W}{16\Gamma_W} \delta(q^2 - M_W^2), \end{aligned}$$

където в последното равенство ние използвахме приближението за нулева ширина на разпада. Пълното сечение (20.24) ние можем да запишем използвайки (20.8) и (20.10) само чрез наблюдаемите стойности

$$(20.25) \quad \begin{aligned} \tilde{\sigma}_W &= \frac{\sqrt{2J+1}}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{4\pi}{M_W^2} \frac{4M_W^2 \Gamma_W^i \Gamma_W^\ell}{(q^2 - M_W^2)^2 + M_W^2 \Gamma_W^2} \stackrel{\Gamma_W \ll M_W}{=} \frac{4\pi^2}{3} \frac{\Gamma_W^i \Gamma_W^\ell}{M_W \Gamma_W} \delta(q^2 - M_W^2) \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi G_\mu M_W^2}{27} \delta(q^2 - M_W^2), \end{aligned}$$

където J е спина на междинния бозон, а Γ_W^i и Γ_W^ℓ са неговите ширини на разпад в начално и крайно състояние.

Сечението на процеса $\bar{p} + p \rightarrow W^- + X \rightarrow \ell^- + \bar{\nu}_\ell + X$ можем да изчислим използвайки формулите (20.16) и (20.25)

$$(20.26) \quad \sigma(p + \bar{p} \rightarrow W^- \rightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell) = \frac{\sqrt{2}\pi G_\mu}{27} \int \delta(x_1 x_2 - \tau) \left[x_1 f_u(x_1, M_W^2) dx_1 \right] \left[x_2 f_d(x_2, M_W^2) dx_2 \right],$$

където ние сме отчели, че за безмасови кварки-партони $q^2 = x_1 x_2 Q^2$, и сме въвели променливата $\tau = M_W^2 / Q^2$. От (15.29) знаем само интегралните стойности U и D , но не интеграла в (20.26). Затова се въвежда коефициента

$$(20.27) \quad \begin{aligned} K &= \frac{1}{UD} \int \delta(x_1 x_2 - \tau) \left[x_1 f_u(x_1, M_W^2) dx_1 \right] \left[x_2 f_d(x_2, M_W^2) dx_2 \right] \\ &= \frac{\tau = x_1 x_2}{\xi = x_1 - x_2} \frac{1}{UD} \int_{-1+\tau}^{1-\tau} \frac{x_1 f_u(x_1, M_W^2) x_2 f_d(x_2, M_W^2)}{\sqrt{\xi^2 + 4\tau}} d\xi, \end{aligned}$$

и пълното сечение се изчислява като

$$(20.28) \quad \sigma(p + \bar{p} \rightarrow W^- \rightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell) = K \times \frac{\sqrt{2}\pi G_\mu}{27} UD \approx K \times 33 \text{ pb.}$$

От (20.27) е ясно, че малките τ увеличават коефициента K и пълното сечение (20.28). Например, за енергия от 540 GeV на Super Proton Synchrotron (SPS) $p\bar{p}$ колайдера в CERN за $\tau = M_W^2 / (540 \text{ GeV})^2 \approx 0.022$ получаваме $K \approx 6$. На този колайдер с пикова $L_{\text{peak}} \approx 5 \times 10^{28} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ и $\int L dt \approx 20 \text{ nb}^{-1}$ интегрална светимост през 1982 г. бяха открити W бозоните. За пълното сечение

$$(20.29) \quad \sigma_{\text{SPS}}(p + \bar{p} \rightarrow W^\pm \rightarrow e^\pm \nu_e) \approx 400 \text{ pb} = 4 \times 10^{-34} \text{ cm}^2$$

колаборациите UA1 и UA2 са наблюдавали 6 и 4 събития на разпад на W бозони, съответно.

21. Свойства на неутралните векторни бозони

От диаграмата на фиг. 38 получаваме матричния елемент за разпада на неутралния Z бозон в произволни фермион-антифермионни двойки, описващи се със спинорните полета ψ и $\bar{\psi}$

$$(21.1) \quad \mathcal{M} = \frac{\bar{g}}{2} \varepsilon_\alpha^\lambda(q) \cdot \bar{u}_\psi(p) \gamma^\alpha (g_V - g_A \gamma^5) u_\psi(p'), \quad \mathcal{M}^\dagger = \frac{\bar{g}}{2} \varepsilon_\beta^{*\lambda}(q) \cdot \bar{v}_\psi(p') \gamma^\beta (g_V - g_A \gamma^5) u_\psi(p)$$

където параметрите g_V и g_A са дадени в (17.30), а $\varepsilon_\alpha^\lambda(q)$ е поляризационния вектор на неутралния масивен векторен бозон. Квадратът на абсолютната стойност на матричния елемент ще пресметнем в приближение $m_\psi \ll M_Z$ сумирайки по киралностите на всички частици

$$(21.2) \quad \begin{aligned} \sum |\mathcal{M}_\psi|^2 &= \frac{\bar{g}^2}{4} \left(-\eta_{\alpha\beta} + \frac{q_\alpha q_\beta}{M^2} \right) \text{Tr} \left[\hat{p} \gamma^\alpha (g_V - g_A \gamma^5) \hat{p}' \gamma^\beta (g_V - g_A \gamma^5) \right] \\ &= \bar{g}^2 (g_V^2 + g_A^2) \left(-\eta_{\alpha\beta} + \frac{q_\alpha q_\beta}{M^2} \right) L^{\alpha\beta}(p, p') = \bar{g}^2 (g_V^2 + g_A^2) M^2. \end{aligned}$$

Парциалната вероятност на разпада е

$$(21.3) \quad \Gamma(Z \rightarrow \psi \bar{\psi}) = \frac{1}{3} \frac{\sum |\mathcal{M}_\psi|^2}{2M_\psi \cdot 8\pi},$$

където факторът $1/3$ отговаря на усредняване по спина на векторния бозон, а фазовият обем се взема от формулата (20.7). Тогава за разпада в неутрино получаваме

$$(21.4) \quad \Gamma_Z^{\nu_\ell} = \Gamma_Z^{e} = \Gamma_Z^{\mu} = \Gamma_Z^{\tau} = \Gamma_Z^{\nu_\tau} = \frac{\bar{g}^2 M_Z}{96\pi} = \frac{G_\mu M_Z^3}{12\sqrt{2}\pi} \approx 166 \text{ MeV.}$$

Вероятността на разпада в заредени лептони е

$$(21.5) \quad \Gamma_Z^\ell = \Gamma_Z^e = \Gamma_Z^\mu = \Gamma_Z^\tau = 2 \left[(g_\ell^\ell)^2 + (g_A^\ell)^2 \right] \Gamma_Z^{\nu_\ell} = 2 \left[\left(-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \Gamma_Z^{\nu_\ell} \approx 83.3 \text{ MeV,}$$

което се намира в добро съгласие с експеримента²⁰

²⁰ От тук нататък ние ще сравняваме само стойности в приближение на Борн без радиационни поправки.

$$(21.6) \quad \Gamma_Z^{\text{exp}} = 83.91 \pm 0.12 \text{ MeV.}$$

За разпада в долни кварки получаваме следната вероятност

$$(21.7) \quad \Gamma_Z^d = \Gamma_Z^s = \Gamma_Z^b = 2 \left[(g_V^d)^2 + (g_A^d)^2 \right] \Gamma_Z^{\nu_\ell} = 3 \cdot 2 \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \Gamma_Z^{\nu_\ell} \approx \frac{13}{6} \Gamma_Z^{\nu_\ell}.$$

Разпадът в горни кварки е възможен само за u и c кварките, защото масата на t кварка е по-голяма от масата на Z бозона

$$(21.8) \quad \Gamma_Z^u = \Gamma_Z^c = 2 \left[(g_V^u)^2 + (g_A^u)^2 \right] \Gamma_Z^{\nu_\ell} = 3 \cdot 2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \Gamma_Z^{\nu_\ell} \approx \frac{5}{3} \Gamma_Z^{\nu_\ell}, m_t > M_Z : \Gamma_Z^t = 0.$$

По този начин вероятността на разпада в адрони е

$$(21.9) \quad \Gamma_Z^{\text{had}} \approx \left(2 \cdot \frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{13}{6} \right) \cdot \Gamma_Z^{\nu_\ell} = \frac{59}{6} \cdot \Gamma_Z^{\nu_\ell},$$

а неговото отношение към лептонната вероятност на разпад

$$(21.10) \quad R_h = \frac{\Gamma_Z^{\text{had}}}{\Gamma_Z^{\ell}} \approx 19.7$$

може да се сравни с експерименталното ѝ значение

$$(21.11) \quad R_h^{\text{exp}} = 20.804 \pm 0.050.$$

В крайна сметка теоретичната пълна вероятност на разпада на Z бозона

$$(21.12) \quad \Gamma_Z^{\text{tot}} \approx \frac{43}{3} \cdot \Gamma_Z^{\nu_\ell} \approx 2.4 \text{ GeV}$$

се намира в добро съгласие с нейната експериментална стойност

$$(21.13) \quad \Gamma_Z^{\text{exp}} = 2.4952 \pm 0.0023 \text{ GeV}.$$

Знаейки пълната вероятност на разпада на Z бозона ние можем да определим невидимата му част свързана с разпада в неутрино (21.4), които се използват недетектирани (фиг. 45)²¹

$$(21.14) \quad \Gamma_Z^{\text{tot}} = \Gamma_Z^{\text{inv}} + 3\Gamma_Z^{\ell} + \Gamma_Z^{\text{had}}$$

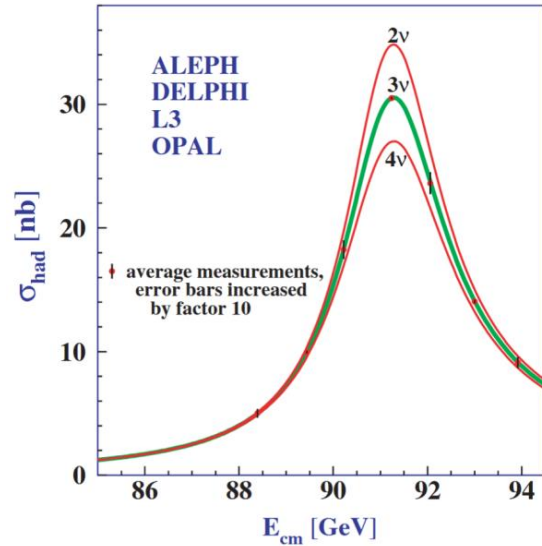
$$\left. \frac{\Gamma_Z^{\text{inv}}}{\Gamma_Z^{\ell}} \right|_{\text{exp}} \approx \frac{1}{0.0337} - 3 - 20.804$$

$$\approx 5.9 \approx 3 \left. \frac{\Gamma_Z^{\nu_\ell}}{\Gamma_Z^{\ell}} \right|_{SM} \rightarrow N_\nu = 3.$$

Последната експериментална стойност за броя на типове неутрино е

$$(21.15) \quad N_\nu^{\text{exp}} = 2.9963 \pm 0.0074.$$

Раждането и детектирането на неутрални калибровъчни бозони най-прецизно може да се осъществи на лептонни колайдери. Сечението на процеса можем да намерим по формула (20.25)



Фиг. 45

²¹ Тази фигура е от статия ALEPH, DELPHI, L3, OPAL, SLD Collaborations, LEP Electroweak Working Group and SLD Electroweak and Heavy Flavour Groups, Phys. Rep. **427** (2006) 257.

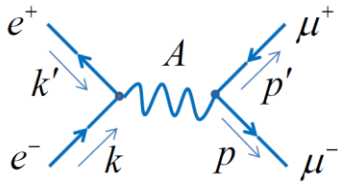
$$(21.16) \quad \sigma_Z = \frac{\sqrt{2S+1}}{2 \cdot 2} \frac{4\pi}{M_Z^2} \frac{4M_Z^2 \Gamma_Z^\ell \Gamma_Z}{(q^2 - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2},$$

която в резонанс има стойност

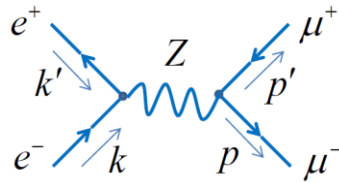
$$(21.17) \quad \Rightarrow \frac{q^2=M_Z^2}{M_Z^2} \frac{12\pi}{\Gamma_Z} \frac{\Gamma_Z^\ell}{\Gamma_Z} \approx 6 \times 10^{-32} \text{ cm}^2.$$

През 1989 г. в CERN заработи Large Electron – Positron (LEP) collider с пикова светимост $L_{\text{peak}} \sim 10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, което означава производство на 6 Z бозона в секунда. Затова LEP се нарича фабрика на Z бозони.

Нека разгледаме процеса на интерференция между фотон и Z бозон в реакцията $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ (фиг. 46), която води до P нечетни ефекти.



Фиг. 46а



Фиг. 46б

При високи енергии на сблъскващите се лептони $E \gg m_e, m_\mu$ в системата на центъра на масите

$$(21.18) \quad k = (E, \mathbf{k}), \quad p = (E, \mathbf{p}), \\ k' = (E, -\mathbf{k}), \quad p' = (E, -\mathbf{p}).$$

можем да смятаме фермионите за безмасови частици $E \approx |\mathbf{k}| \approx |\mathbf{p}|$.

Матричният елемент на процеса от сумата на двете диаграми на фиг. 46 е

$$(21.19) \quad \mathcal{M} = (-i)(-ie)^2 \bar{v}_e(k') \gamma_\alpha u_e(k) \frac{(-i)}{q^2} \bar{u}_\mu(p) \gamma^\alpha v_\mu(p') \\ + (-i) \left(\frac{i\bar{g}}{2} \right)^2 \bar{v}_e(k') \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma^5) u_e(k) \frac{(-i)}{q^2 - M_Z^2 + iM_Z \Gamma_Z} \bar{u}_\mu(p) \gamma^\alpha (g_V - g_A \gamma^5) v_\mu(p') \\ = \frac{e^2}{q^2} \left[\bar{v}_e(k') \gamma_\alpha u_e(k) \cdot \bar{u}_\mu(p) \gamma^\alpha v_\mu(p') + \chi \cdot \bar{v}_e(k') \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma^5) u_e(k) \cdot \bar{u}_\mu(p) \gamma^\alpha (g_V - g_A \gamma^5) v_\mu(p') \right],$$

където ние въведохме резонансната функция

$$(21.20) \quad \chi = \frac{1}{\sin^2 2\theta_w} \frac{q^2}{q^2 - M_Z^2 + iM_Z \Gamma_Z}.$$

Тогава квадратът на абсолютното значение на матричния елемент, след усредняване по киралностите на началните частици и сумиране по киралностите на междинните и крайните частици, ще има вида

$$\begin{aligned}
(21.21) \quad \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{q^4} \left\{ \text{Tr} \left[\hat{k}' \gamma_\alpha \hat{k} \gamma_\beta \right] \text{Tr} \left[\hat{p} \gamma^\alpha \hat{p}' \gamma^\beta \right] + \right. \\
&\quad + \chi \cdot \text{Tr} \left[\hat{k} \gamma_\beta \hat{k}' \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma^5) \right] \text{Tr} \left[\hat{p}' \gamma^\beta \hat{p} \gamma^\alpha (g_V - g_A \gamma^5) \right] + \\
&\quad + \chi^* \cdot \text{Tr} \left[\hat{k}' \gamma_\alpha \hat{k} \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma^5) \right] \text{Tr} \left[\hat{p} \gamma^\alpha \hat{p}' \gamma^\beta (g_V - g_A \gamma^5) \right] + \\
&\quad \left. + |\chi|^2 \cdot \text{Tr} \left[\hat{k}' \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma^5) \hat{k} \gamma_\beta (g_V - g_A \gamma^5) \right] \text{Tr} \left[\hat{p} \gamma^\alpha (g_V - g_A \gamma^5) \hat{p}' \gamma^\beta (g_V - g_A \gamma^5) \right] \right\} \\
&= \frac{4e^4}{q^4} \left\{ L_{\alpha\beta}(k, k') L^{\alpha\beta}(p, p') + 2 \text{Re} \chi \left[g_V L_{\alpha\beta}(k, k') + i g_A \varepsilon_{\alpha\beta k k'} \right] \left[g_V L^{\alpha\beta}(p, p') - i g_A \varepsilon^{\alpha\beta p p'} \right] \right. \\
&\quad \left. + |\chi|^2 \left[(g_V^2 + g_A^2) L_{\alpha\beta}(k, k') + 2 i g_V g_A \varepsilon_{\alpha\beta k k'} \right] \left[(g_V^2 + g_A^2) L^{\alpha\beta}(p, p') - 2 i g_V g_A \varepsilon^{\alpha\beta p p'} \right] \right\} \\
&\stackrel{q^2=4E^2}{=} \frac{e^4}{2E^4} \left\{ [(kp)(k'p') + (kp')(k'p)] \right. \\
&\quad + 2 \text{Re} \chi \left(g_V^2 [(kp)(k'p') + (kp')(k'p)] - g_A^2 [(kp)(k'p') - (kp')(k'p)] \right) \\
&\quad \left. + |\chi|^2 \left[(g_V^2 + g_A^2)^2 [(kp)(k'p') + (kp')(k'p)] - 4 g_V^2 g_A^2 [(kp)(k'p') - (kp')(k'p)] \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Скаларните произведения в (21.21) могат да бъдат пресметнати

$$\begin{aligned}
(21.22) \quad (kp) &= (k'p') = E^2(1 - \cos \theta^*), \quad (kp') = (k'p) = E^2(1 + \cos \theta^*); \\
(kp)(k'p') &+ (kp')(k'p) = 2E^4(1 + \cos^2 \theta^*), \quad (kp')(k'p) - (kp)(k'p') = 4E^4 \cos \theta^*,
\end{aligned}$$

където ъгълът на разсейване θ^* в системата на центъра на масите е определен на фиг. 44. Така получаваме окончателния вид на квадрата на абсолютното значение на матричния елемент (21.21)

$$\begin{aligned}
(21.23) \quad \overline{|\mathcal{M}|^2} &= e^4 \left\{ (1 + \cos^2 \theta^*) + 2 \text{Re} \chi \left[g_V^2 (1 + \cos^2 \theta^*) + 2 g_A^2 \cos \theta^* \right] \right. \\
&\quad \left. + |\chi|^2 \left[(g_V^2 + g_A^2)^2 (1 + \cos^2 \theta^*) + 8 g_V^2 g_A^2 \cos \theta^* \right] \right\},
\end{aligned}$$

където първият член във фигурните скобки отговаря на обмена с фотона (фиг. 46а), вторият отчита интерференцията между фотона и Z бозона, а последният – обмена със Z бозона (фиг. 46б).

Диференциалното сечение на процеса има вида

$$(21.24) \quad d\sigma = \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4|kk'|} d\Phi = \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{128\pi E^2} d \cos \theta^*,$$

където фазовият обем е пресметнат в (20.23). За да открием P нечетните ефекти нека да определим сеченията на процеса $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ напред

$$(21.25) \quad \sigma_F = \int_0^1 \frac{d\sigma}{d \cos \theta^*} d \cos \theta^* = \frac{\pi \alpha^2}{6E^2} \left\{ 1 + 2 \left[g_V^2 + \frac{3g_A^2}{4} \right] \text{Re} \chi + \left[(g_V^2 + g_A^2)^2 + 3g_V^2 g_A^2 \right] |\chi|^2 \right\},$$

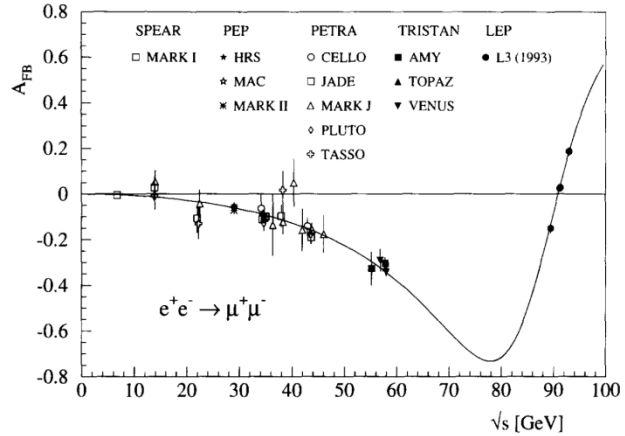
и назад

$$(21.26) \quad \sigma_B = \int_{-1}^0 \frac{d\sigma}{d \cos \theta^*} d \cos \theta^* = \frac{\pi \alpha^2}{6E^2} \left\{ 1 + 2 \left[g_V^2 - \frac{3g_A^2}{4} \right] \text{Re} \chi + \left[(g_V^2 + g_A^2)^2 - 3g_V^2 g_A^2 \right] |\chi|^2 \right\}.$$

Тогава можем да определим P нечетната асиметрия

$$(21.27) \quad A_{FB} = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B} = \frac{3}{2} \frac{g_A^2 \operatorname{Re}\chi + 2g_V^2 g_A^2 |\chi|^2}{1 + 2g_V^2 \operatorname{Re}\chi + (g_V^2 + g_A^2)^2 |\chi|^2},$$

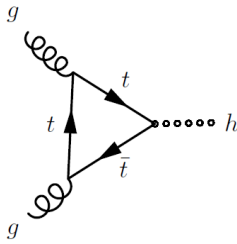
която е показана на фиг. 47²² в сравнение с експерименталните данни и в зависимост от лоренц инвариантната променлива на Манделщам (Stanley Mandelstam, 1928 – 2016) $s = q^2$. От сравнението с експерименталните данни получаваме, че $g_A^2 > g_V^2$, което окончателно избира решението (16.18) от двете възможни в (16.17).



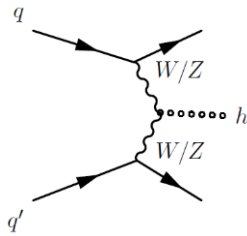
Фиг. 47

22. Свойства на бозона на Хигс

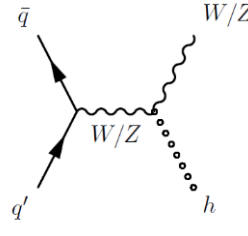
В тази последна глава ние ще разгледаме необичайните свойства на последната открита елементарна частица – бозона на Хигс. В съответствие с формула (19.14) тази частица взаимодейства с фермионите със сила пропорционална на тяхната маса m/v , където v е вакуумното средно (19.10). Например, най-голямата стойност има взаимодействието на бозона на Хигс с t кварка $m_t/v \approx 0.7 \approx 1/\sqrt{2}$. По този начин аниhilацията на $t\bar{t}$ двойки ражда бозона на Хигс (фиг. 48а), който е водещ процес за тяхното производство на Large Hadron Collider (LHC) в CERN.



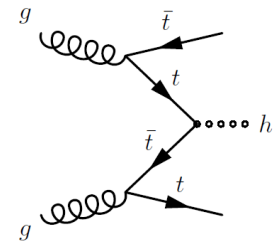
Фиг. 48а



Фиг. 48б



Фиг. 48в



Фиг. 48г

Както научихме в края на глава 15, половината от импулса на протона се носи от глюони, които и пораждат виртуални t кварки. Диаграмата на фиг. 40а дава възможност за раждане на бозона на Хигс при аниhilация на калибровъчни бозони (фиг. 48б) и излъчване на Хигс бозона (фиг. 48в) аналогично на спиращото излъчване на фотоните. Тези процеси имат по-малка вероятност в сравнение с глюон-глюонното сливане. Енергията на протонните снопове на LHC е достатъчна да се роди освен бозона на Хигс и двойка $t\bar{t}$ кварки (фиг. 48г). Обаче заради голямата им маса този процес е още по-малко вероятен от

²² Тази фигура е от статия Joachim Mnich, Phys. Rept. **271** (1996) 181.

предишните. До момента всички тези процеси за раждане на бозона на Хигс са детектирани на ЛНС и дават независима информация за неговите свойства.

Освен раждането на бозона на Хигс ние трябва да изучим процесите за неговото детектиране чрез продуктите на неговия разпад. Понеже масата на t кварка е по-голяма от масата на бозона на Хигс то неговият разпад в двойка $t\bar{t}$ кварки е забранен. Затова неговият разпад основно протича в двойка $b\bar{b}$ кварки, които имат втората по големина стойност на взаимодействие с бозона на Хигс. Нека да пресметнем вероятността на процеса на разпада на бозона на Хигс в произволна двойка фермиони, описващи се с полета ψ и $\bar{\psi}$. Разбира се, че масата на фермиона трябва да е по-малка от половината от масата на бозона на Хигс. Матричният елемент на този процес и неговият ермитово спрегнат имат много прост вид

$$(22.1) \quad \mathcal{M} = \frac{m_\psi}{v} \bar{u}(p) v(p'), \quad \mathcal{M}^\dagger = \frac{m_\psi}{v} \bar{v}(p') u(p).$$

Взимайки тяхното произведение и сумирайки по фермионните киралности получаваме

$$(22.2) \quad \sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{m_\psi^2}{v^2} \text{Tr}[(\hat{p} + m_\psi)(\hat{p}' - m_\psi)] = \frac{2m_\psi^2 m_h^2}{v^2} \left(1 - \frac{4m_\psi^2}{m_h^2}\right) \stackrel{(19,10)}{=} 2\sqrt{2}G_\mu m_\psi^2 m_h^2 \left(1 - \frac{4m_\psi^2}{m_h^2}\right),$$

където във второто равенство ние използвахме кинематичната връзка $2(pp') = m_h^2 - 2m_\psi^2$. Тогава вероятността за разпад се задава с формулата като в (9.15)

$$(22.3) \quad \Gamma_\psi = \frac{\sum |\mathcal{M}|^2}{2m_h} \Phi_2, \quad \Phi_2 = (2\pi)^4 \int \delta^{(4)}(q - p - p') \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'_0},$$

където q е импулса на бозона на Хигс. За двучастичния разпад, фазовият обем е константа, която може да бъде пресмятана, например, в системата на покой на Хигс бозона $q = (m_h, \mathbf{0})$

$$(22.4) \quad \begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{p_0} \delta^{(4)}(q - p - p') \theta(p'_0) \delta(p'^2 - m_\psi^2) d^4 p' \stackrel{d^3 \mathbf{p}=4\pi|p|p_0 dp_0}{=} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dp_0 \sqrt{p_0^2 - m_\psi^2} \delta(m_h^2 - 2m_h p_0) = \frac{1}{8\pi} \sqrt{1 - \frac{4m_\psi^2}{m_h^2}}. \end{aligned}$$

Така че окончателно получаваме

$$(22.5) \quad \Gamma_\psi = \frac{G_\mu m_\psi^2 m_h}{4\sqrt{2}\pi} \left(1 - \frac{4m_\psi^2}{m_h^2}\right)^{3/2}.$$

От тук следва, че основният принос във вероятността на разпада на бозона на Хигс е от b кварка

$$(22.6) \quad \Gamma_h^{\text{tot}} \approx \Gamma_b = 3 \cdot \Gamma_\psi \stackrel{m_b=4.2 \text{ GeV}}{\approx} 4.5 \text{ MeV},$$

където коефициентът **3** е от сумирането по цвят. Това е изключително малка стойност в сравнение с масата на бозона на Хигс и няма да може да бъде директно измерена на ЛНС поради недостатъчната разделителна способност по енергия. Приносът на c кварка във вероятността на разпада на бозона на Хигс съставлява около 10%. В настоящия момент силата на взаимодействие на различните фермиони с бозона на Хигс е експериментално измерена за заредените частици от третото поколение и мюона (фиг. 49)²³. На графиката

²³ Тази фигура е от статия на колаборацията CMS в JHEP **01** (2021) 148.

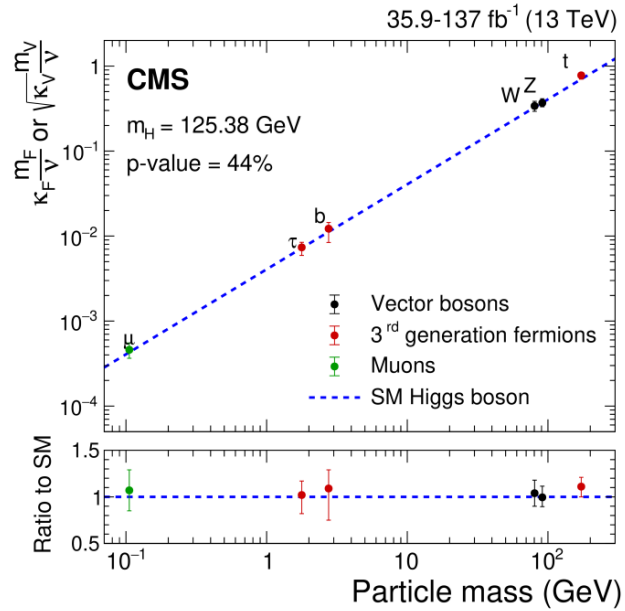
на фигурата ясно се вижда линейна зависимост на силата на взаимодействие на различните фермиони с бозона на Хигс.

Щом бозонът на Хигс има най-голямата вероятност на разпад в двойка $b\bar{b}$ кварки, то и сигнатурата на неговото раждане трябва да бъде две енергетични b струи. Обаче в процеса на раждане само на бозона на Хигс от сливането на двата глюона на фиг. 48а, който е най-вероятният процес, ние не можем да докажем, че двете енергетични b струи са точно от разпада на бозона на Хигс. Затова се използват други процеси като, например, на фиг. 48б, фиг. 48в или фиг. 48г. В първия случай двете енергетични b струи от разпада на бозона на Хигс са

асоциирани с двете струи от леки кварки, които трябва да бъдат кинематично свързани. Във втория случай раждането на Хигс е асоциирано с раждането на W или Z бозона. И най-накрая в последния най-малко вероятен процес раждането на Хигс е асоциирано с двойки $t\bar{t}$ кварки, които веднага се разпадат на b кварки и W бозони. Всичко това означава, че детектирането на бозона на Хигс чрез неговия разпад в двойка $b\bar{b}$ кварки не е най-чистия процес, т.е. има голям фон от други процеси, който понякога може да бъде подтиснат.

Най-чистият процес за детектиране на раждане на бозона на Хигс е неговият разпад в два Z бозона (фиг. 40а), който по кинематични съображения, обаче, е подтиснат. Действително, сумата на масите на два Z бозона е по-голяма от масата на бозона на Хигс и затова само един от Z бозоните се ражда като реална частица на масовата повърхност, а другият във виртуално състояние се разпада, например, на двойка заредени лептони като на фиг. 46б. Ако и реалния Z бозон се разпада на заредени лептони, то масата на бозона на Хигс еднозначно се възстановя от лептонните импулси и енергии. Това представлява накратко описанието на свойствата на бозона на Хигс, с което завършваме изложението на нашия курс.

Авторът благодари на Д.П. Кирилова за помощта при подготовката на учебника.



Фиг. 49