Лятна учителска школа 02-06.07.2018
Физика на микросвета

Измерване на времена на живот в ядрената физика

Георги Райновски

Софийски Университет
Св. Климент Охридски

Статистически модели

Процеси с два възможни изхода

Опит	Дефиниция на успех	Вероятност за успех при едно хвърляне
Хвърляне на монета	Лице	1/2
Хвърляне на зар	6 точки	1/6
Наблюдаване на дадено радиоактивно ядро за време t	Ядрото се разпада по време на наблюдението	$1-e^{-\lambda t}$

1. Биномно разпределение: най-универсалният модел за всички процеси с константна вероятност за единичен опит p. Труден е за пресмятане.

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x (1-p)^{n-x} \qquad \mu = np \qquad \sigma^2 = \mu(1-p)$$

2. Поасоново разпределение: опростяване на биномното разпределение при предположение, че вероятността за успех при един опит p е константна, $n \longrightarrow \infty$ като np остава константа.

$$P(x) = \frac{(pn)^x e^{-pn}}{x!} = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \qquad \mu = np \qquad \sigma^2 = \mu$$

Статистически модели

Процеси с два възможни изхода

1. **Биномно разпределение:** най-универсалният модел за всички процеси с константна вероятност при единичен опит p. Труден е за пресмятане.

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x (1-p)^{n-x} \qquad \mu = np \qquad \sigma^2 = \mu(1-p)$$

2. **Поасоново разпределение:** опростяване на биномното разпределение при предположение, че вероятността за успех при един опит p е константна, n⟶∞ като np остава константа.

$$P(x) = \frac{(pn)^x e^{-pn}}{x!} = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \qquad \mu = np \qquad \sigma^2 = \mu$$

3. **Нормално разпределение:** получава се от поасоновото когато средния брой на успешните изходи е голям. (Практически, когато е по-голям от 30)

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\mu}\right) \qquad P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Закон за радиоактивното разпадане

Ядрата се разпадат по статистически закон – може да се предсказва поведението на ансамбъл от ядра, но е невъзможно да се каже точно кога дадено ядро ще се разпадне!

1. Отделното радиоактивно ядро няма "памет" за миналото си (вероятността за разпад не зависи от възрастта);
2. Времената за разпадане на кои да е две ядра от даден изотоп имат еднакви вероятностни разпределения;

Разглеждаме дадено (ЕДНО) радиоактивно ядро в момента t=0 и търсим каква е вероятността P(t) ядрото да не се е разпаднало до момента t>0. Очевидно е че $\boxed{P(0)=1}$ и че P(t) е намаляваща функция.

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

P(A|B) – условна вероятност да се случи събитието A при положение, че се е случило B

Нека τ е някакво произволно време но такова, че τ>t. Нека A=P(τ) и B=P(t) $\Rightarrow$

$$P(\tau) = P(\tau \cap t) = P(\tau | t)P(t)$$

От (1) $\Rightarrow$ $P(\tau | t) = P(\tau - t)$ $\quad$ $P(\tau) = P(\tau - t)P(t)$ за всички $\tau > t > 0$

$$P(\tau) - P(t) = P(t)[P(\tau - t) - 1] \qquad \frac{P(\tau) - P(t)}{\tau - t} = \frac{P(t)[P(\tau - t) - P(0)]}{(\tau - t) - 0}$$

Когато $\tau \longrightarrow$ t $\quad$ (τ-t $\longrightarrow$0)

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)\frac{dP(t)}{dt}\Big|_{t=0}$$

Закон за радиоактивното разпадане

За едно ядро $\frac{dP(t)}{dt} = P(t)\frac{dP(t)}{dt}\Big|_{t=0}$ → константа λ, която зависи единствено и само от изотопа, който разглеждаме

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\lambda P(t) \Rightarrow P(t) = e^{-\lambda t}$$

Плътност на вероятността

$$P(t) = e^{-\lambda t} = \int_t^{\infty} f(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Ансамбъл от N_0 ядра в момента t=0

От (2) $\Rightarrow$ вероятността за разпад на кои да две ядра в момента t е еднаква ⇨ Разпада на ансамбъл от N_0 ядра може да се моделира като статистически експеримент от N_0 опита всеки с два възможни изхода неуспех (разпад до време t) и успех (оцеляване до време t)

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$x = 0,1,\ldots,n$$

$$b(x;N_0,P(t)) = \binom{N_0}{x}[P(t)]^x[(1-P(t))]^{N_0-x}$$

$$x = 1,2,\ldots N_0$$

Точен закон за оставащите ядра

$$b(N;N_0,P(t)) = \binom{N_0}{N}[e^{-\lambda t}]^N[(1-e^{-\lambda t})]^{N_0-N}$$

За голям брой начални ядра N_0 средния брой неразпаднали се ядра се дава от математическото очакване на биномното разпределение:

$$\mu = np \quad ⇨ \quad N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Закон за радиоактивното разпадане

Основни величини

- константа на разпад λ - параметър на вероятностното разпределение, описващо радиоактивния разпад. Зависи единствено и само от квантовите характеристики на изотопите (състоянията) участващи в радиоактивния разпад. В случай на голям начален брой ядра N_0 λ има смисъл на вероятност за разпад за единица време на ядро:

$$\lambda = -\frac{dN/dt}{N} \qquad N = N_0 e^{-\lambda t}$$

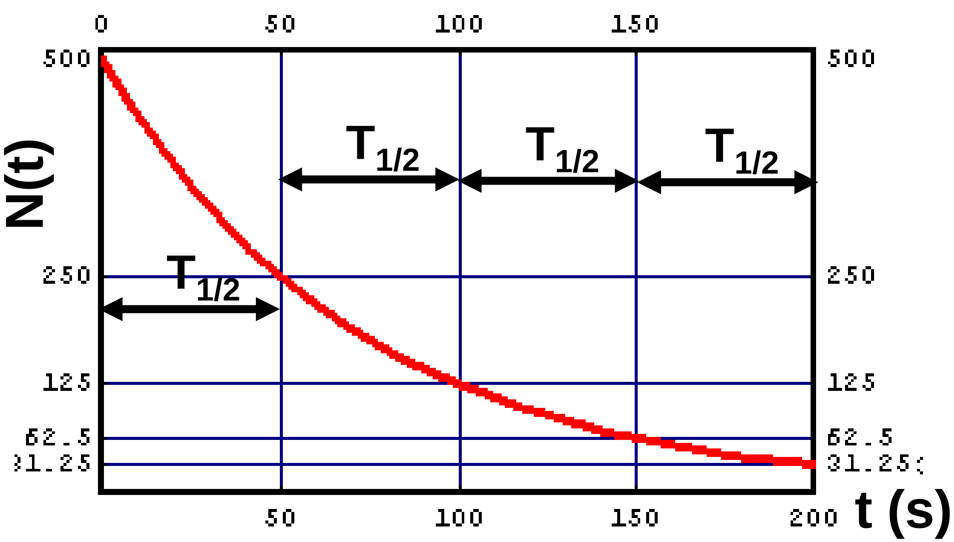
- време на живот τ - средното време което едно ядро оцелява преди да се разпадне:

$$P(t) = e^{-\lambda t}$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\tau = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

- период на полуразпад - времето което средния брой ядра намалява на половина:



$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\frac{N(T_{1/2})}{N_0} = \frac{1}{2} = e^{-\lambda t}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Активност

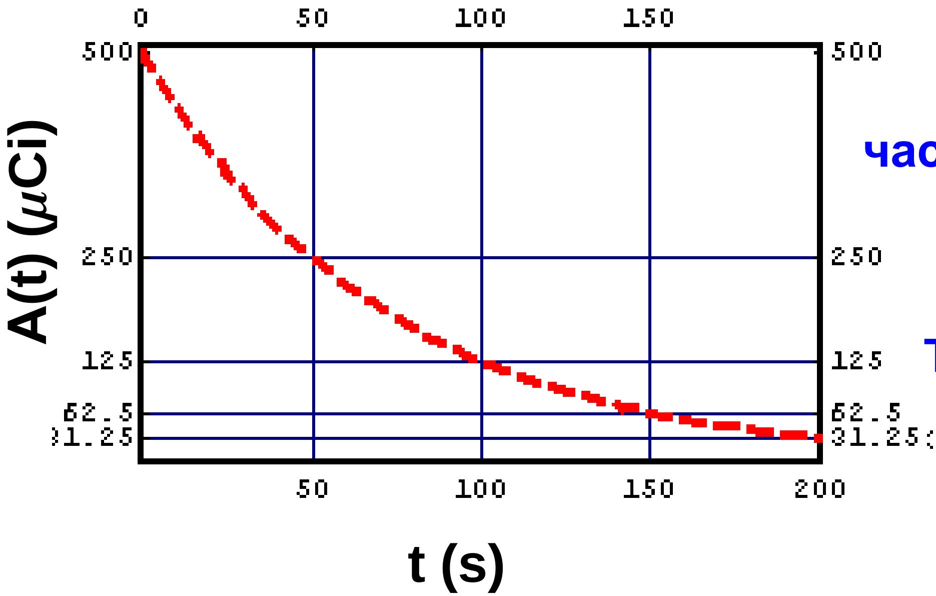
$$(0, N_0) \qquad (t, N(t)) \qquad (t+\Delta t, N(t+\Delta t))$$

$$\Delta N = N(t) - N(t+\Delta t) = N_0(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+\Delta t)}) = N_0 e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda \Delta t})$$

$$\Delta t << \lambda^{-1} (\Delta t << T_{1/2}) \qquad e^{-\lambda \Delta t} \approx 1 - \lambda \Delta t \qquad \Delta N = N_0 e^{-\lambda t}(\lambda \Delta t)$$

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \qquad A(t) \equiv \lambda N(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

$$\boxed{A[\text{разпад}/s] \qquad 1\mathrm{Bq} = [1/\mathrm{s}] \qquad 1\mathrm{Ci} = 3.7 \times 10^{10} [\mathrm{s}^{-1}]}$$

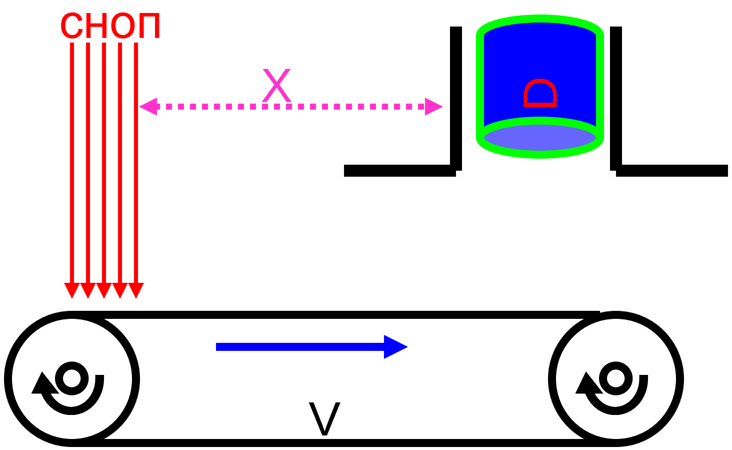


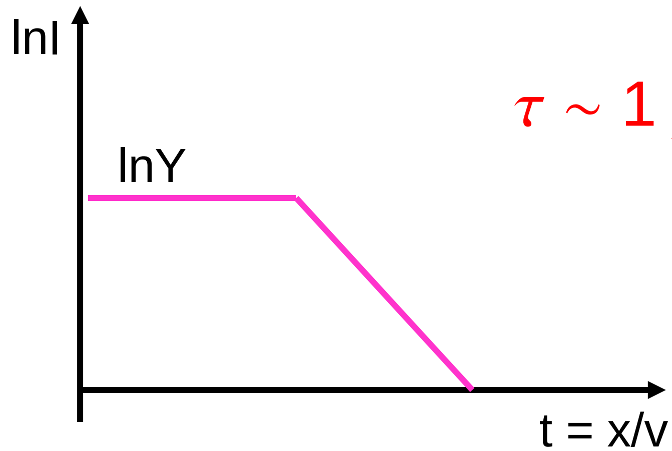
части от секундата < $T_{1/2}$ < няколко години

$T_{1/2}$ > няколко години $\lambda = -\frac{(dN/dt)}{N}$

Методи за определяне на времена на живот

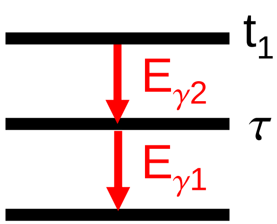
Метод на движещата се мишена





$\tau \sim 1\ \mu s \div 0.1\ \mu s$

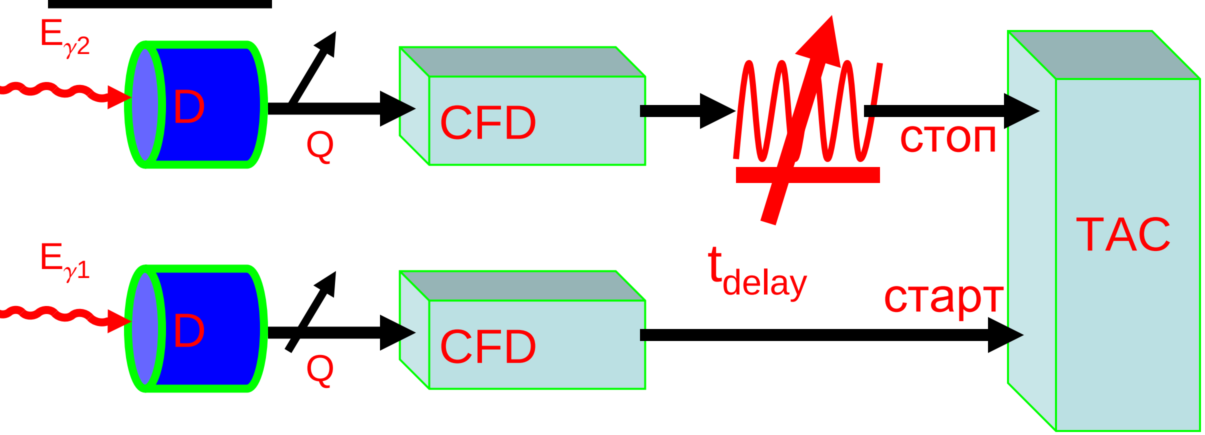
Метод на задържаните съвпадения

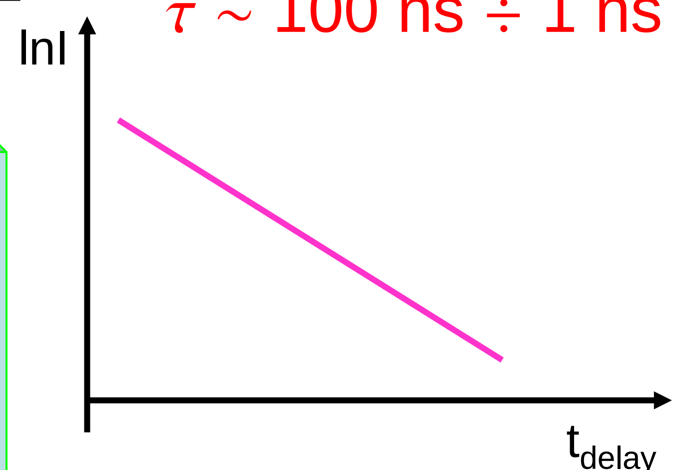


$t_{delay} = t_1 - t_2$

$I\,(t_{delay}) \propto e^{-\frac{t_1 - t_2}{\tau}}$

$\tau \sim 100\ \text{ns} \div 1\ \text{ns}$

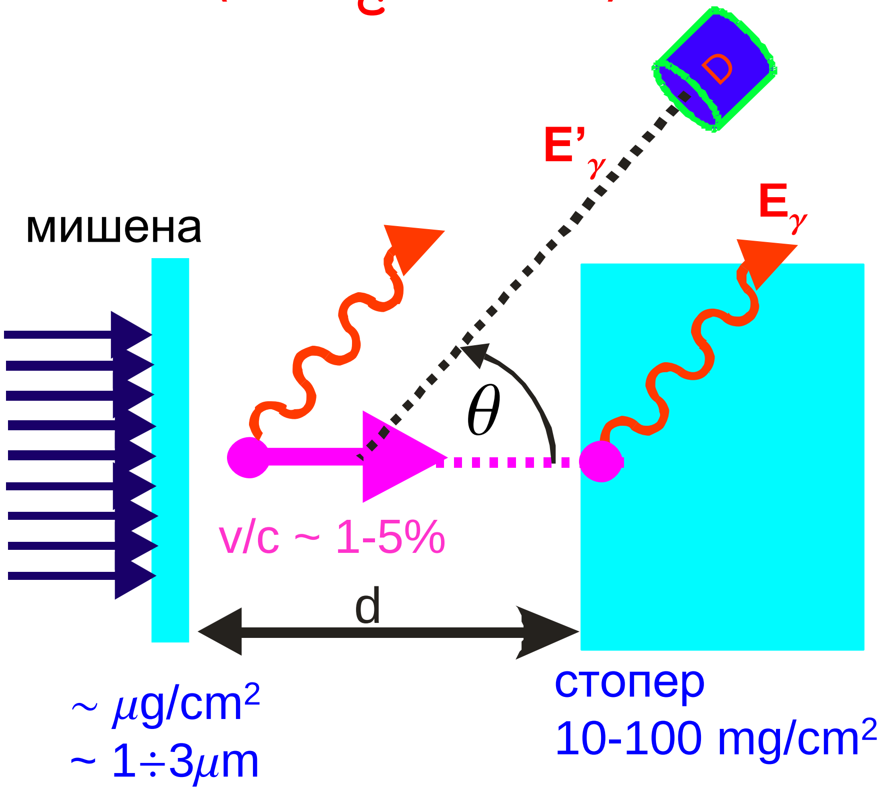




Методи за определяне на времена на живот

Метод на доплеровото разцепване (Recoil distance Doppler shift)

$$E'_\gamma = E_\gamma \left(1 + \frac{v}{c}\cos(\theta)\right)$$



$$I_{sh} = \int_0^{t_F}\left(-\frac{dN}{dt}\right)dt = N_0\left(1 - e^{-\lambda t_F}\right)$$

$$I_{unsh} = \int_{t_F}^{\infty}\left(-\frac{dN}{dt}\right)dt = N_0\, e^{-\lambda t_F}$$

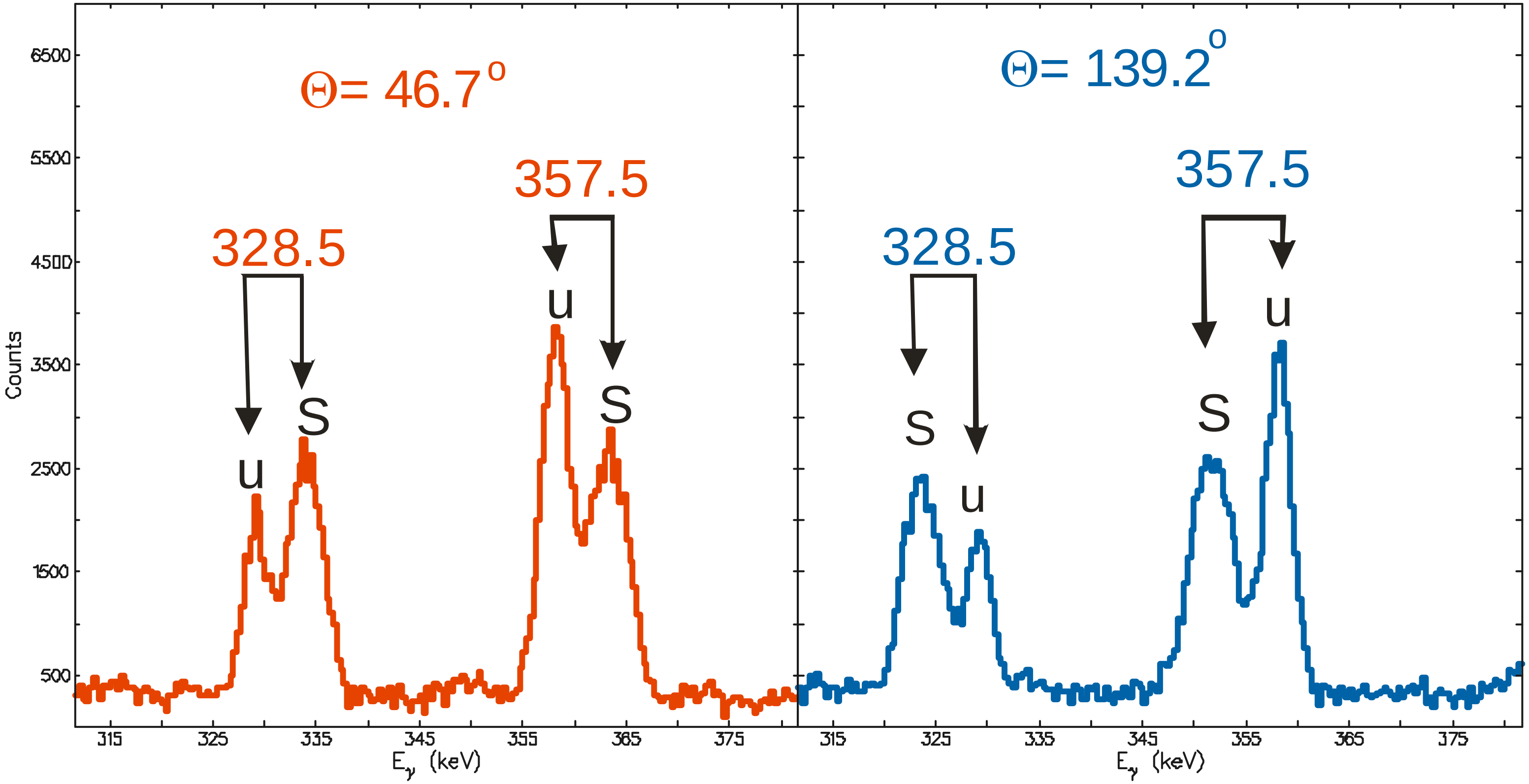
$$\frac{I_{unsh}}{N_0} = \frac{I_{unsh}}{I_{unsh} + I_{sh}} = e^{-\lambda t_F}$$

$$t_F = d / v$$

Измерване на времената на живот в ^{104}Rh

$\tau \sim$ 10 ps ÷ 0.1 ps

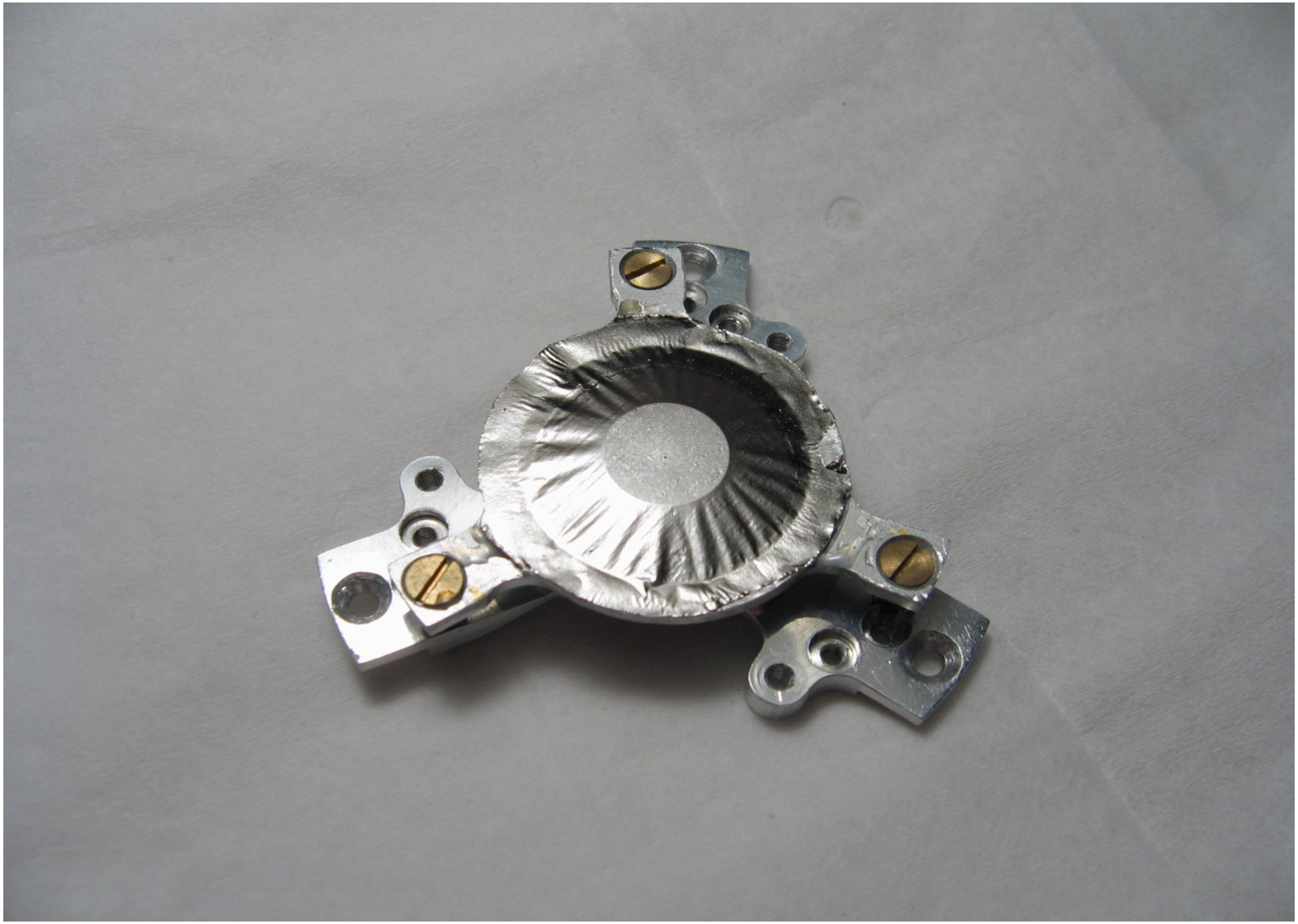
50 μm



Методи за определяне на времена на живот

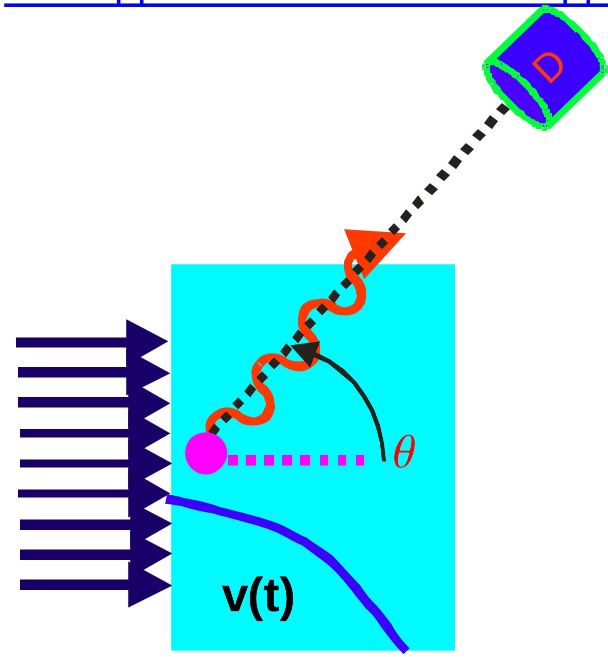
Метод на доплеровото разцепване (Recoil distance Doppler shift)

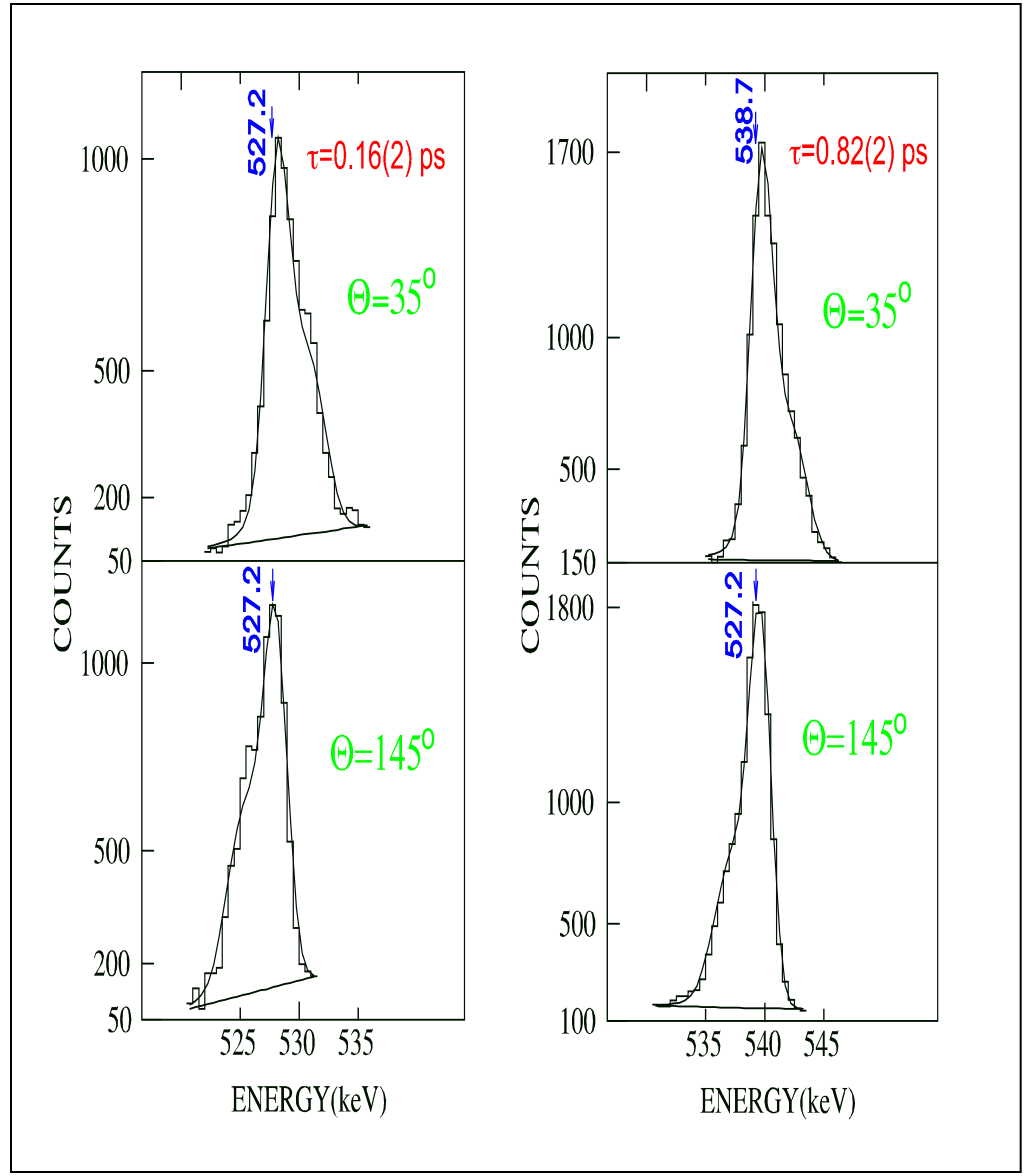
Експериментални трудности



Методи за определяне на времена на живот

Метод на отслабване на доплеровото отместване (Doppler shift attenuation)





$$E'_\gamma = E_\gamma \left(1 + \frac{v\,(t)}{c} \cos\,(\theta)\right)$$

$\tau \sim$ 1ps ÷ 0.01 ps

Благодаря за вниманието!